

# Controlli automatici

## Funzioni di trasferimento ed algebra degli schemi a blocchi

**Prof. Alessandro Pisano**

**apisano@unica.it**

Illustriamo in maniera sistematica la procedura di **derivazione della funzione di trasferimento (FdT)** a partire da una equazione differenziale ordinaria (ODE) lineare a coefficienti costanti.

Un sistema dinamico lineare e tempo invariante (LTI) SISO avente uscita  $y(t)$  e ingresso  $u(t)$  sarà descritto da un legame ingresso-uscita avente la forma di una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned}$$

*$n =$  ordine del sistema*

$n \geq m$

$n = m$  sistema proprio

$n > m$  sistema strettamente proprio



Il vincolo  $n \geq m$  garantisce la **fisica realizzabilità** del sistema. Quando tale vincolo non è soddisfatto significa che l'uscita dipende da valori futuri dell'ingresso, e quindi nessun sistema fisico potrà mai essere descritto da una equazione differenziale avente  $n < m$

**Esempio**  $y(t) = \frac{du(t)}{dt}$        $n = 0$        $\frac{du(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$   
 $m = 1$



Per poter realizzare questo sistema dinamico, che implementa un «derivatore ideale», si dovrebbe essere in grado di «**predire il futuro**», in quanto il valore dell'uscita ad un generico istante  $t$  dipende da valori che l'ingresso assumerà nel futuro, in istanti immediatamente successivi.

Nessun sistema dinamico che descrive un processo fisico reale potrà mai essere descritto da una ODE con  $n < m$  in quanto viene violato il rapporto di causa-effetto fra l'ingresso e l'uscita.

L'evoluzione temporale dell'uscita è esprimibile attraverso la somma fra due diverse componenti, la **risposta libera** e la **risposta forzata**

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

La **risposta libera**  $y_\ell(t)$  è l'uscita del sistema nell'ipotesi che l'ingresso  $u(t)$  sia pari a zero.

La **risposta forzata**  $y_f(t)$  è l'uscita del sistema nell'ipotesi che le condizioni iniziali siano nulle.

Applicando l'operatore della TdL a tutti i membri della equazione differenziale del sistema ed applicando il teorema di derivazione si ottiene dopo qualche passaggio:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s) + Q(s)$$

in cui  $Q(s)$  è un polinomio di grado  $n - 1$  i cui coefficienti dipendono dalle condizioni iniziali

Il polinomio

$$P_c(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

viene detto «**polinomio caratteristico**» del sistema.

Isolando  $Y(s)$  alla sinistra dell'uguale si ottiene

$$Y(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} U(s) + \frac{Q(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

$$= Y_f(s) + Y_\ell(s)$$

$$Y_f(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} U(s)$$

$$Y_\ell(s) = \frac{Q(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

## Esempio

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3u(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = y'_0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) = s^2Y(s) - sy_0 - y'_0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = sY(s) - y_0$$

$$(s^2 + 4s + 2)Y(s) = 3U(s) + \underbrace{sy_0 + y'_0 + 4y_0}_{Q(s)}$$

$$Q(s) = sy_0 + y'_0 + 4y_0$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{3}{s^2 + 4s + 2}}_{Y_f(s)} U(s) + \underbrace{\frac{sy_0 + y'_0 + 4y_0}{s^2 + 4s + 2}}_{Y_\ell(s)}$$

## Il rapporto di polinomi

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

viene detto «**Funzione di trasferimento**» (FdT) del sistema SISO LTI

Tale rapporto di polinomi interviene esplicitamente nella espressione della TdL della risposta **forzata** del sistema

$$Y_f(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s) = F(s) U(s)$$

e si ha pertanto, per definizione:  $F(s) \equiv \frac{Y_f(s)}{U(s)}$

**La FdT di un sistema SISO LTI è il rapporto fra la TdL della componente forzata dell'uscita e la TdL dell'ingresso applicato.** Tale rapporto è **indipendente dalla particolare forma dell'ingresso applicato.** Il denominatore di tale rapporto viene detto «polinomio caratteristico del sistema» e coincide con il polinomio caratteristico della equazione differenziale che descrive il sistema.

Rappresentazione compatta di un sistema dinamico LTI mediante la sua FdT



Nell'analizzare o progettare sistemi di controllo si è unicamente interessati alla risposta forzata, il contributo alla risposta complessiva dovuto alle condizioni iniziali tende a zero (se così non fosse, non sarebbe un sistema di controllo ben progettato)

$$Y(s) = F(s)U(s) + \frac{Q(s)}{P_c(s)}$$

lo trascuriamo

## Esempi di calcolo della FdT a partire dal legame I/O

### Esempio

$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{u}(t) - u(t) \qquad G_u^y(s) = \frac{s - 1}{s^3 + 7s^2 + 6s + 1}$$

### Esempio

$$\ddot{y}(t) + 2y(t) = 4u(t) \qquad G_u^y(s) = \frac{4}{s^3 + 2}$$

### Esempio

$$m\dot{v}(t) + bv(t) = h(t) \qquad G_h^v(s) = \frac{1}{ms + b}$$

## Esempi di calcolo del legame I/O a partire dalla FdT

### Esempio (integratore)

$$G_u^y(s) = \frac{1}{s} \quad \dot{y}(t) = u(t) \quad y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

### Esempio

$$G_u^y(s) = \frac{4}{2s + 3} \quad 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 4u(t)$$

### Esempio

$$G_u^y(s) = \frac{3s + 2}{s(s + 1)} = \frac{3s + 2}{s^2 + 2s} \quad \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = 3\dot{u}(t) + 2u(t)$$

## Es. Sistema massa-molla-smorzatore

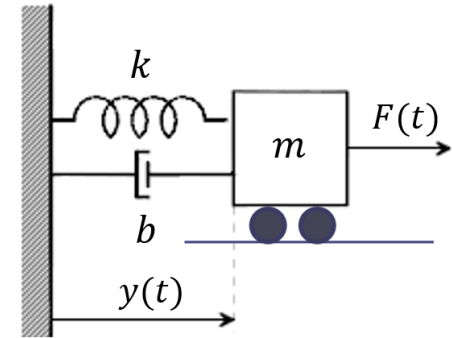
Legame I/O

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

Ingresso : forza applicata  $F(t)$

Uscita: posizione del carrello

**Hp.** Condizioni iniziali nulle

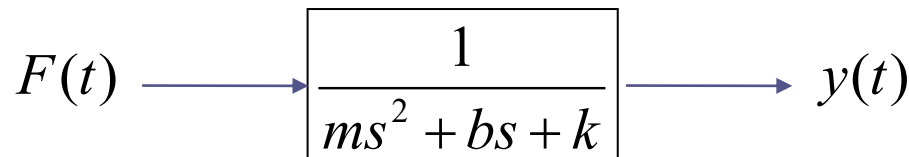


Trasformata di Laplace

$$ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = [ms^2 + bs + k]Y(s) = F(s)$$

Funzione di trasferimento

$$G_F^y(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$



## *FdT – analisi generale*

*Una generica FdT sarà espressa nella forma*

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

$n =$  **ordine** della FdT

$n \geq m$  Per la **fisica realizzabilità**

Radici del polinomio  $N_F(s)$  a numeratore      **ZERI** della FdT

Radici del polinomio  $D_F(s)$  a denominatore      **POLI** della FdT

Il vincolo di fisica realizzabilità impone che il grado del polinomio  $N_F(s)$  a numeratore sia minore o al più uguale al grado del polinomio a denominatore.

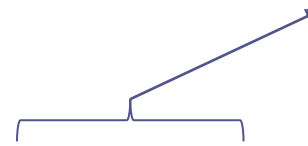
Un processo descritto da una FdT che viola il vincolo di fisica realizzabilità è un processo che non può esistere nella realtà in quanto l'ingresso non è «causa» e l'uscita non è «effetto»

**E' errore grave ipotizzare la descrizione di un processo fisico da controllare, o progettare un controllore, nella forma di una FdT con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore.**

Quando la FdT ha poli e zeri **reali** e' talvolta comodo riferirsi alla seguente fattorizzazione della FdT

**Fattorizzazione «costanti di tempo»**

Termini «binomi»

$$F(s) = \frac{\mu}{s^\nu} \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_{n-\nu} s)}$$


$\tau_i$      $T_i$     **Costanti di tempo degli zeri / dei poli**

$\nu$     **Numero di poli nell'origine (evitare di chiamarli «poli in zero»)**

$\mu$     **Guadagno statico (DC gain)**

Quando la FdT ha poli e zeri **reali** ci si può anche riferire alla seguente fattorizzazione alternativa, detta «fattorizzazione poli-zeri»

*Fattorizzazione «poli-zeri»*

$$F(s) = \frac{K (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^v (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-v})}$$

$z_i/p_i$       **zeri/ poli**

$v$       **Numero di poli nell'origine**

$K$       **Guadagno in alta frequenza (HFG)**

## Esempio

$$F(s) = \frac{4s + 4}{s^2 + 5s + 6}$$

$$n = 2 \quad m = 1$$

$$\text{zero: } s = -1 \quad \text{poli: } s = -2, \quad s = -3$$

### Fattorizzazione poli-zeri

$$F(s) = \frac{4(s + 1)}{(s + 2)(s + 3)}$$

$$v = 0 \quad K = 4$$

$$z_1 = -1$$

$$p_1 = -2 \quad p_2 = -3$$

### Fattorizzazione costanti di tempo

$$F(s) = \frac{4(s + 1)}{2 \left(\frac{1}{2}s + 1\right) 3 \left(\frac{1}{3}s + 1\right)} = \frac{2}{3} \frac{(1 + s)}{\left(1 + \frac{1}{2}s\right) \left(1 + \frac{1}{3}s\right)}$$

$$v = 0 \quad \mu = \frac{2}{3}$$

$$\tau_1 = 1s \quad (\text{1 secondo})$$

$$T_1 = \frac{1}{2}s \quad T_2 = \frac{1}{3}s$$

## Relazione fra poli/zeri e le relative costanti di tempo

<b>ZERI</b>	$z_i = -\frac{1}{\tau_i}$	$\tau_i = -\frac{1}{z_i}$
<b>POLI</b>	$p_i = -\frac{1}{T_i}$	$T_i = -\frac{1}{p_i}$

I poli e gli zeri sono i **reciproci cambiati di segno** delle relative costanti di tempo, e viceversa.

Quando in una FdT sono presenti anche poli (o zeri) complessi coniugati, la **fattorizzazione in costanti di tempo** diventa più articolata, ed oltre alle costanti di tempo include dei parametri aggiuntivi, associati alle coppie di poli e zeri complessi coniugati, denominati «**pulsazione naturale**» e «**smorzamento**»

*Termini «binomi»*

*Termini trinomi*

$$F(s) = \frac{\mu}{s^v} \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_{m_1} s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_{n_1} s)} \frac{\left(1 + \frac{2\xi_{z1}}{\omega_{n,z1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,z1}^2}\right) \dots \left(1 + \frac{2\xi_{zn2}}{\omega_{n,zn2}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,zn2}^2}\right)}{\left(1 + \frac{2\xi_{p1}}{\omega_{n,p1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,p1}^2}\right) \dots \left(1 + \frac{2\xi_{z1}}{\omega_{n,z1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,z1}^2}\right)}$$

*Termine trinomio*       $\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) = \frac{1}{\omega_n^2} (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$

$\omega_n$       **Pulsazione naturale della coppia di poli/zeri CC**       $\omega_n > 0$

$\xi$       **Smorzamento della coppia di poli/zeri CC**       $|\xi| < 1$

## **Poli (o zeri) complessi coniugati**

$$\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) \leftrightarrow (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$$

$\omega_n$  **Pulsazione naturale** della coppia di poli/zeri CC  $\omega_n > 0$

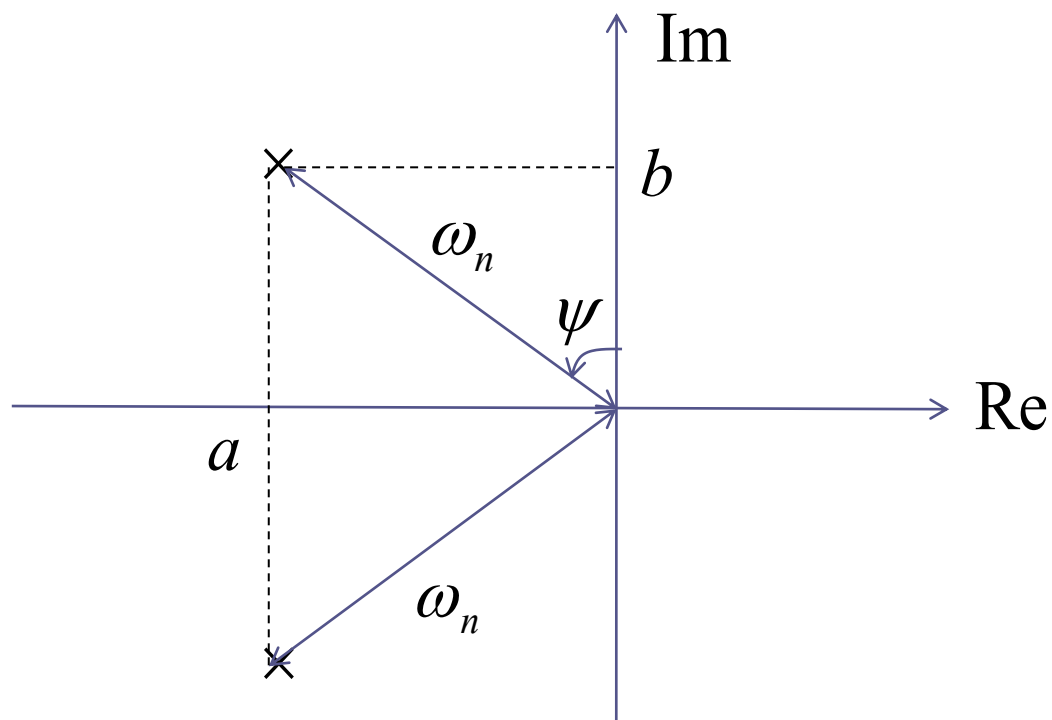
$\xi$  **Smorzamento** della coppia di poli/zeri CC  $|\xi| < 1$

$$\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = a \pm jb$$

$$a = -\xi\omega_n$$

$$b = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

## Significato geometrico dello smorzamento e della pulsazione naturale



$$\xi = \sin(\psi)$$

$$s_{1,2} = a \pm jb$$

$$a = -\xi\omega_n$$

$$b = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$a^2 + b^2 = \omega_n^2$$

$\xi = 0$     **Immaginari puri**

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

$\xi = 1$     **Reali e coincidenti negativi**

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

$\xi = -1$     **Reali e coincidenti positivi**

$$s_{1,2} = \omega_n$$

Una importante quantità associata ad una FdT  $F(s)$  è un parametro costante denominato «**guadagno statico**».

Tale parametro si calcola in maniera differente a seconda che  $F(s)$  abbia o meno dei poli nell'origine.

