Geometrie non euclidee

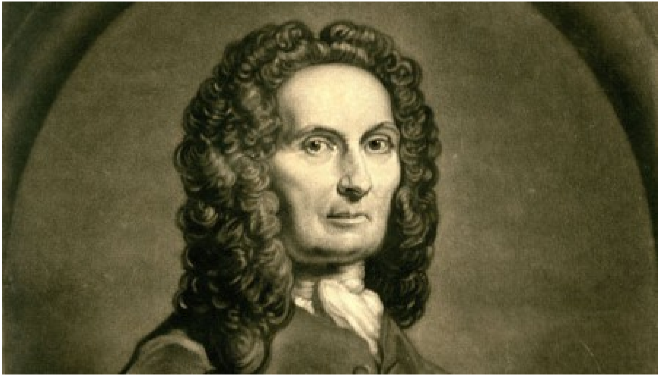
Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2023-24

Critiche moderne al quinto postulato

Nel 1560 viene stampata la versione latina dei commentari di Proclo, origine di una fioritura di studi su Euclide e sul quinto postulato: Commandino (1572), Clavio (1574), Cataldi 1603), Borelli (1658), Vitale (1680). John Wallis (1616-1703) dimostra la proposizione euclidea assumendo che data una figura, ne esiste un'altra ad essa simile e di dimensioni arbitrarie. *Problema*: la nozione di similarità è tra le più complesse dell'intera geometria ed abbisognerebbe di una chiarificazione preliminare.

Gerolamo Saccheri (1677-1733)

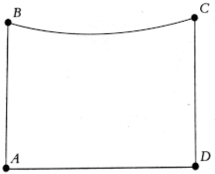


Saccheri: la strategia

Nel suo *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733), Saccheri non intende sostituire il quinto postulato con una diversa proposizione, ma *dimostrarlo* a partire dagli altri quattro.

A tale scopo, assume come ipotesi la *negazione* del postulato delle parallele, con l'intento di ricavarne una conseguenza incompatibile con gli altri postulati di Euclide.

Il suo punto di partenza è il quadrilatero birettangolo isoscele:



ottenuto innalzando da A e D due lati AB e DC uguali tra loro e perpendicolari alla base, e dimostra che gli angoli $\gamma = A\widehat{B}C$ e $\delta = D\widehat{C}B$ sono uguali.

Le tre ipotesi di Saccheri

1. *Ipotesi dell'angolo retto*: $\gamma = \delta = 90^\circ$;
2. *Ipotesi dell'angolo ottuso*: $\gamma = \delta > 90^\circ$;
3. *Ipotesi dell'angolo acuto*: $\gamma = \delta < 90^\circ$.

Se vale 1. (risp. 2., 3.), la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale (risp. maggiore, minore) di due retti.
Se le ipotesi 2. e 3. si rivelano intrinsecamente contradditorie oppure, sotto tali ipotesi, si dimostra il quinto postulato, per *consequentia mirabilis* Saccheri ritiene di poter affermare che tale postulato risulta dimostrato.
Sotto l'ipotesi 2., Saccheri dimostra il postulato delle parallele. Sotto l'ipotesi 3., Saccheri perviene, attraverso ragionamenti involuti, a conclusioni che a suo dire "ripugnano alla natura della retta".

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Lambert critico di Saccheri

- Nella sua *Theorie der Parallellinien* (uscita postuma nel 1786), Lambert riesamina il lavoro di Saccheri. Deriva egli stesso una contraddizione dall'ipotesi dell'angolo ottuso, ma non riesce a vedere alcuna pecca nell'ipotesi dell'angolo acuto.
- Osserva che se l'ipotesi dell'angolo acuto fosse vera, esisterebbe una misura assoluta di lunghezza.
- Infatti, in geometria euclidea le misure angolari sono assolute, perché possono essere espresse come frazioni di un qualsiasi cerchio, mentre le misure di lunghezza non possono essere definite indipendentemente da un'unità di misura prefissata.
- Tuttavia, se l'ipotesi dell'angolo acuto fosse vera, tutti i triangoli tra loro simili sarebbero tra loro uguali, e quindi ad ogni angolo si potrebbe associare un unico triangolo equilatero con tale misura angolare — e definire le misure assolute di lunghezza a partire dal lato di tale triangolo.