Se  $F(s)$  non ha poli nell'origine il guadagno statico si determina semplicemente valutando la FdT in corrispondenza del valore  $s = 0$ .

$$\mu = F(0)$$

Se la FdT ha uno o più poli nell'origine, il guadagno statico (che in tal caso viene detto guadagno statico **generalizzato**) si determina **rimuovendoli** e successivamente valutando la FdT in corrispondenza del valore  $s = 0$ .

$$\mu = s^v F(s) \Big|_{s=0} \quad v = \text{numero di poli nell'origine}$$

**Esempio**

$$F(s) = \frac{s + 2}{s^3 + 7s^2 + 6s + 1} \quad \nu = 0$$

guadagno statico  $\mu = F(0) = 2$

**Esempio**

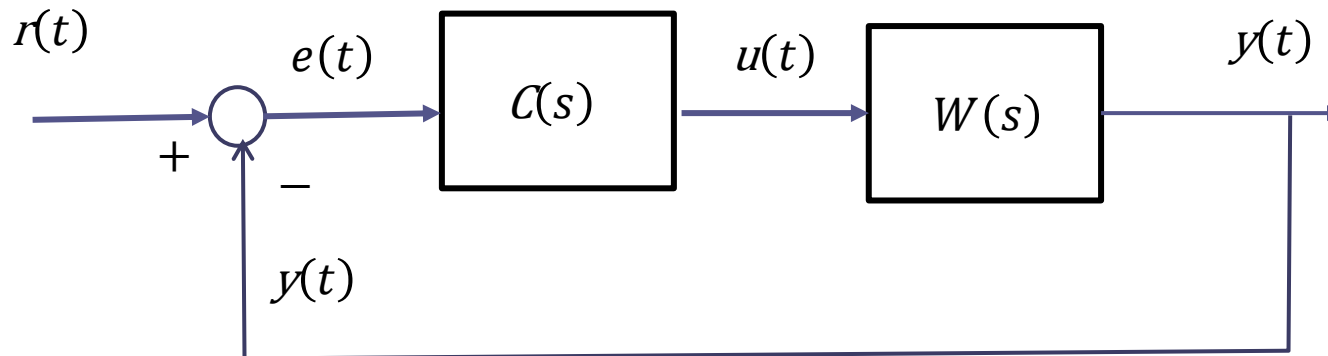
$$F(s) = \frac{s + 2}{s(s^2 + 6s + 4)} \quad \nu = 1$$

guadagno statico  
generalizzato

$$\mu = s^\nu F(s) \Big|_{s=0} = \frac{s + 2}{(s^2 + 6s + 4)} \Big|_{s=0} = 0.5$$

**Attenzione**

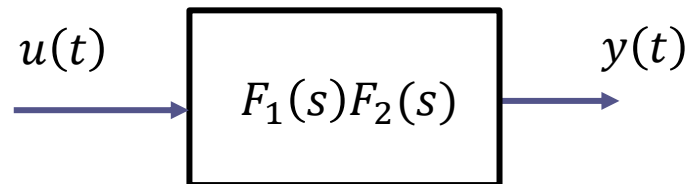
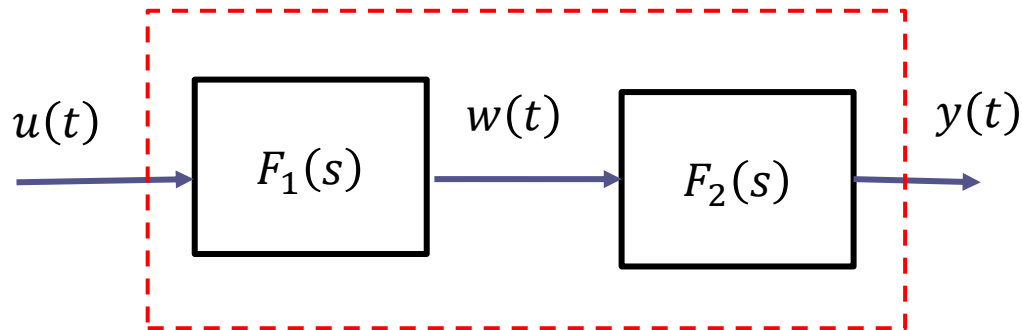
I sistemi di controllo con cui avremo a che fare nel corso saranno rappresentati dal seguente schema a blocchi, in cui **sia il processo  $W(s)$  da controllare che il controllore  $C(s)$  (che dovremmo progettare) saranno descritti attraverso la loro FdT**



Vediamo come si compongono fra loro FdT variamente interconnesse («**algebra degli schemi a blocchi**»)

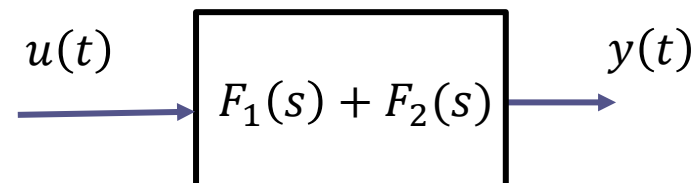
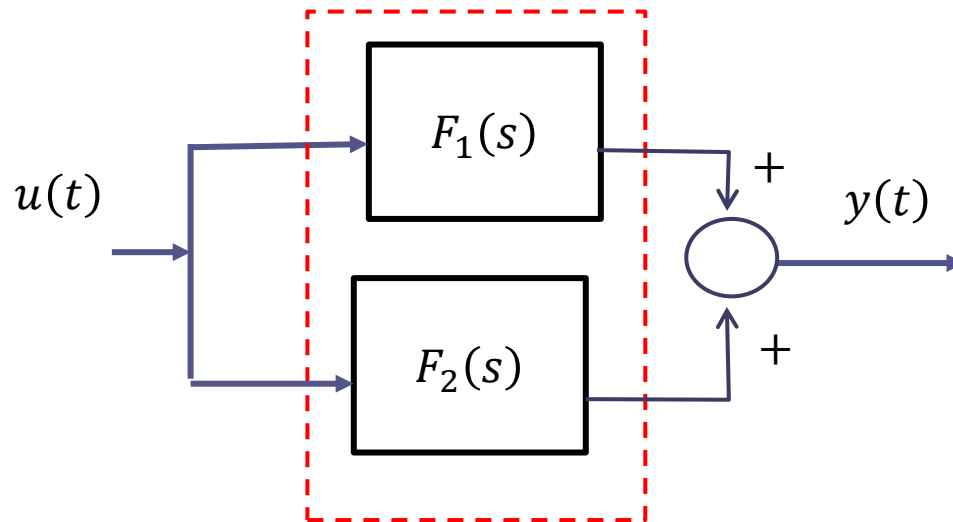
## Composizione serie

Alla **casata** fra due blocchi  $F_1(s)$  ed  $F_2(s)$  si associa un blocco equivalente avente come funzione di trasferimento il **prodotto** fra le due

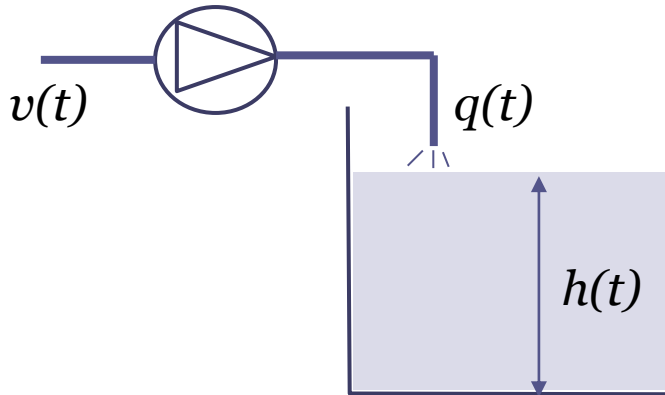


## Composizione parallelo

Al **parallelo** fra due blocchi  $F_1(s)$  ed  $F_2(s)$  si associa un blocco equivalente avente come funzione di trasferimento la **somma** fra le due



## Es. Pompa che alimenta un serbatoio



*In un processo industriale, una pompa azionata da un motore viene pilotata mediante un segnale di comando  $v(t)$  e produce una portata  $q(t)$  [ $m^3/s$ ] di un liquido. Il legame tra il segnale  $v(t)$  e la portata  $q(t)$  è*

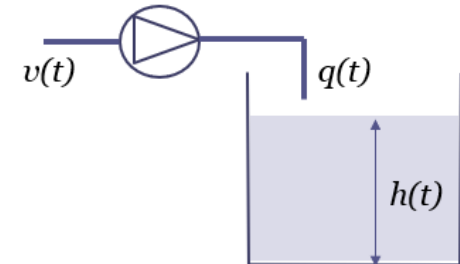
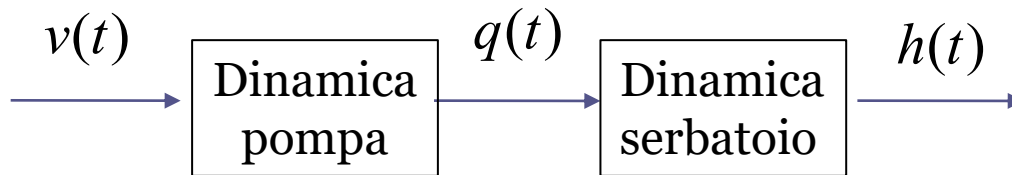
$$0.1 \dot{q}(t) + q(t) = v(t)$$

*La portata  $q(t)$  del liquido viene immessa in un serbatoio a sezione rettangolare. Il legame tra la portata di ingresso ed il livello  $h(t)$  [m] del liquido nel serbatoio è*

$$A \dot{h}(t) = q(t) \quad A = 2.5m^2 \quad \text{Sezione del serbatoio}$$

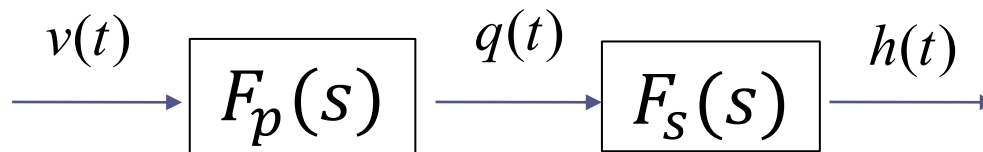
*Determinare la funzione di trasferimento che mette in relazione il segnale di comando  $v(t)$  con il livello  $h(t)$  nel serbatoio*

## Es. Pompa che alimenta un serbatoio

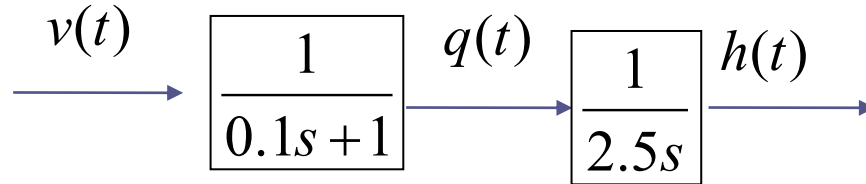


$$0.1 \dot{q}(t) + q(t) = v(t) \quad \Rightarrow \quad F_p(s) = \frac{Q(s)}{V(s)} = \frac{1}{0.1s + 1}$$

$$A \dot{h}(t) = q(t) \quad \Rightarrow \quad F_s(s) = \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{As} = \frac{1}{2.5s}$$



## Schema a blocchi



## FdT complessiva (composizione serie)

$$G_v^h(s) = \frac{H(s)}{V(s)} = \frac{1}{0.25s^2 + 2.5s}$$

*FdT del secondo ordine*

*Nessuno zero*

*Un polo in  $s=0$  ed un polo in  $s=-10$*

*Equazione differenziale che mette in relazione  $v(t)$  con  $h(t)$*

$$0.25 \ddot{h}(t) + 2.5 \dot{h}(t) = v(t)$$

Operando direttamente sulle equazioni differenziali

$$0.1 \dot{q}(t) + q(t) = v(t) \quad (\text{a})$$

$$2.5 \dot{h}(t) = q(t) \quad (\text{b})$$

si deve:

1. Derivare la eq. (b)  $2.5 \ddot{h}(t) = \dot{q}(t) \quad (\text{c})$

2. Ricavare  $\dot{q}(t)$  dalla eq. (a):

$$\dot{q}(t) = 10 v(t) - 10q(t)$$

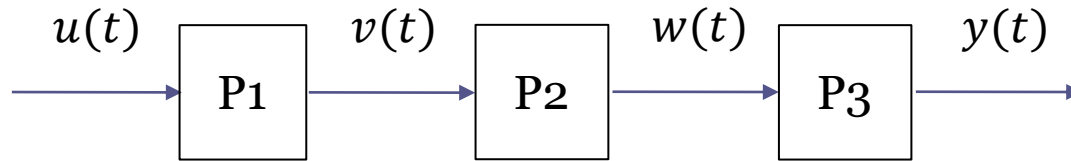
e sostituire nella eq. (c)

$$2.5 \ddot{h}(t) = 10 v(t) - 10q(t) \quad (\text{d})$$

3. Ricavare  $q(t)$  dalla eq. (b), e sostituire nella eq. (d)

$$2.5 \ddot{h}(t) = 10 v(t) - 25 \dot{h}(t) \quad \Rightarrow \quad 2.5 \ddot{h}(t) + 25 \dot{h}(t) = 10 v(t)$$

## Esempio: Tre processi in cascata



**Processo P1**       $\ddot{v}(t) + 2 \dot{v}(t) + 4v(t) = \dot{u}(t) + 3u(t)$

**Processo P2**       $2\ddot{w}(t) + 3 \dot{w}(t) + 7w(t) = 2\dot{v}(t) + v(t)$

**Processo P3**       $\dot{y}(t) + 10y(t) = 5w(t)$

*Determinare la funzione di trasferimento (o equivalentemente l'equazione differenziale) che mette in relazione il segnale di ingresso  $u(t)$  al processo P1 con il segnale di uscita  $y(t)$  del processo P3*

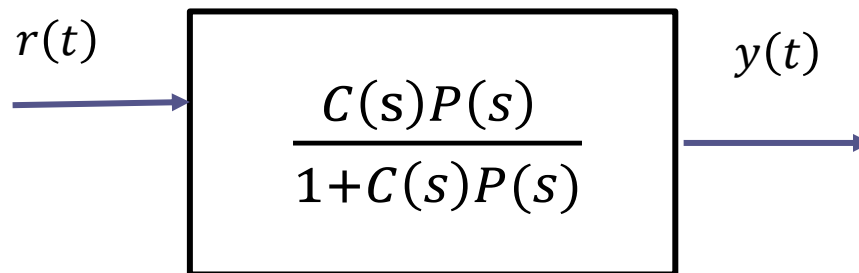
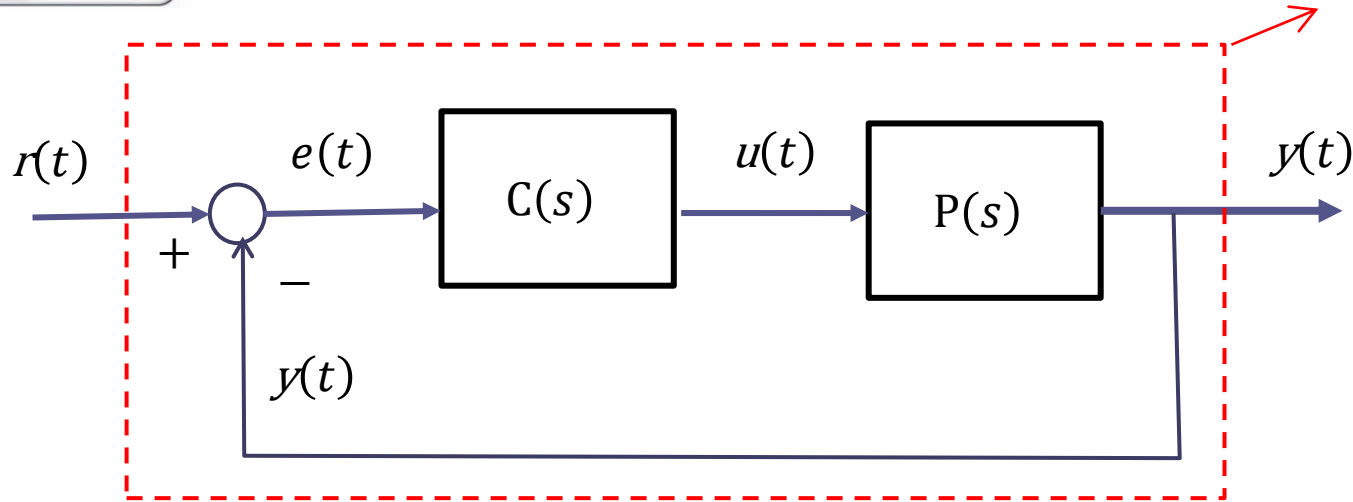
**Soluzione:**       $F_u^y(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 4} \cdot \frac{2s + 1}{2s^2 + 3s + 7} \cdot \frac{5}{s + 10}$

**Attenzione**



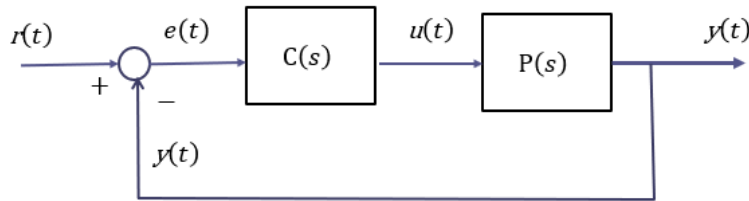
## Composizione serie/feedback (sistema di controllo a retroazione unitaria)

$W_r^y(s)$  ?



$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

**Funzione di trasferimento a ciclo chiuso** fra il set point e l'uscita



**Passaggi che giustificano l'espressione della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita fornita nella slide precedente**

$$Y(s) = P(s)U(s) \qquad U(s) = C(s)E(s)$$

$$Y(s) = P(s)C(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

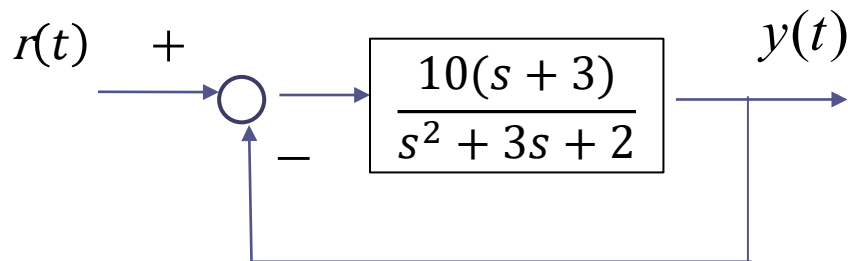
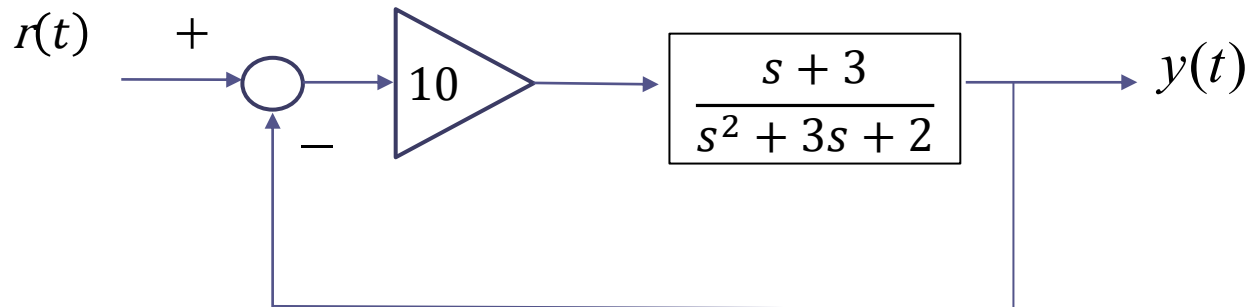
$$Y(s) = P(s)C(s)[R(s) - Y(s)] = P(s)C(s)R(s) - P(s)C(s)Y(s)$$

$$Y(s)[1 + P(s)C(s)] = P(s)C(s)R(s)$$

$$Y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} R(s)$$

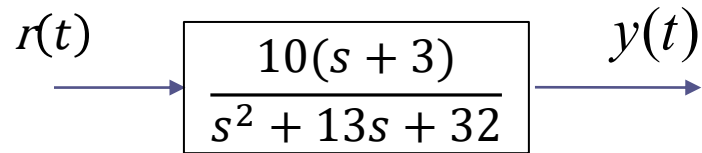
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

## Esempio – sistema di controllo in retroazione con regolatore proporzionale



Funzione di trasferimento a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita:

$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10(s+3)}{s^2+3s+2}}{1 + \frac{10(s+3)}{s^2+3s+2}} = \frac{10(s+3)}{s^2+3s+2+10(s+3)} = \frac{10(s+3)}{s^2+13s+32}$$



La FdT a ciclo chiuso fra il set point è l'uscita è una FdT del secondo ordine, con uno zero in  $-3$ , due poli in  $-3.2$  e  $-9.7$ , e guadagno statico pari a  $30/32 \cong 0.93$

E' frequente in un sistema di controllo che il set point assuma un valore costante.

Riusciamo a determinare il valore di regime della variabile di uscita conseguente all'applicazione di un set point unitario  $r(t) = \delta_{-1}(t)$ ? Idee?

Possiamo applicare il **teorema del valore finale**.

Determiniamo innanzitutto la TdL della componente forzata dell'uscita.

Poiche, per definizione, la FdT è il rapporto fra la TdL dell'uscita e la TdL dell'ingresso, possiamo determinare  $Y(s)$  come segue:

$$Y(s) = R(s)W_r^y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{10(s+3)}{s^2 + 13s + 32}$$

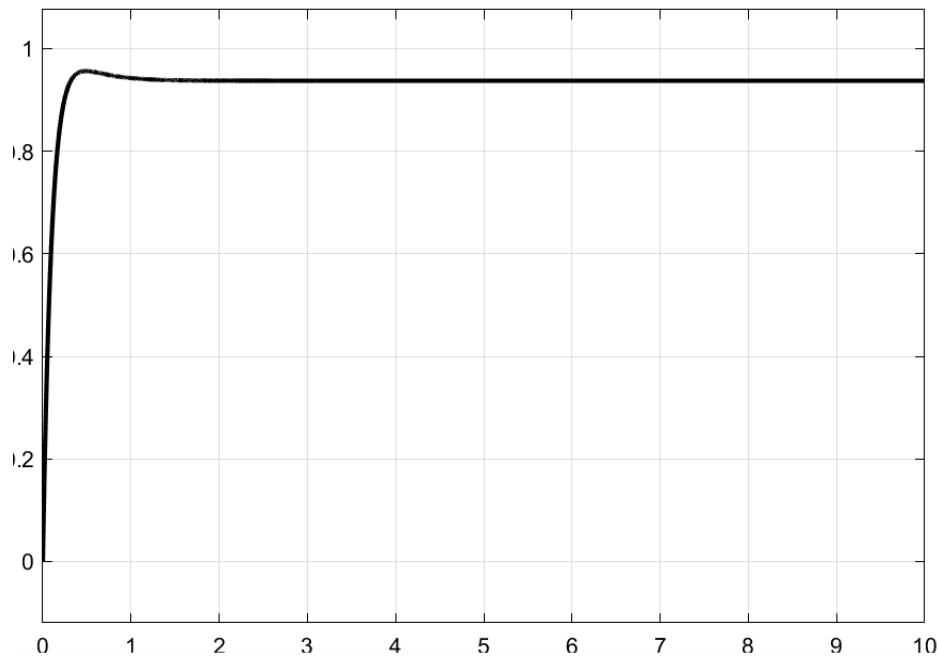
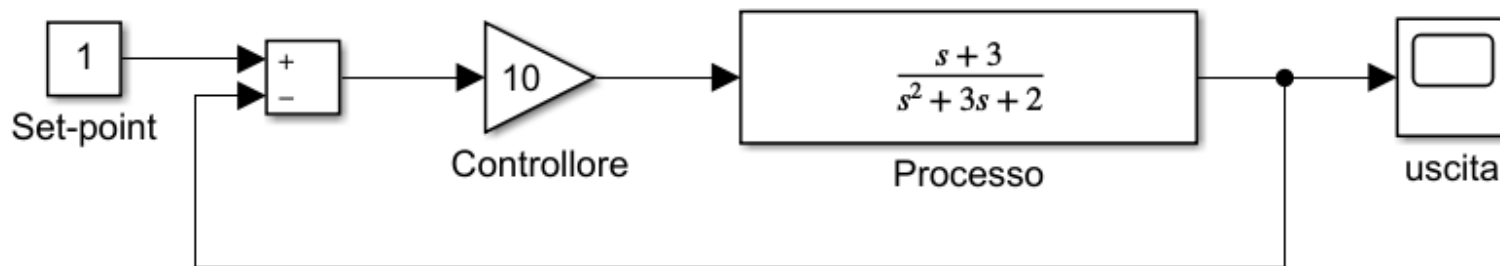
### Teorema del valore finale

Se esiste finito il  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , il valore di tale limite è:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = [sX(s)]_{s=0}$

Un segnale canonico  $x(t)$  ammette un limite finito per  $t \rightarrow \infty$  se e solo se la sua TdL  $X(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa eccetto al più un polo semplice in  $s = 0$

$y(t)$  ammette un limite finito perché la sua TdL ha un polo semplice in  $s = 0$  ed una coppia di poli reali negativi.

Quindi:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = [sY(s)]_{s=0} = \left[ \frac{10(s+3)}{s^2 + 13s + 32} \right]_{s=0} = 0.93$



L'uscita presenta una lieve **sovraelongazione**, e converge verso il valore calcolato di regime con un transitorio che si estingue in poco più di un secondo.

Da cosa dipende questo comportamento ?

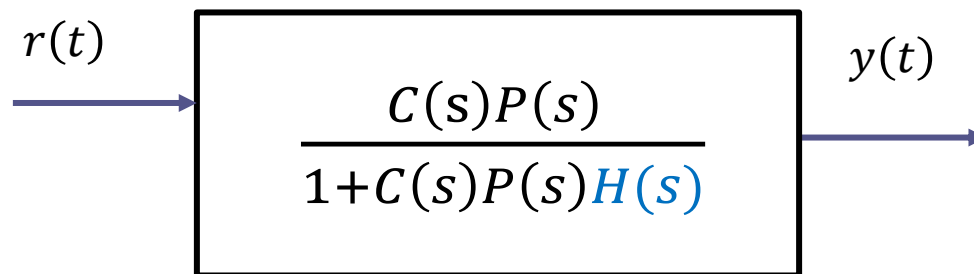
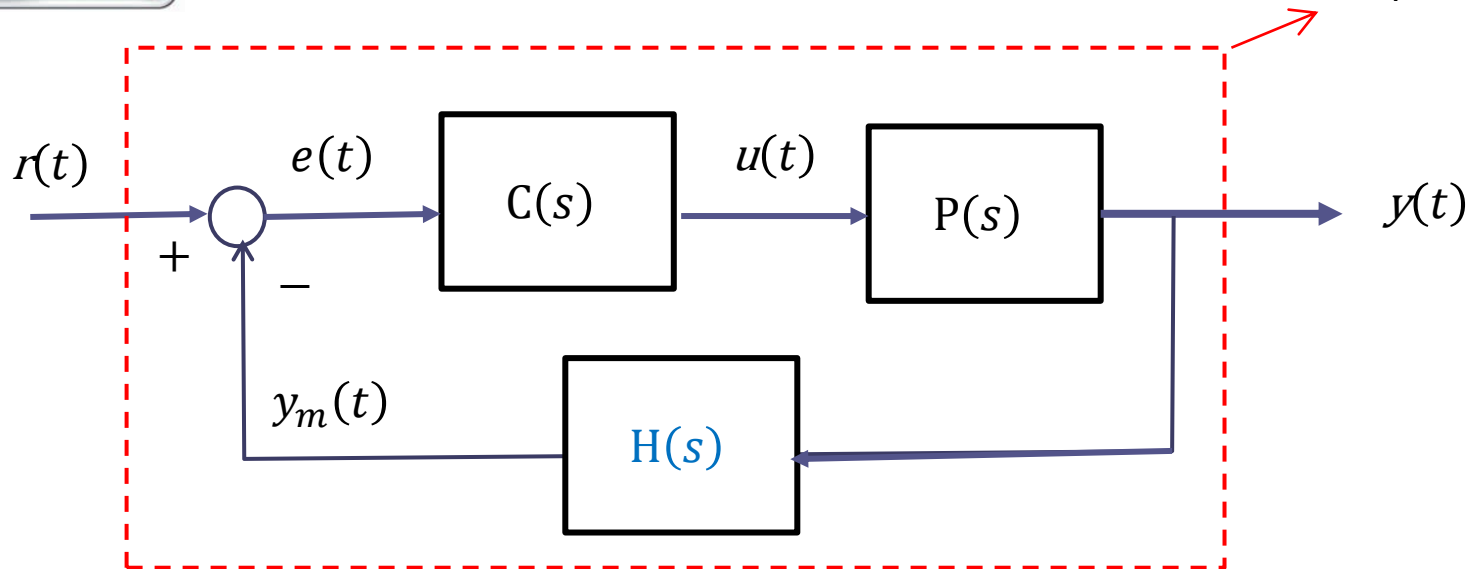
Tale comportamento dipende, lo vedremo a breve, unicamente dalla posizione nel piano dei poli e degli zeri della FdT a ciclo chiuso.