Schweikart e Taurinus (1)

- Ferdinand Karl Schweikart (1780-1857), giurista appassionato di matematica, crea una "geometria astrale" dove la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti.
- Dimostra che quanto più aumenta l'area del triangolo, tanto più diminuisce tale somma, e che l'altezza di un triangolo rettangolo isoscele aumenta all'aumentare dei lati, ma non può superare una certa lunghezza, che chiama "la Costante".
- La geometria euclidea vale nel caso in cui la Costante sia infinita.

Schweikart e Taurinus (2)

Franz Adolph Taurinus (1794-1874), nipote di Schweikart, generalizza note formule di trigonometria sferica come ad es.

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \frac{a}{k}$$

dove A, B, C sono angoli sulla superficie di una sfera di raggio k, e $\frac{a}{k}$ un angolo al centro sotteso da un segmento di lunghezza a, al caso di una sfera di raggio immaginario ik:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cosh \frac{a}{k}$$

dove il *coseno iperbolico* $\cosh \theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$. Tali formule possono essere usate per studiare le proprietà di triangoli sulle superfici della "geometria astrale", così come le formule classiche possono essere usate per studiare le proprietà di triangoli su superfici sferiche.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss: l'affrancamento da Euclide

Dal 1792 al 1813 Gauss, sotto l'influsso della filosofia kantiana, cerca di dimostrare il quinto postulato seguendo il metodo di Saccheri (poi ripreso anche da J.H. Lambert). Ha un'intensa corrispondenza con Wolfgang Bolyai (1775-1856), impegnato in analoghe ricerche.
Dal 1813 si convince che una geometria fondata sulla negazione del postulato delle parallele è assolutamente legittima e può riflettere proprietà centrali dello spazio reale. Dimostra numerosi teoremi ma non li pubblica per paura delle "strida dei beoti" (l'imperante teoria kantiana dello spazio avrebbe condannato chiunque avesse messo in dubbio la natura a priori e necessaria della geometria euclidea).
Nel 1831 si decide a pubblicare i propri risultati, ma Bolyai gli comunica che il figlio Janos è nel frattempo pervenuto a una geometria "iperbolica" e Gauss rinuncia al proprio progetto.

A quali "strida" si riferiva?

racconti di fate

geometrie da manicomio

la geometria non euclidea non può procurare agli studenti altro che stanchezza, vuotezza, arroganza e stupidità

elucubrazioni deliranti di un professore universitario elevate al rango di nuove verità sovrumane, per merito della sua megalomania

i geometri non euclidei hanno una comprensione oscura e menti ingannevoli, e l'insegnamento della geometria non euclidea in università e scuole darebbe origine a una razza di studenti che potrebbe compromettere la società

Gauss sulla natura della geometria

Mi convinco sempre di più che la necessità della nostra geometria (euclidea) non possa essere dimostrata, almeno non dalla ragione umana né per la ragione umana. Forse in un'altra vita potremo ottenere intuizioni sulla natura dello spazio che adesso ci sono inaccessibili. Sino ad allora dovremo collocare la geometria non nella stessa categoria dell'aritmetica, che è puramente a priori, ma in quella della meccanica (Lettera ad Olbers, 1817).

Dobbiamo umilmente ammettere che se il numero è il puro prodotto della nostra mente, lo spazio ha una realtà al di fuori delle nostre menti e non ne possiamo prescrivere le leggi completamente a priori (Lettera a Bessel, 1830).

Janos Bolyai (1802-1860)

La vicenda di Bolyai (1)

- Fino al 1820 Janos, figlio di Wolfgang, prova a dimostrare il postulato delle parallele. All'inizio il padre prova a scoraggiare le ricerche del figlio:

  Non devi tentare questo approccio alle parallele. Conosco questa strada sino alla sua fine. Ho attraversato questa notte senza fondo, che ha estinto ogni gioia e luce dalla mia vita. Ti imploro, abbandona la scienza delle parallele [...] Io ero pronto a divenire un martire per rimuovere il difetto dalla geometria e restituirla purificata all'umanità. Ho sostenuto fatiche mostruose; le mie creazioni sono di gran lunga migliori di quelle di altri e tuttavia non ho ottenuto completa soddisfazione [...] Sono tornato indietro quando ho visto che nessun uomo può raggiungere il fondo di questa notte. [...] Ho viaggiato oltre gli scogli di questo infernale Mar Morto e sono sempre tornato con l'albero maestro spezzato e le vele strappate. La rovina della mia disposizione e la mia sciagura sono iniziate così.