**Attenzione**



## Composizione serie/feedback (sistema di controllo a **retroazione non unitaria**)

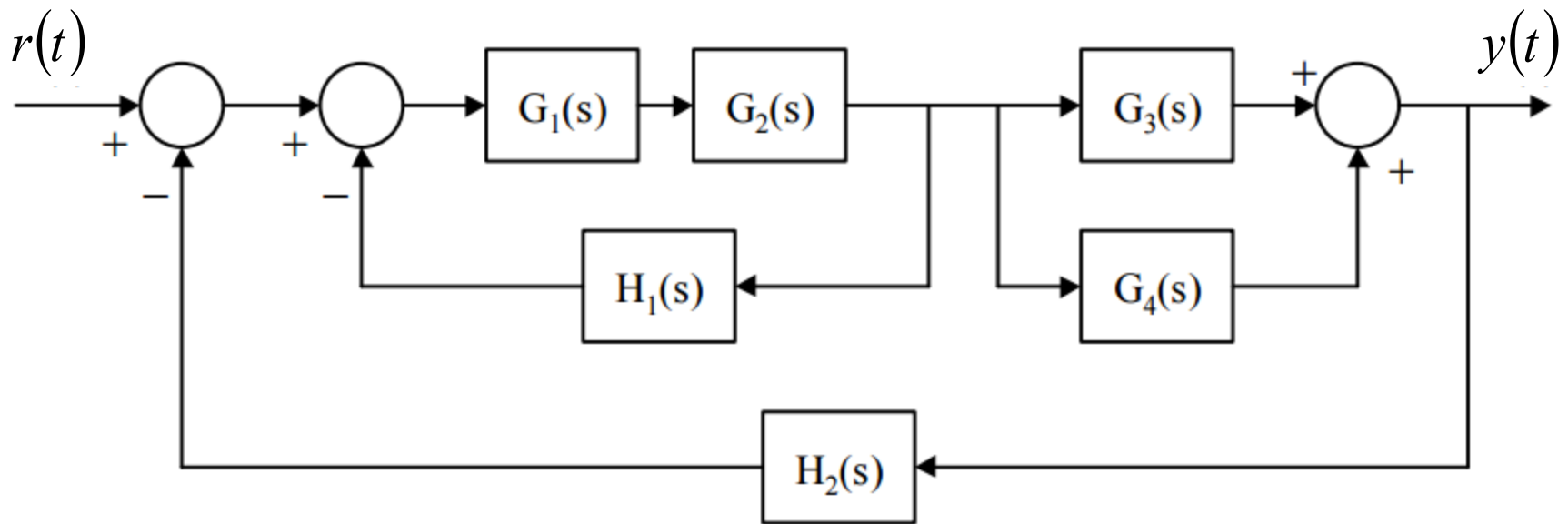
$W_r^y(s)$  ?



$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)}$$

Funzione di trasferimento **a ciclo chiuso** fra il set point e l'uscita in un sistema di controllo a **retroazione non unitaria**

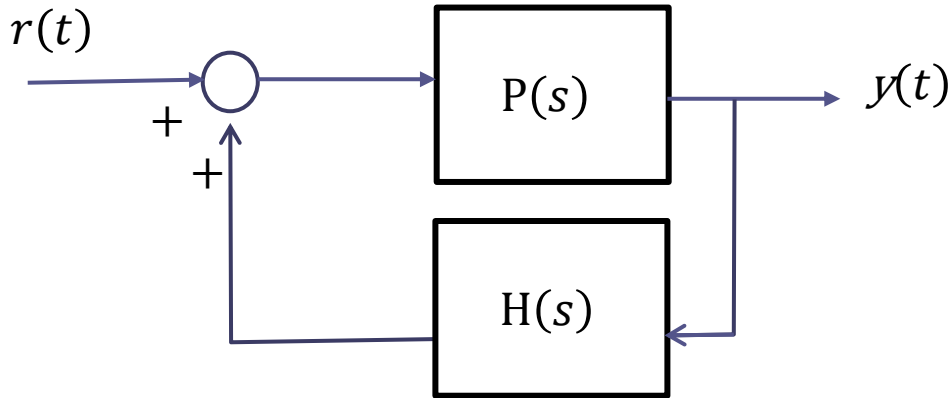
**Esercizio**      *Calcolare la FdT a ciclo chiuso*



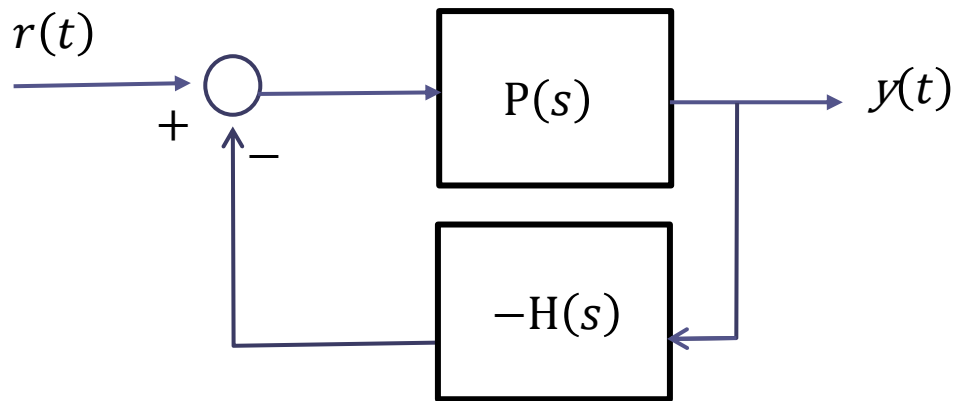
**Soluzione:**

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 + H_1 G_1 G_2 + G_1 G_2 (G_3 + G_4) H_2}$$

## Retroazione positiva



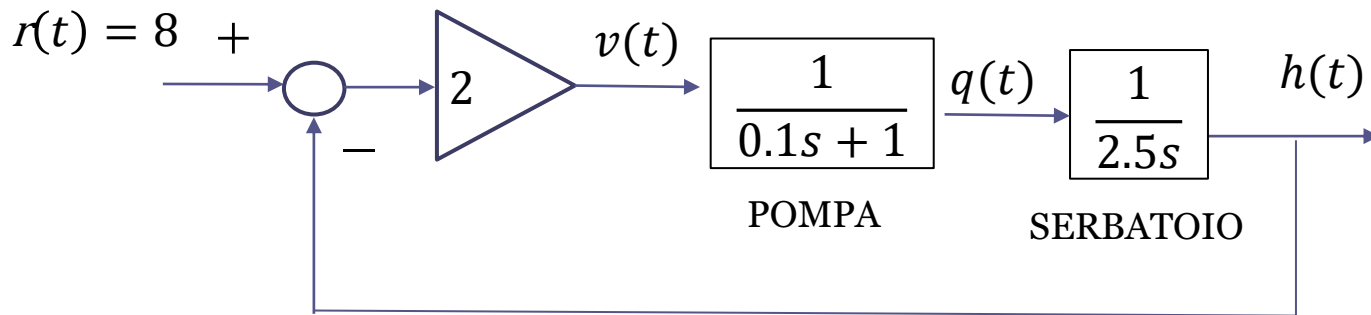
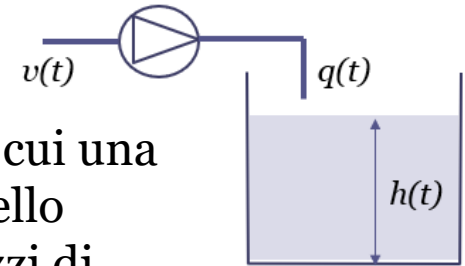
Sistema equivalente con retroazione negativa



$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{1 + P(s)(-H(s))} = \frac{P(s)}{1 - P(s)H(s)}$$

## Esercizio

Si consideri un sistema di controllo del livello di un serbatoio in cui una pompa a velocità variabile immette una portata d'acqua. Il modello matematico del processo è stato ricavato in precedenza. Si ipotizzi di impiegare un controllore proporzionale con guadagno pari a 2.



Si calcoli il valore di regime del livello  $h(t)$ , e si verifichi in particolare se tale valore di regime coincide o meno con il valore del set-point.

## ***Sistemi dinamici affetti da disturbi***

Come caratterizzare attraverso il formalismo delle FdT sistemi dinamici nei quali, insieme alla variabile di ingresso ed alla variabile di uscita, intervengono anche dei disturbi ?

Se applichiamo il procedimento visto al modello matematico del forno illustrato in precedenza, ad esempio:

$$C_f \dot{T}_f(t) + K_{ie} T_f(t) = q(t) + K_{ie} T_e(t)$$

non riusciamo a determinare la FdT fra la potenza termica  $q(t)$  applicata e la temperatura  $T_f(t)$  del fluido.

Piu in generale, un sistema dinamico LTI avente uscita  $y(t)$  e ingresso  $u(t)$ , ed affetto da una ulteriore variabile disturbante  $d(t)$ , sarà descritto da una equazione differenziale più complicata rispetto a quella vista in precedenza

$$\begin{aligned}
& \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\
& = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) + \\
& \quad + \alpha_q \frac{d^q d(t)}{dt^q} + \alpha_{q-1} \frac{d^{q-1} d(t)}{dt^{q-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{d d(t)}{dt} + \alpha_0 d(t)
\end{aligned}$$

*n = ordine del sistema*

$$n \geq m$$

$$n \geq q$$

Riusciamo a gestire sistemi di questo tipo applicando il **principio di sovrapposizione degli effetti**

Il comportamento di un sistema dinamico lineare soggetto a più ingressi esterni (il segnale  $u(t)$  ed il segnale  $d(t)$  sono interpretabili come due segnali di ingresso distinti, il primo manipolabile ed il secondo no) può essere determinato analizzando separatamente il comportamento del sistema in risposta ai singoli ingressi esterni che agiscono uno alla volta, ponendo gli altri ingressi esterni pari a zero, e poi facendo la somma.

In altri termini, con riferimento alla equazione differenziale riportata nella slide precedente l'evoluzione temporale del segnale di uscita  $y(t)$  è calcolabile come la somma di due contributi distinti

$$y(t) = y_u(t) + y_d(t)$$

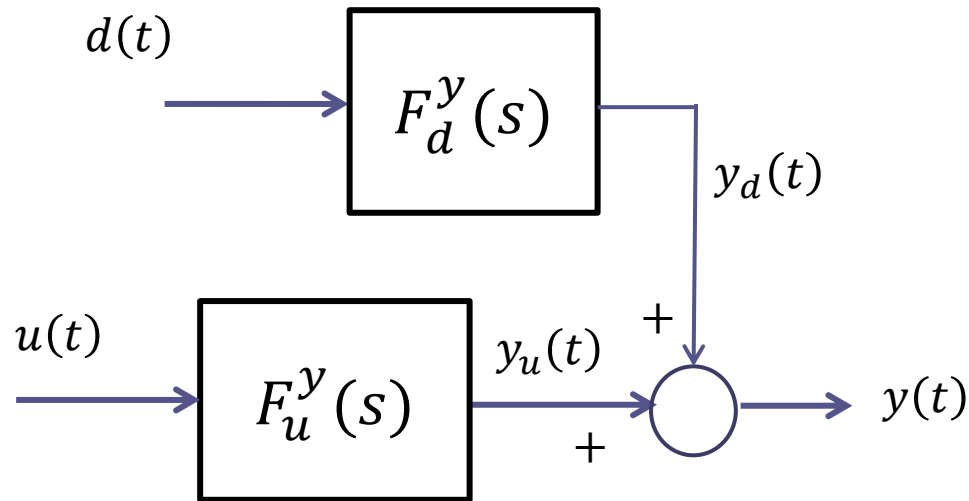
$$y_u(t) = y(t) \Big|_{d(t)=0}$$

$y_u(t)$  è l'uscita che si avrebbe in presenza del solo ingresso  $u(t)$ , cioè ponendo nella equazione  $d(t) = 0$

$$y_d(t) = y(t) \Big|_{u(t)=0}$$

$y_d(t)$  è l'uscita che si avrebbe in presenza del solo disturbo  $d(t)$ , cioè ponendo nella equazione  $u(t) = 0$

Si giunge quindi ad una rappresentazione in termini di schema a blocchi come la seguente



in cui le FdT «ingresso-uscita»  $F_u^y(s)$  e «disturbo-uscita»  $F_d^y(s)$  si determinano secondo le procedure già viste, rispettivamente azzerando nella equazione differenziale il disturbo e l'ingresso. Si ottiene:

$$F_u^y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad F_d^y(s) = \frac{\alpha_q s^q + \alpha_{q-1} s^{q-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

## Esempio Modello matematico del forno

$$C_f \dot{T}_f(t) + K_{ie} T_f(t) = q(t) + K_{ie} T_e(t)$$

$q(t)$  Ingresso manipolabile

$T_e(t)$  Disturbo

$T_f(t)$  Uscita

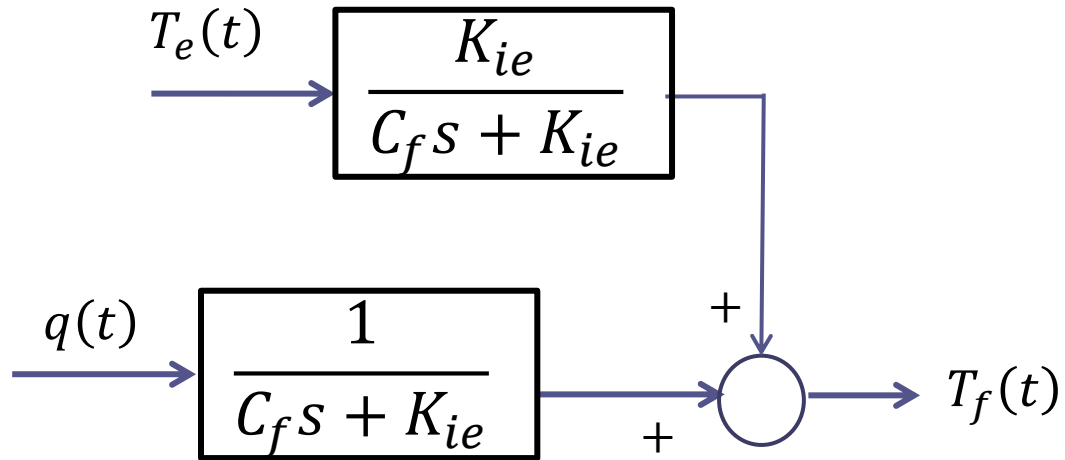
La funzione di trasferimento  $F_q^{T_f}(s)$  fra l'ingresso manipolabile e l'uscita la determiniamo azzerando il disturbo nella equazione differenziale, e procedendo come visto per le equazioni senza disturbo

$$C_f \dot{T}_f(t) + K_{ie} T_f(t) = q(t) \quad \Rightarrow \quad F_q^{T_f}(s) = \frac{1}{C_f s + K_{ie}}$$

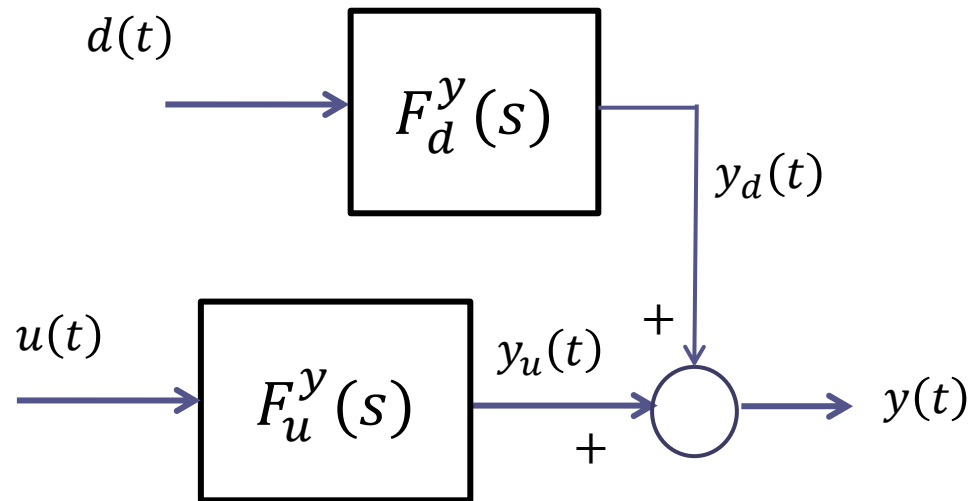
La funzione di trasferimento  $F_{T_e}^{T_f}(s)$  fra il disturbo e l'uscita la determiniamo invece azzerando l'ingresso manipolabile  $q(t)$  nella equazione differenziale

$$C_f \dot{T}_f(t) + K_{ie} T_f(t) = K_{ie} T_e(t) \quad \Rightarrow \quad F_{T_e}^{T_f}(s) = \frac{K_{ie}}{C_f s + K_{ie}}$$

Si giunge quindi al seguente schema a blocchi che rappresenta la dinamica del forno

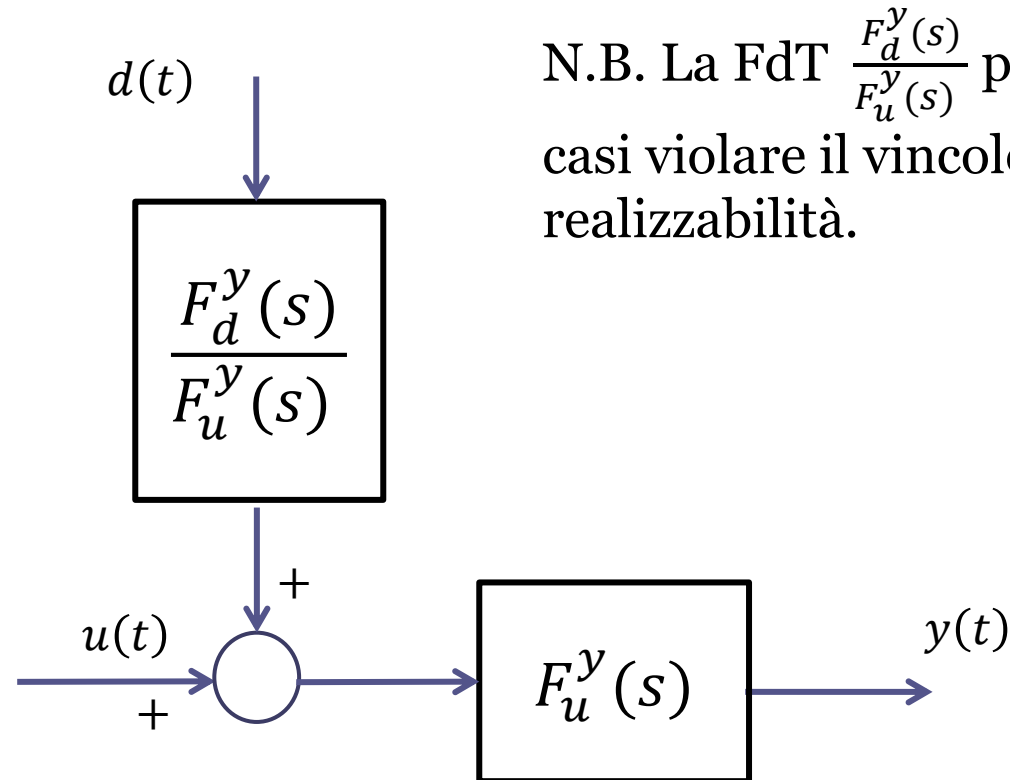


Risulta conveniente ai fini di alcune analisi che dovranno essere effettuate in seguito manipolare lo schema generale



in modo che il contributo del disturbo si sovrapponga direttamente all'ingresso manipolabile  $u(t)$

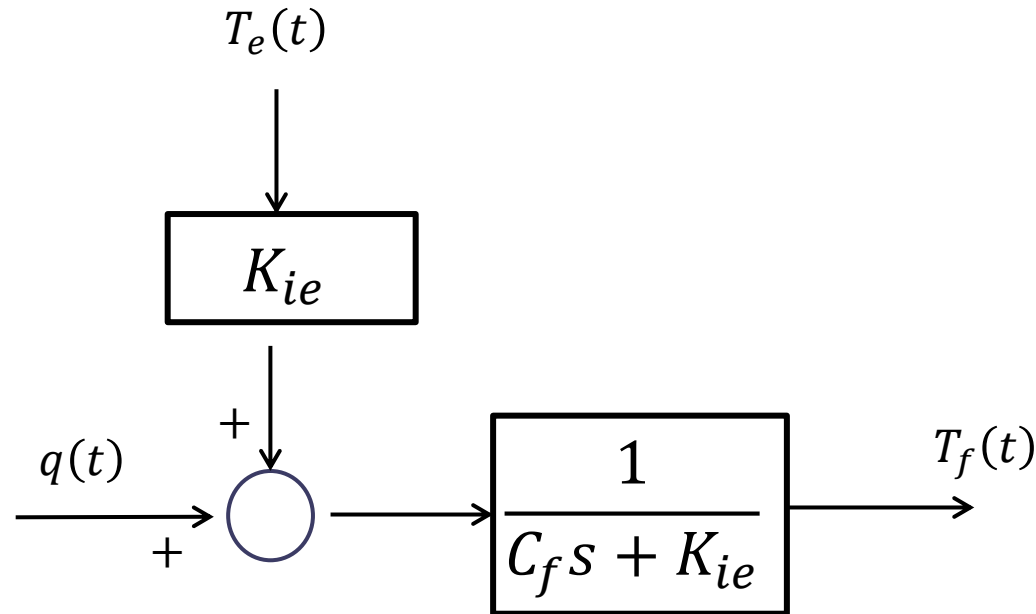
Il seguente schema risulta essere, ai fini del comportamento dell'uscita  $y(t)$ , completamente equivalente allo schema originale



N.B. La FdT  $\frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)}$  può in taluni casi violare il vincolo di fisica realizzabilità.

Non sono direttamente accessibili in questo schema i due contributi distinti  $y_u(t)$  ed  $y_d(t)$ , ma ciò non causa nessuna difficoltà.

Applicando tale modifica all'esempio del forno trattato poco in precedenza, si ottiene



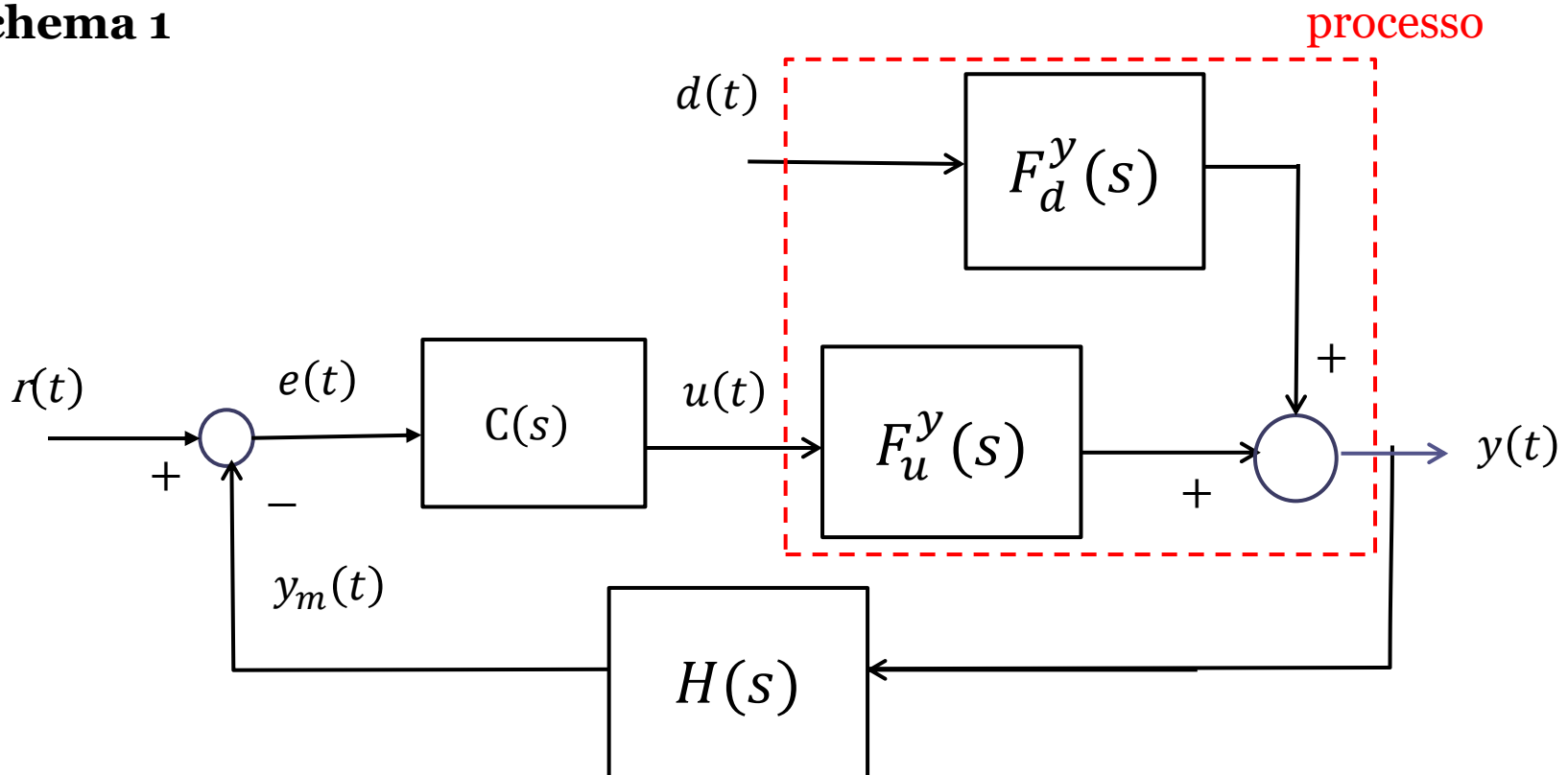
Il guadagno puro  $K_{ie}$  del blocco che riceve in ingresso il disturbo si ottiene attraverso il calcolo

$$\frac{F_{T_e}^{T_f}(s)}{F_q^{T_f}(s)} = \frac{\frac{K_{ie}}{C_f s + K_{ie}}}{\frac{1}{C_f s + K_{ie}}} = K_{ie}$$

## Sistemi di controllo in retroazione per processi affetti da un disturbo

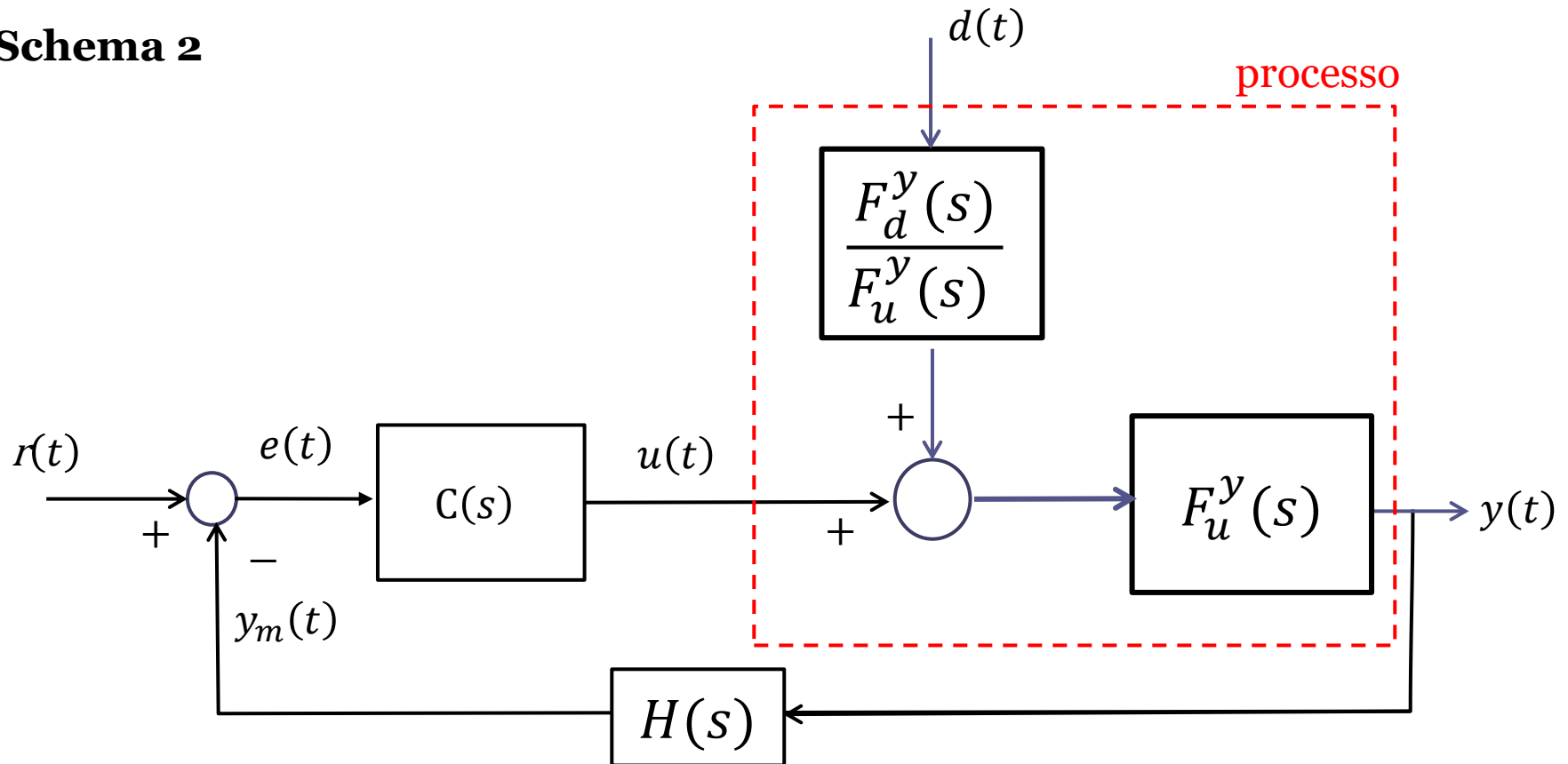
Sulla base di quanto visto fino ad ora, un sistema di controllo per un processo LTI affetto da un disturbo può essere rappresentato mediante uno dei seguenti schemi a blocchi equivalenti:

### Schema 1



# Sistemi di controllo in retroazione per processi affetti da un disturbo

## Schema 2



Per caratterizzare il comportamento della variabile di uscita nel sistema **in anello chiuso**, si può ancora fare riferimento al principio di sovrapposizione degli effetti, che vale per un qualunque sistema LTI

Con riferimento allo schema 2 riportato nella slide precedente l'evoluzione temporale del segnale di uscita  $y(t)$  è calcolabile come la somma di due contributi distinti

$$y(t) = y_r(t) + y_d(t)$$

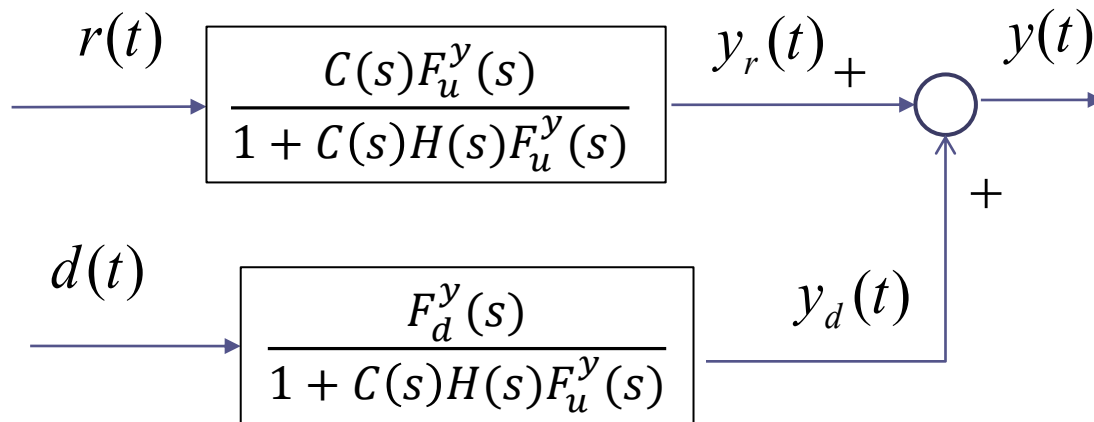
$$y_r(t) = y(t) \Big|_{d(t)=0}$$

$y_r(t)$  è l'uscita che si avrebbe in presenza del solo set-point  $r(t)$ , cioè ponendo nello schema  $d(t) = 0$

$$y_d(t) = y(t) \Big|_{r(t)=0}$$

$y_d(t)$  è l'uscita che si avrebbe in presenza del solo disturbo  $d(t)$ , cioè ponendo nello schema  $r(t) = 0$

Si giunge dopo alcuni passaggi alla seguente rappresentazione semplificata in termini di schema a blocchi del sistema retroazionato



Cosa vorremmo ottenere idealmente dal nostro sistema di controllo ?

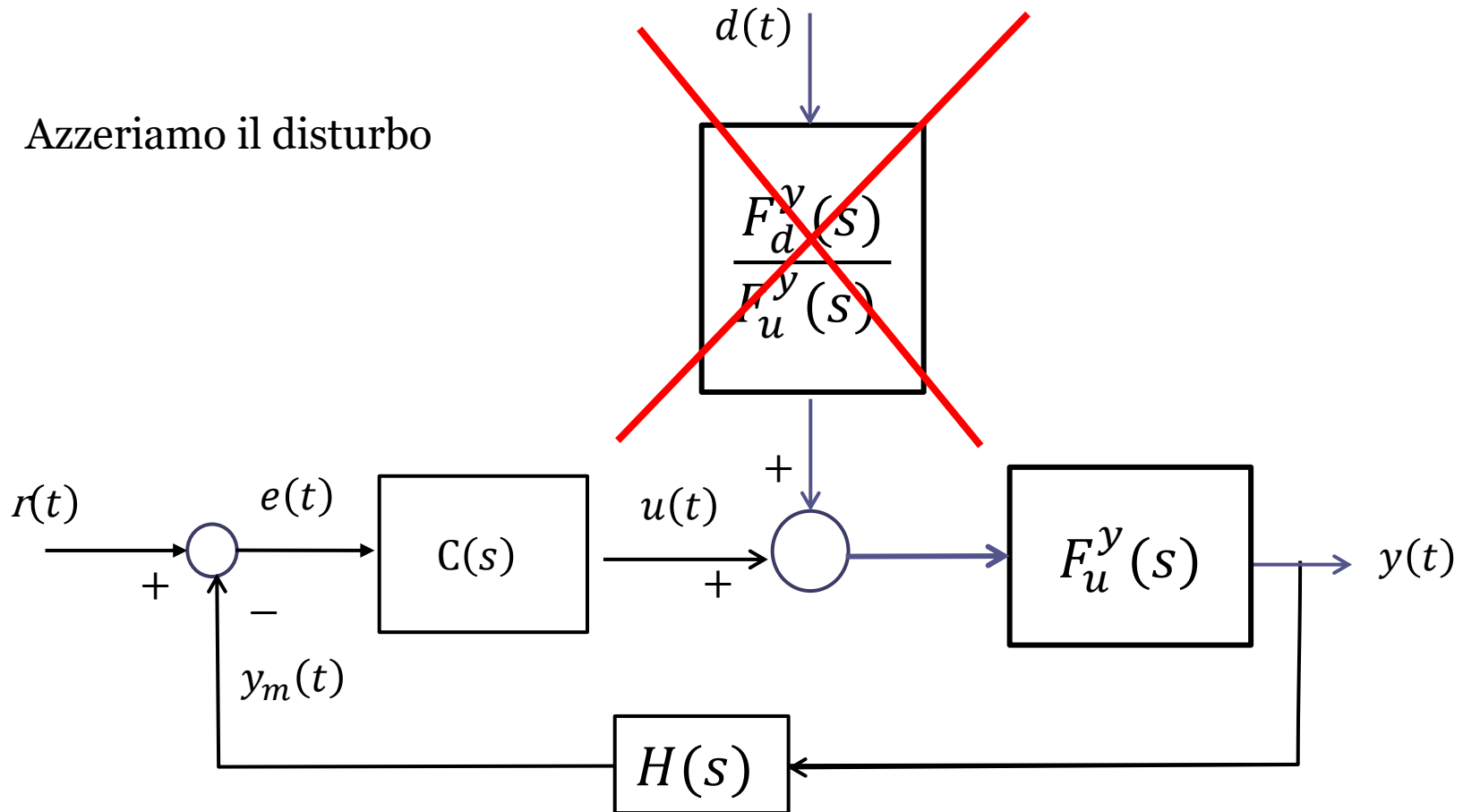
Le due FdT riportate nello schema sono rispettivamente la FdT **a ciclo chiuso** tra il set-point e l'uscita e la FdT **a ciclo chiuso** fra il disturbo e l'uscita.

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)F_u^y(s)}{1 + C(s)H(s)F_u^y(s)}$$

$$W_d^y(s) = \frac{F_d^y(s)}{1 + C(s)H(s)F_u^y(s)}$$

Calcolo di  $W_r^y(s)$

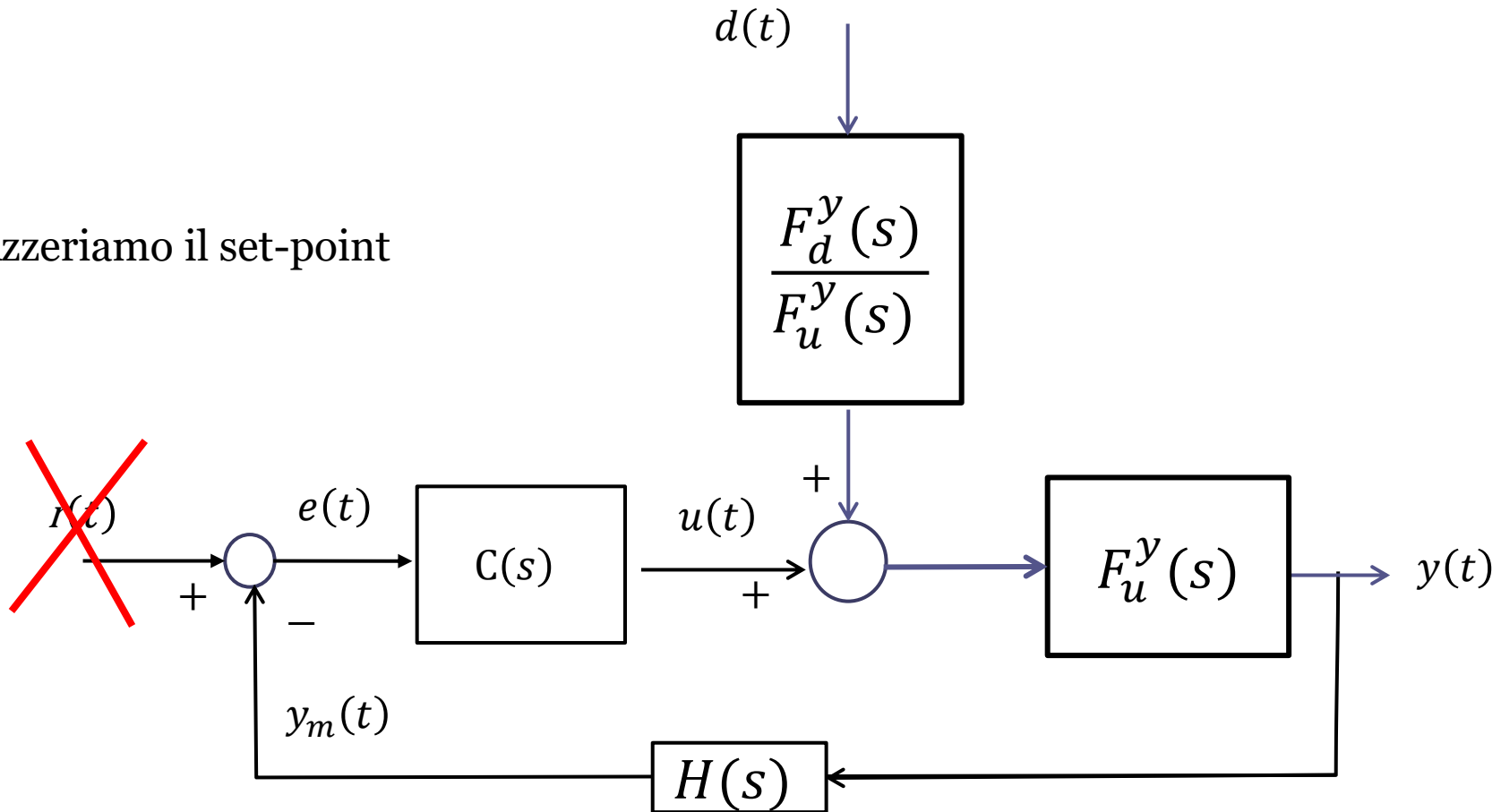
Azzeriamo il disturbo



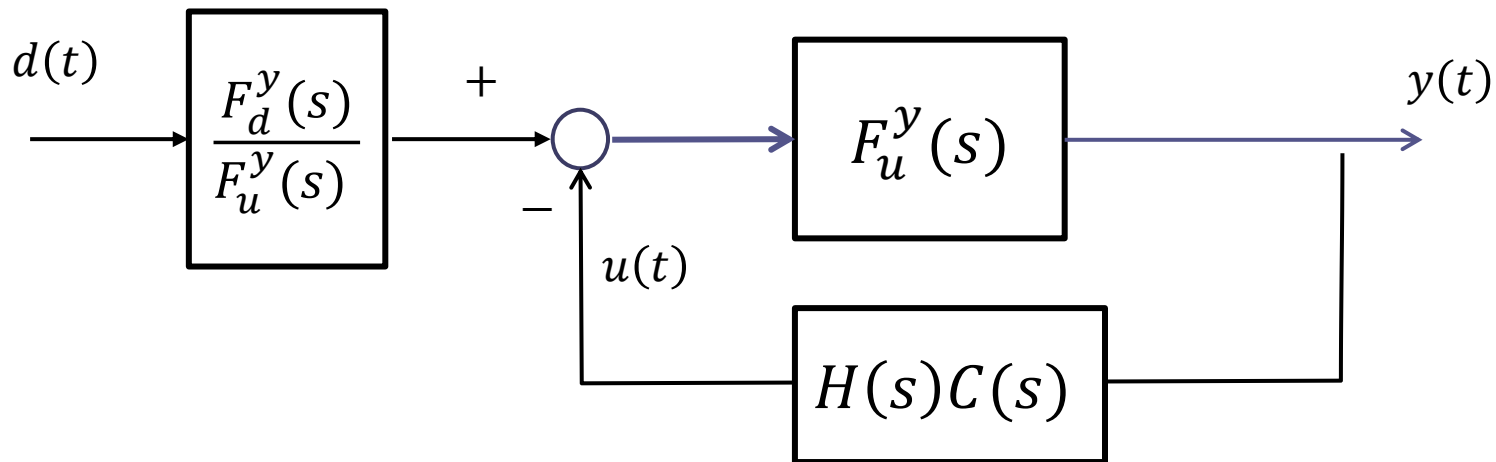
Ciò che rimane è lo schema standard serie-feedback con retroazione non unitaria, che sappiamo semplificare senza problemi.

Calcolo di  $W_d^y(s)$ 

Azzeriamo il set-point



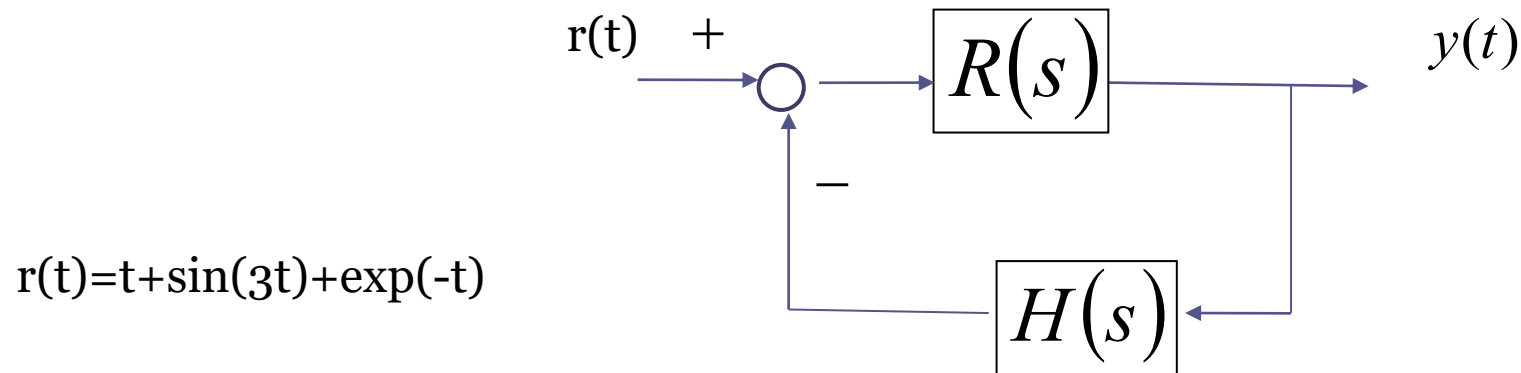
Schema equivalente a quello della slide precedente. I blocchi sono semplicemente disposti in modo differente affinché risulti più chiaro come comporli fra loro secondo le regole viste e calcolare la FdT fra il disturbo  $d(t)$  e l'uscita  $y(t)$



$$W_d^y(s) = \frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)} \cdot \frac{F_u^y(s)}{1 + C(s)H(s)F_u^y(s)} = \frac{F_d^y(s)}{1 + C(s)H(s)F_u^y(s)}$$

Il “**principio di sovrapposizione degli effetti**” ha anche una diversa conseguenza.