La vicenda di Bolyai (2)

- Tuttavia, già nel 1823 Janos aveva chiaramente concepito il proprio sistema non euclideo. Scrive al padre:

> *Ho fatto scoperte così meravigliose che ne sono rimasto stupito e che non potrei perdonarmi andassero perdute. [...] Ho creato un universo completamente nuovo dal nulla. Tutto ciò che finora ti ho mandato è null'altro che un castello di carta paragonato a una torre.*

- Janos completa il manoscritto nel 1829 e Wolfgang lo inserisce come appendice in una sua opera edita nel 1832. Alla richiesta da parte di Wolfgang di un giudizio sul lavoro del figlio, Gauss risponde:

> *Se cominciassi dicendo che non posso lodare quest'opera, saresti certamente sorpreso [...] Eppure non posso fare altrimenti, ché lodarla significherebbe lodare me stesso. Infatti l'intero contenuto [...] coincide praticamente con le meditazioni che hanno occupato la mia mente negli ultimi 30 o 35 anni.*

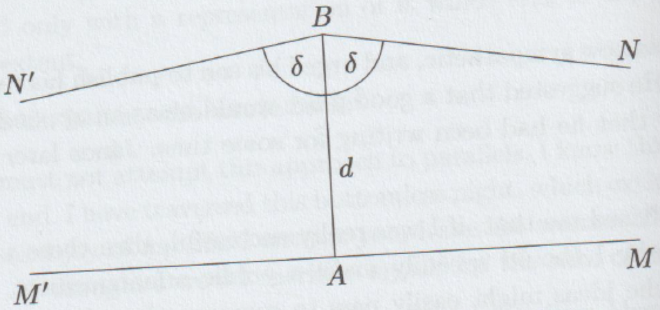


Figure 9.2 Parallels in Bolyai's geometry

Le caratteristiche della geometria iperbolica (2)

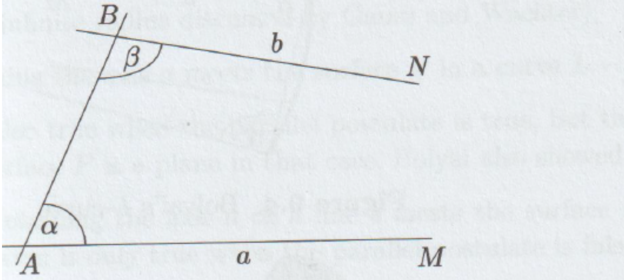
- Due rette AM e BN sono parallele se sono complanari, non si incontrano se prolungate indefinitamente e ogni semiretta condotta per B entro l'angolo $\widehat{ABN}$ incontra AM.
- Data una retta AM, per un punto B fuori di essa si possono condurre due rette parallele BN e BN' a AM.
- Gli angoli $\widehat{ABN}$ e $\widehat{ABN'}$ sono uguali ma non necessariamente retti: la loro misura è l'angolo di parallelismo $\Pi(p)$, che dipende solo dalla distanza $AB = p$.
- $\Pi(p)$ è una funzione continua di p che tende a 0 quando p tende all'infinito, mentre tende a 90° quando p tende a 0.
- La distanza tra due rette parallele tende a 0 (senza mai raggiungerlo) da un lato, mentre tende all'infinito dall'altro; le parallele iperboliche sono insomma "rette asintotiche".

Le caratteristiche della geometria iperbolica (3)

Nella geometria iperbolica vengono separati i concetti di *parallelismo* e *equidistanza*. Due rette possono:

1. intersecarsi ma non avere una perpendicolare comune (essere cioè divergenti in una direzione e convergenti in un'altra);
2. non intersecarsi ed avere una perpendicolare comune (essere cioè divergenti in entrambe le direzioni);
3. essere parallele e formare una perpendicolare comune all'infinito, dove formano un angolo nullo (essere cioè divergenti in una direzione e asintotiche nell'altra).

Le caratteristiche della geometria iperbolica (4)



Parallels and equal angles in Bolyai's geometry

Le caratteristiche della geometria iperbolica (5)

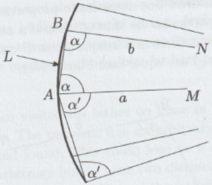


Figure 9.4 Bolyai's *L*-curve

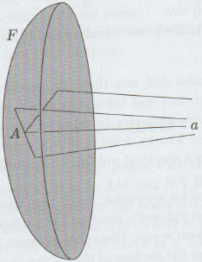


Figure 9.5 Bolyai's *F*-surface

Teoremi geometrici assoluti

Theorem

1. *Tutte le linee parallele all'asse a intersecano la superficie F ad angolo retto.*
2. *Su ogni F-superficie, se due L-curve ne intersecano una terza e la somma degli angoli coniugati interni è minore di due angoli retti, allora le due L-curve date si intersecano.*