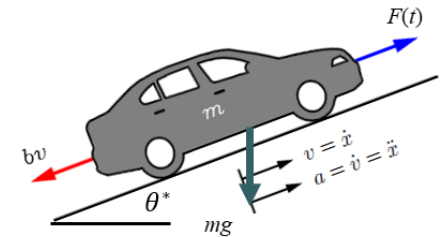
Consideriamo il sistema



Per determinare la risposta complessiva del sistema posso calcolare **separatamente** le risposte  $y(t)$  associate ai tre distinti set point  $r(t)=t$ ,  $r(t)=\sin(3t)$ ,  $r(t)=\exp(-t)$ , e poi sommarle tra loro

## Esempio – Cruise control

Riprendiamo l'esempio inerente il sistema di regolazione della velocità di avanzamento di un veicolo che transita su una carreggiata che forma un angolo  $\theta^*$  con il piano orizzontale (trattato nelle lezioni introduttive).



Con riferimento a tale esempio, introducemmo un particolare, e molto popolare, algoritmo di controllo (algoritmo «Proporzionale-Integrale», PI) e si affermò, senza alcun riscontro matematico, che tale legge di controllo era in grado di garantire la convergenza asintotica della velocità del veicolo verso il valore desiderato. Ora **dimostriamo** tale risultato.

L'equazione differenziale che modella il sistema in esame è la seguente

$$m\dot{v}(t) + bv(t) = F(t) + d(t) \qquad d(t) = -mg \sin(\theta^*)$$

**Ingresso manipolabile:** Spinta applicata  $F(t)$

**Uscita:** velocità del veicolo  $v(t)$

**Disturbo esterno:** il termine costante  $d(t) = -mg \sin(\theta^*)$  dovuto all'inclinazione della carreggiata ed al relativo contributo della forza peso

La funzione di trasferimento  $G_F^v(s)$  fra l'ingresso manipolabile  $F(t)$  e l'uscita  $v(t)$  la determiniamo azzerando il disturbo  $d(t)$  nella equazione differenziale, e procedendo come visto per le equazioni senza disturbo

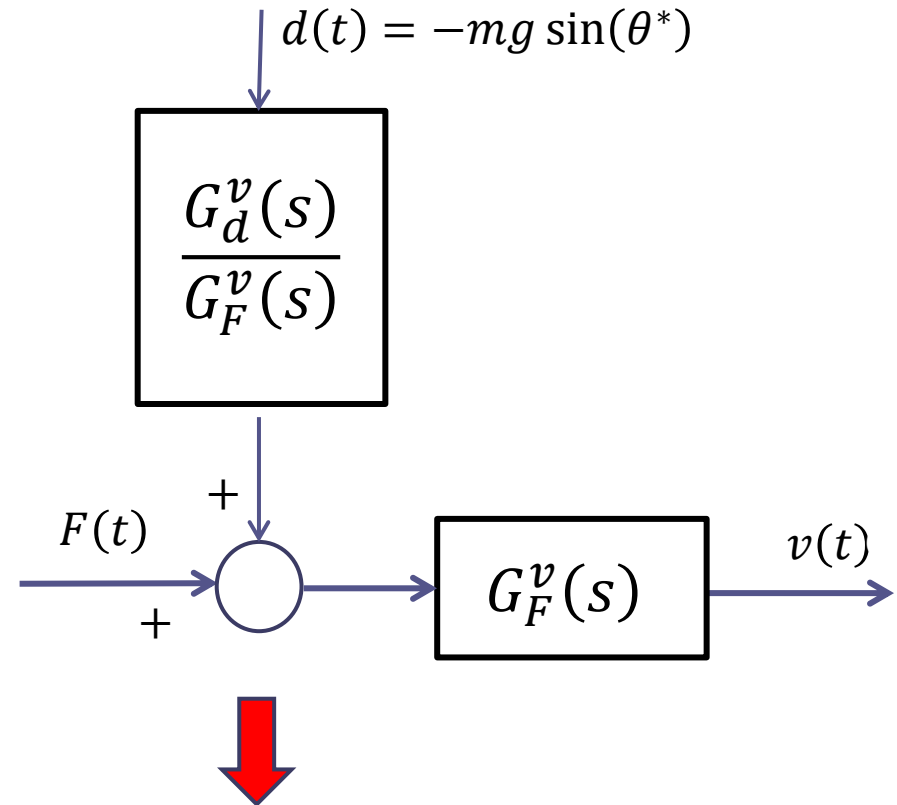
$$m\dot{v}(t) + bv(t) = F(t) \quad \longrightarrow \quad G_F^v(s) = \frac{1}{ms+b}$$

La funzione di trasferimento  $G_d^v(s)$  fra il disturbo e l'uscita la determiniamo invece azzerando l'ingresso manipolabile  $F(t)$  nella equazione differenziale

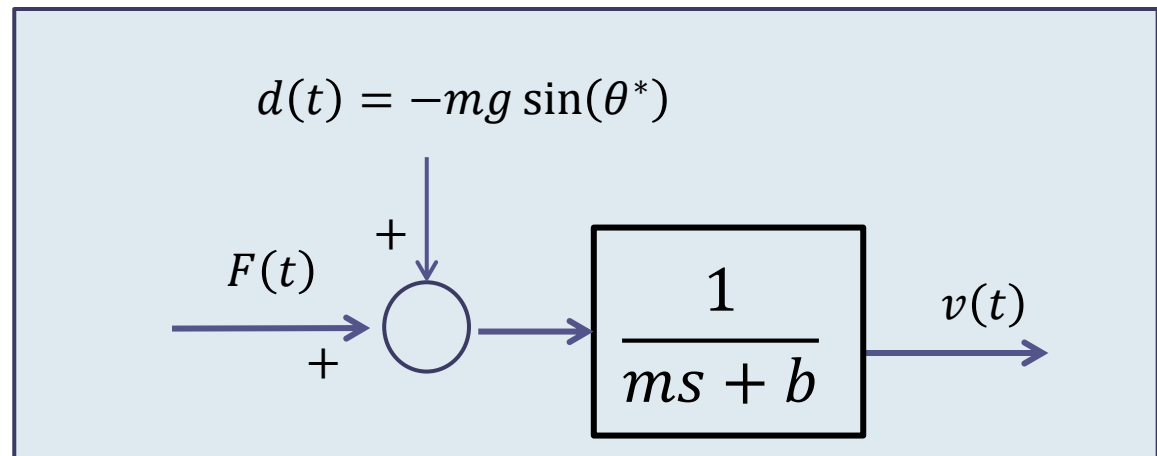
$$m\dot{v}(t) + bv(t) = d(t) \quad \longrightarrow \quad G_d^v(s) = \frac{1}{ms+b}$$

Le due FdT sono coincidenti. Ciò non deve stupirci perché la spinta  $F(t)$  ed il disturbo  $d(t)$  intervengono nella equazione differenziale del processo in maniera analoga.

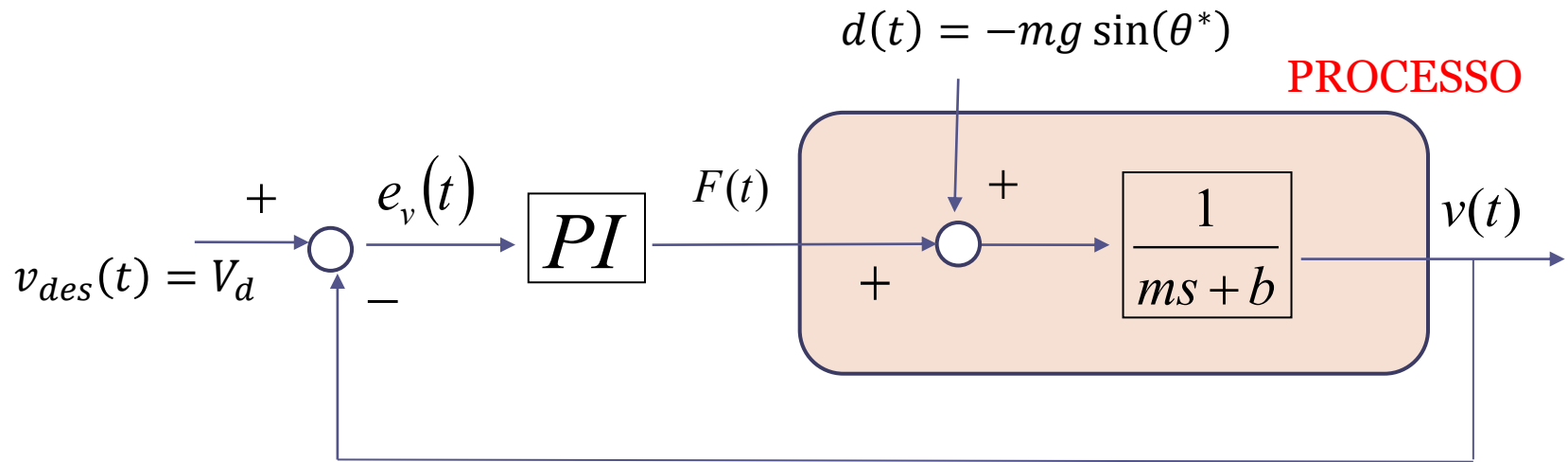
Lo schema a blocchi del processo è pertanto:



Sostituendo le espressioni delle due FdT (che sono identiche fra loro) si ottiene lo schema riportato sulla destra:



Schema a blocchi della dinamica del sistema a ciclo chiuso con il controllore PI



**Controllore PI**  
(Proporzionale-Integrale)

$$F(t) = k_p e_v(t) + k_i \int_0^t e_v(\tau) d\tau$$

Vogliamo dimostrare che qualunque sia la massa  $m$ , qualunque sia il coeff. di attrito  $b$ , qualunque sia l'inclinazione  $\theta^*$  della carreggiata, e comunque vada a scegliere i guadagni positivi  $K_p$  e  $K_i$ , in presenza di un set-point costante ( $v_{des}(t) = V_d$ ) **la velocità del veicolo tende asintoticamente al valore desiderato  $V_d$ .**

Il passo successivo è **caratterizzare il controllore PI attraverso la sua FdT**

$$G_{PI}(s) = \frac{F(s)}{E_v(s)}$$

**Legge di controllo:**  $F(t) = k_p e_v(t) + k_I \int_0^t e_v(\tau) d\tau$

### **Metodo analitico**

Trasformiamo con Laplace tutti i membri della legge di controllo, e applichiamo il teorema di integrazione per semplificare la TdL del termine integrale

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = k_p \mathcal{L}\{e_v(t)\} + k_I \mathcal{L}\left\{\int_0^t e_v(\tau) d\tau\right\} \quad \Rightarrow \quad F(s) = k_p E_v(s) + k_I \frac{E_v(s)}{s}$$

Manipoliamo ora la relazione ottenuta per ricavare il rapporto  $\frac{F(s)}{E_v(s)}$

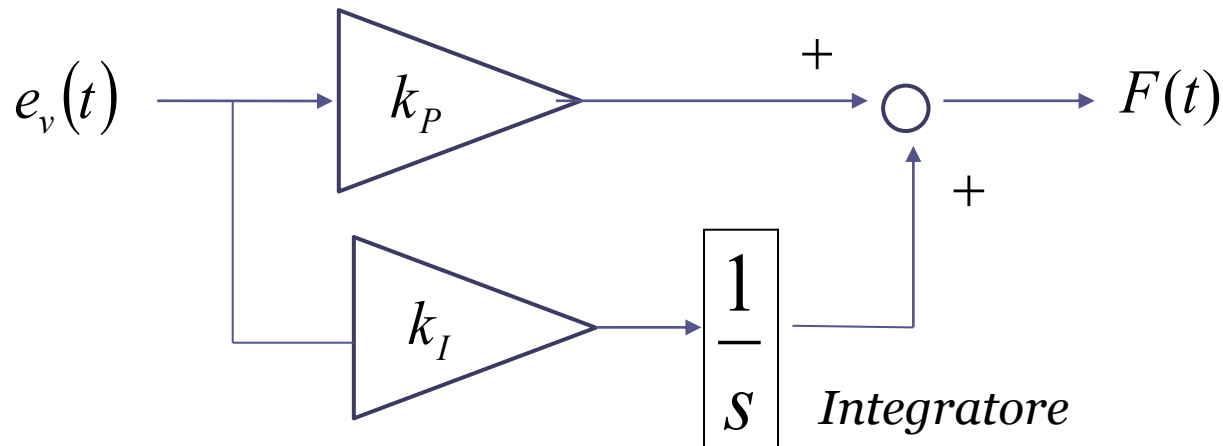
$$G_{PI}(s) = \frac{F(s)}{E_v(s)} = k_p + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p s + k_I}{s}$$

FdT del primo ordine, con un **polo nell'origine** ed uno zero reale collocato in  $s = -k_i/k_p$

**Legge di controllo:** 
$$F(t) = k_P e_v(t) + k_I \int_0^t e_v(\tau) d\tau$$

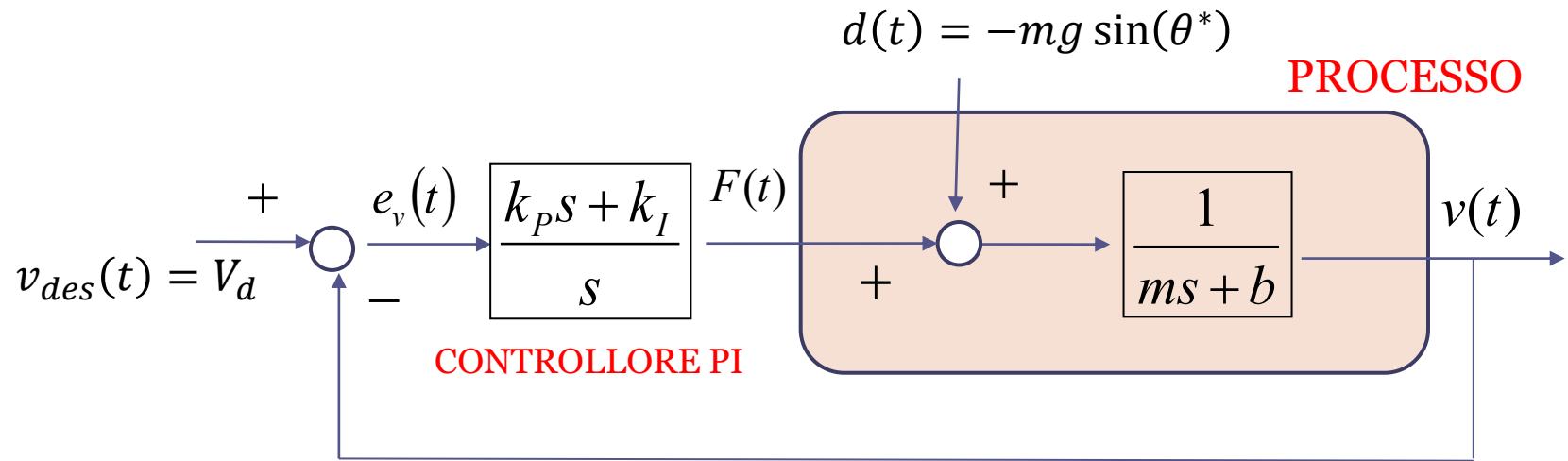
### **Metodo «grafico»**

Rappresentiamo la legge di controllo in forma grafica per mezzo di uno schema a blocchi contenente guadagni ed un blocco integratore, e componiamo quindi tale schema secondo le regole della algebra degli schemi a blocchi (composizione serie e parallelo)



$$G_{PI}(s) = \frac{F(s)}{E_v(s)} = k_P + \frac{k_I}{s} = \frac{k_P s + k_I}{s}$$

Schema a blocchi del sistema a ciclo chiuso con il controllore PI rappresentato dalla sua FdT:



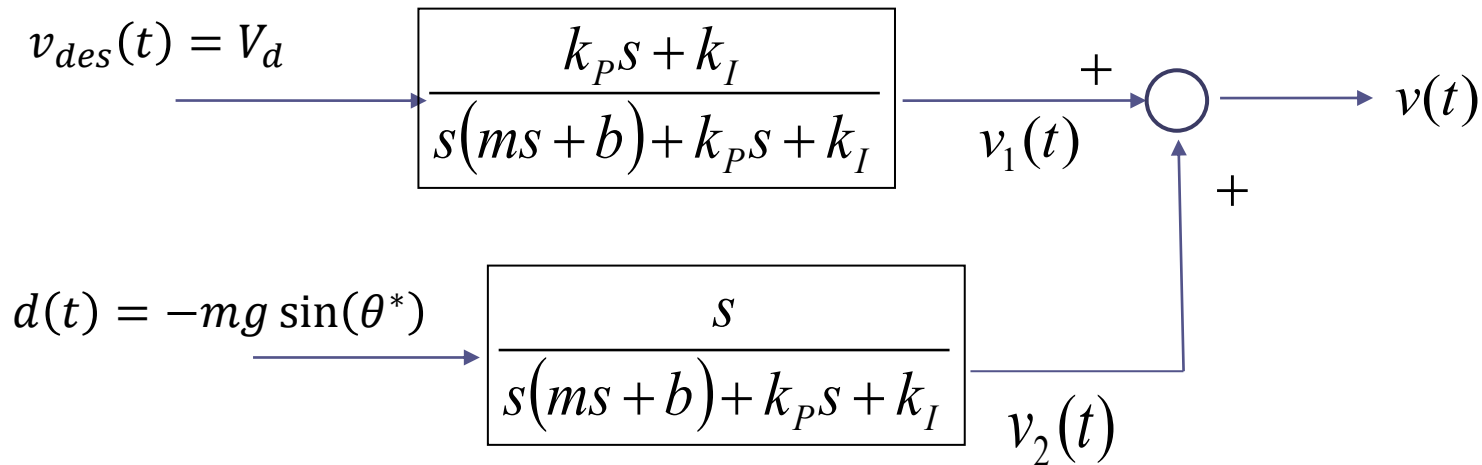
**Controllore PI  
(Proporzionale-Integrale)**

$$F(t) = k_p e_v(t) + k_i \int_0^t e_v(\tau) d\tau$$

Vogliamo dimostrare che  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = V_d \quad \forall m, b, K_p, K_i > 0$

Utilizziamo il teorema del valore finale, e per agevolarci nella determinazione della TdL  $V(s)$  della velocità semplifichiamo lo schema, come visto in precedenza, calcolando le FdT a ciclo chiuso ed applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

La velocità  $v(t)$  è la somma di due componenti.

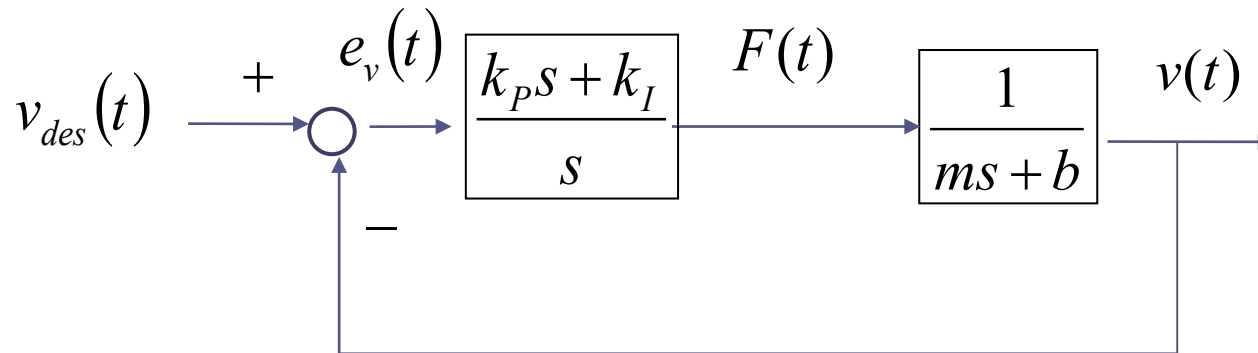


La prima componente  $v_1(t)$  è quella dovuta al set-point  $v_{des}(t)$ , che assume il valore costante  $V_d$ .

La FdT fra il set point e l'uscita si determina, come visto in precedenza, rimuovendo dallo schema a blocchi del sistema in retroazione il disturbo e calcolando la risultante FdT a ciclo chiuso. Lo schema, ed i relativi calcoli, sono illustrati nella slide successiva.

La seconda componente  $v_2(t)$  è quella dovuta al disturbo  $d(t)$ , che assume anch'esso un valore costante. La FdT fra il disturbo e l'uscita si determina rimuovendo dallo schema a blocchi il set point e calcolando la risultante FdT a ciclo chiuso. Lo schema, ed i relativi calcoli, sono illustrati fra due slides.

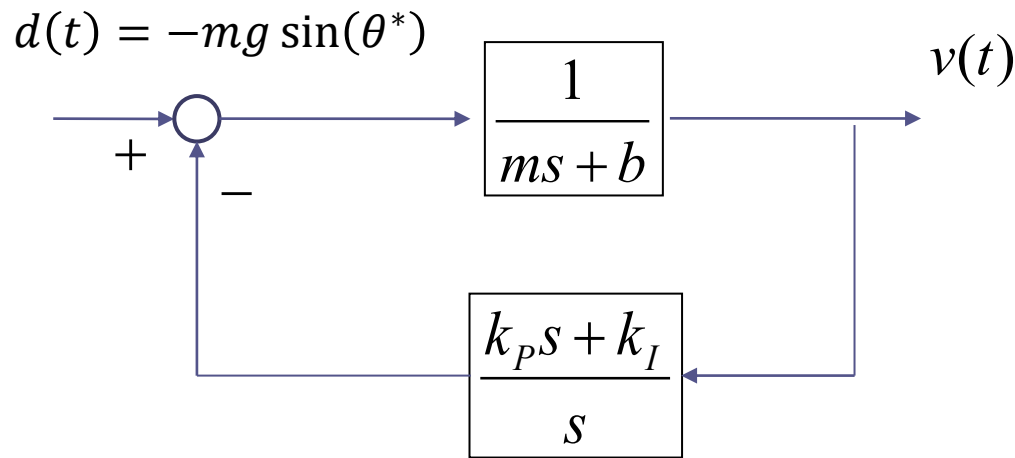
*Schema a blocchi senza il disturbo*



*FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita (semplificazione serie/feedback)*

$$W_{v_{des}}^v = \frac{V(s)}{V_{des}(s)} = \frac{\frac{k_p s + k_I}{s} \cdot \frac{1}{m s + b}}{1 + \frac{k_p s + k_I}{s} \cdot \frac{1}{m s + b}} = \frac{k_p s + k_I}{s(m s + b) + k_p s + k_I}$$

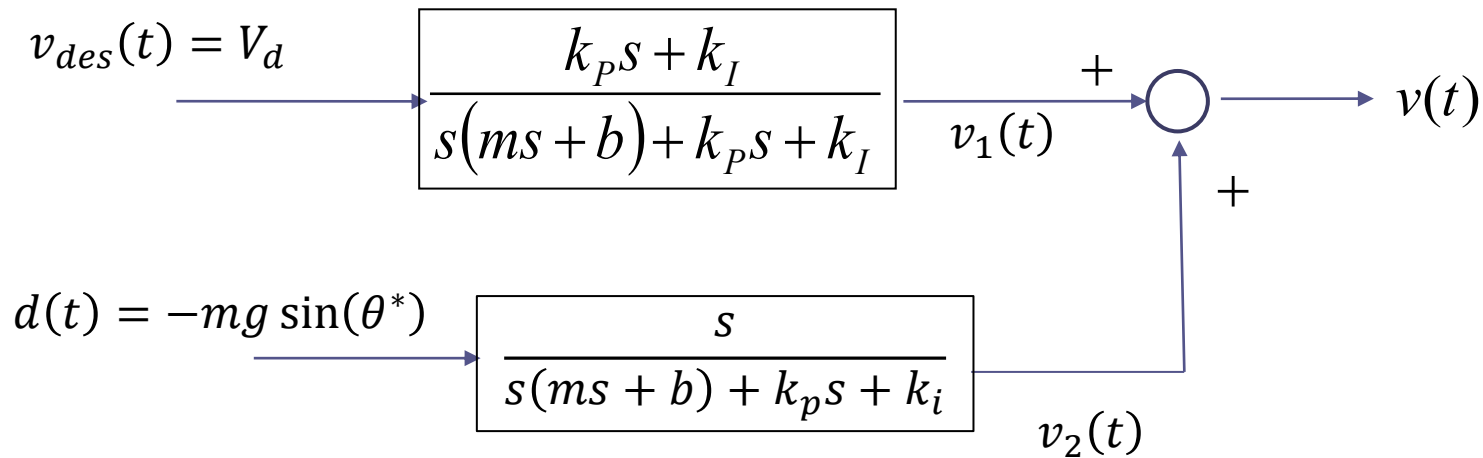
*Schema a blocchi senza il set point (riorganizzato per semplicità)*



*FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita (semplificazione feedback)*

$$W_d^v(s) = \frac{\frac{1}{ms + b}}{1 + \frac{1}{ms + b} \cdot \frac{k_p s + k_i}{s}} = \frac{s}{s(ms + b) + k_p s + k_i}$$

Ora applichiamo il teorema del valore finale per analizzare il comportamento a regime del sistema di controllo in corrispondenza dei valori costanti del set point e del disturbo.



Analizziamo separatamente le due aliquote  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ , iniziando dalla prima.

Dobbiamo determinarne la TdL  $V_1(s)$ , la cui espressione si ottiene moltiplicando la TdL del set point per la FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita:

$$v_{des}(t) = V_d \quad \longrightarrow \quad V_{des}(s) = \frac{V_d}{s}$$

$$V_1(s) = \frac{V_d}{s} \cdot \frac{k_p s + k_i}{s(m s + b) + k_p s + k_i}$$

***Un risultato che utilizzeremo da qui a breve***

### ***Regola di Cartesio***

Condizione ***necessaria e sufficiente*** affinché un polinomio di secondo grado

$$P(s) = as^2 + bs + c$$

ammetta tutte le radici a parte reale negativa è che tutti i coefficienti  $a, b, c$ , del polinomio abbiamo ***segno concorde***

$$V_1(s) = \frac{V_d}{s} \cdot \frac{k_p s + k_i}{s(ms + b) + k_p s + k_i} = \frac{V_d(k_p s + k_i)}{s(ms^2 + (b + k_p)s + k_i)}$$

La TdL  $V_1(s)$  ha un polo nell'origine ed una ulteriore coppia di poli, che sono le radici del polinomio  $ms^2 + (b + k_p)s + k_i$ . Come mostrato poc'anzi, un polinomio di secondo grado con tutti i coefficienti positivi possiede tutte le radici a parte reale negativa. E' quindi soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente che garantisce che il segnale  $v_1(t)$  ammette un limite finito per  $t \rightarrow \infty$ , e tale valore è calcolabile attraverso il limite associato al teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = [sV_1(s)]_{s=0} = \left[ \frac{V_d(k_p s + k_i)}{ms^2 + (b + k_p)s + k_i} \right]_{s=0} = V_d$$

Alla luce di questo risultato, poiché  $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ , dobbiamo dimostrare che  $v_2(t)$ , la componente della velocità causata dal disturbo, tende asintoticamente a zero

Richiamiamo un risultato presentato quando parliamo delle proprietà della TdL:

Un segnale canonico  $x(t)$  tende a zero per  $t \rightarrow \infty$  se e solo se la sua TdL  $X(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa.

E' sufficiente verificare che la TdL  $V_2(s)$  di  $v_2(t)$  possiede tutti i poli a parte reale negativa.  $V_2(s)$  si ottiene moltiplicando la **TdL del disturbo** per la **FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita**:

$$\begin{aligned} V_2(s) &= -\frac{mg \sin(\theta^*)}{s} \cdot \frac{s}{s(ms + b) + k_p s + k_i} = -\frac{mg \sin(\theta^*)}{s(ms + b) + k_p s + k_i} \\ &= -\frac{mg \sin(\theta^*)}{ms^2 + (b + k_p)s + k_i} \end{aligned}$$

I poli di  $V_2(s)$  hanno entrambi parte reale negativa, quindi  $v_2(t)$  tende asintoticamente a zero. Abbiamo quindi mostrato che qualunque valore positivo dei guadagni  $k_p$  e  $k_i$  del controllore PI garantisce che la velocità del veicolo converge asintoticamente verso il valore desiderato  $V_d$ .

## Simulazione dinamica

$$m = 1000 \text{ kg}$$

$$Kp = 1000$$

$$b = 50 \text{ N m}^{-1}\text{s}$$

$$Ki = 250$$

$$\theta^* = 10^\circ$$