Il punto 2. è importante perché mostra che prendendo le L-curve come rette la geometria euclidea vale per le F-superfici indipendentemente dall'aver assunto il postulato delle parallele. In uno spazio non euclideo vi sono superfici in cui la geometria è euclidea.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856)

Nella natura noi abbiamo cognizione, propriamente, soltanto del movimento, senza il quale le impressioni sensoriali sono impossibili. Pertanto tutti i rimanenti concetti, per esempio quelli geometrici, sono creazioni artificiali della nostra mente, tratte dalle proprietà del movimento; ecco perché lo spazio in sé, separatamente preso, per noi non esiste. [Nuovi principi della geometria, pp. 57 sg.]

La Pangeometria [...] dimostra che la supposizione che il valore della somma dei tre angoli di ogni triangolo rettilineo è costante [...] non è una conseguenza necessaria delle nostre nozioni sullo spazio. Non vi è che l'esperienza, la quale possa confermare la verità di questa supposizione, per esempio con la misura effettiva dei triangoli [...] Si dovranno preferire i triangoli i cui lati sono grandissimi. [Pangeometria, p. 335]

Dopo aver redatto, tra il 1823 e il 1826, due memorie che gli vengono rifiutate per la pubblicazione, tra il 1829 e il 1855 Lobačevskij dà alle stampe una serie di opere in cui delinea i fondamenti di una *geometria iperbolica*: data una retta e un punto esterno ad essa, per quel punto passano *almeno due* parallele alla retta data e la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti.

Bernhard Riemann (1826-1866)

Riemann: le geometrie sferica ed ellittica

- In *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* (1854), Riemann distingue tra *illimitatezza* e *infinità* dello spazio. Il primo è un concetto qualitativo, relativo all'estensione, mentre il secondo è un concetto metrico, quantitativo.
- La geometria ellittica si basa su uno spazio illimitato ma finito. Ogni retta è una linea chiusa e finita. Due rette in un piano si incontrano sempre, quindi non possono esserci parallele a una retta da un punto ad essa esterno.
- Tutte le perpendicolari a una retta r da una stessa parte di essa passano per un punto A, e quelle dall'altra parte passano per un punto A'.
- Se A e A' sono distinti, due rette hanno sempre due punti in comune (*geometria sferica*).
- Se A e A' coincidono, due rette si incontrano in un punto (*geometria ellittica*). Il piano ellittico non viene diviso da una sua retta in due regioni distinte.

Riemann: le geometrie sferica ed ellittica

Riemann: le geometrie sferica ed ellittica

> Fra le mostruosità più grandi che questo matematico minore che fu Riemann ha messo al mondo, quella di una linea perfettamente diritta e chiusa in sé è forse la più spassosa. […]
> Una delle conseguenze peggiori di questa geometria è il pericolo che si corre se si sputa in linea retta davanti a sé: si rischia infatti che lo sputo vi ricada addosso!
>
> Eugen Dühring (1833-1921)

Geometrie non euclidee: il problema della coerenza

- I sistemi non euclidei sono *consistenti*? Ossia, è possibile derivare in essi contraddizioni? E' chiaro che la questione va affrontata in senso puramente *formale*, prescindendo dall'intuizione spaziale.
- Si può cercare una dimostrazione di consistenza *assoluta* oppure *relativa*: dimostrare cioè che se una certa geometria non euclidea G deriva delle contraddizioni, queste possono essere già derivate nella geometria euclidea E.
- Per fare questo, si "traducono" i concetti di G in concetti di E, in modo che le traduzioni di tutti i teoremi di G risultino dimostrabili in E: si ottengono così *modelli euclidei delle geometrie non euclidee*.
- Nel 1866, Eugenio Beltrami fornisce il primo modello euclideo per la geometria iperbolica, usando una superficie detta *pseudosfera*.

Geometria iperbolica: il modello euclideo di Klein

Si fissi una circonferenza C.

punto	$\longrightarrow$	punto interno a C (contorno escluso)
retta	$\longrightarrow$	corda di C (estremi esclusi)
piano	$\longrightarrow$	insieme dei punti e delle rette di cui sopra
parallele	$\longrightarrow$	corde che non si incontrano all'interno di C

Questo modello soddisfa tutti gli assiomi (e quindi i teoremi) della geometria euclidea, tranne il postulato delle parallele: data una retta r e un punto P esterno ad essa, si possono condurre per P due parallele ad r.

Geometria iperbolica: il modello euclideo di Klein