L'epistemologia della geometria da Wolff a Kant

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2023-24

Christian Wolff (1679-1754)

Wolff: logica e matematica (1)

- Durante gli anni della formazione universitaria Wolff, influenzato da Tschirnhaus, ritiene che i sillogismi siano utili per la sistematizzazione di verità già scoperte, ma inadeguati per l'*ars inveniendi* necessaria alla creazione matematica.
- L'impatto della corrispondenza epistolare con Leibniz, tuttavia, provoca un mutamento di opinione.
- Arriva a ritenere che la teoria aristotelico-scolastica del sillogismo categorico sia sufficiente a formalizzare le inferenze contenute in *tutte* le dimostrazioni matematiche.

Wolff: logica e matematica (2)

La prova (probatio) di una proposizione è un sillogismo o una serie di sillogismi tra loro concatenati [...] In particolare, una prova è una dimostrazione (demonstratio) se in tale concatenazione di sillogismi non usiamo come premesse nient'altro che definizioni, esperienze indubitabili, assiomi e proposizioni già dimostrate (Philosophia rationalis sive logica, II, §§ 496-498).

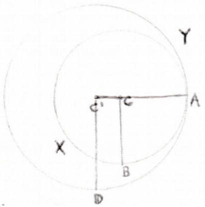
La strategia riduzionistica di Wolff (1)

1. Mostra (per esempi) che le dimostrazioni matematiche sono riducibili a successioni finite di enunciati ognuno dei quali è una definizione, un assioma, un teorema già dimostrato o è ottenibile da enunciati precedenti nella successione mediante un sillogismo (categorico, ipotetico o disgiuntivo) o di un'inferenza a una singola premessa.
2. Riduce i sillogismi ipotetici e disgiuntivi e le inferenze a una singola premessa a sillogismi categorici.

Ci concentreremo sul passo 1. Tutti gli esempi analizzati da Wolff appartengono alla geometria euclidea elementare, anche se Wolff conosceva bene i recenti sviluppi dell'algebra e del calcolo infinitesimale.

La strategia riduzionistica di Wolff (2)

TEOREMA. Due circonferenze internamente tangenti non sono concentri-
che (Logica, II, § 553).



La strategia riduzionistica di Wolff (3)

(1)* Il centro di X è uguale al centro di Y, ossia C = C'	[ASSUNZIONE]
(2) CA e CB sono raggi di una stessa circonferenza (X)	[GIUDIZIO INTUITIVO]
(3) Tutti i raggi di una stessa circonferenza sono uguali tra loro	[ASSIOMA]
(4) CA e CB sono uguali tra loro	[SILLOGISMO IN BARBARA, DA (2) E (3)]
(5)* C'A = CA e C'D = CD sono raggi di una stessa circonferenza (Y)	[GIUDIZIO INTUITIVO]
(6)* CA e CD sono uguali tra loro	[SILLOGISMO IN BARBARA, DA (3) e (5)]
(7)* CB e CD sono uguali a una terza cosa	[CONGIUNZIONE DI (4) E (6)]
(8) Cose uguali a una terza sono uguali tra loro	[ASSIOMA]
(9)* CB e CD sono uguali tra loro	[SILLOGISMO IN BARBARA, DA (7) E (8)]
(10) CB è parte di CD	[GIUDIZIO INTUITIVO]
(11) Se qualcosa è uguale a qualcos' altro, non è sua parte	[ASSIOMA]
(12)* CB non è parte di CD	[SILLOGISMO IN BARBARA, DA (9) E (11)]
(13)* CB è parte e non è parte di CD	[CONGIUNZIONE DI (10) E (12)]

CONTRADDIZIONE.

Problemi della strategia wolffiana

1. Wolff tratta i concetti relazionali come predicati monadici, per applicare il sillogismo in Barbara; ma al passo 7., usa senza esplicitarla una proprietà relazionale del concetto di uguaglianza (la simmetria).
2. Al passo 7., usa implicitamente la legge non sillogistica del *Dictum de nullo*.
3. Al passo 5., non viene giustificato il passaggio dallla coincidenza di C e C' all'uguaglianza di CA e $C'A$ e CD e $C'D$.
4. I "giudizi intuitivi" non sono né definizioni, né assiomi, né teoremi già dimostrati, né conclusioni di inferenze sillogistiche.

Strategia wolffiana e modello euclideo

Perché Wolff non menziona i giudizi intuitivi nella sua definizione di dimostrazione, né li annovera tra i suoi *principia demonstrandi* (§ 562), e sembra considerarli non pertinenti e quasi estranei alla dimostrazione?
La risposta potrebbe venirci dal modello euclideo: tali principi appartengono al momento costruttivo della *ékthesis* e della *kataskeué*, non al momento più strettamente dimostrativo della *apódeixis*. Se così, la tesi wolffiana di completezza della sillogistica rispetto alle dimostrazioni geometriche appare fortemente ridimensionata: riguarda solo il segmento della *apódeixis*, non la dimostrazione nel suo complesso.
Wolff, infatti, parla di una *praeparatio* che precede la dimostrazione, condotta secondo le regole non della logica ma dell'*ars inveniendi*, che comprende "quegli artifici mediante cui una proposizione viene resa dimostrabile da principi a noi noti".

Immanuel Kant (1724-1804)

La geometria come sintetica a priori (1)

I giudizi matematici sono sempre sintetici. Sino ad oggi questo fatto, per quanto incontestabilmente vero e molto importante per le sue conseguenze, sembra essere sfuggito agli analisti della mente umana [...] Poiché si è visto che le conclusioni matematiche procedono secondo il principio di contraddizione (il che è richiesto dalla natura di ogni certezza apodittica), ci si è convinti che anche i principi fondamentali di questa scienza siano riconosciuti e ammessi nello stesso modo [...] Ma la nozione è fallace; un giudizio sintetico può essere accettato mediante il principio di contraddizione, ma solo quando è preceduto e dedotto da un altro giudizio sintetico.

I giudizi della matematica sono sempre giudizi a priori, e non empirici, poiché portano con sé il concetto della necessità, che non può essere dato dall'esperienza. (Critica della ragion pura, Introduzione, B14-15.)

La geometria come sintetica a priori (2)

Neanche i principi della geometria pura sono analitici. "La linea più breve tra due punti è la retta" è un giudizio sintetico, perché la mia concezione di retta non contiene alcuna nozione di quantità, ma è meramente qualitativa. Non c'è alcun processo di analisi che consente di estrarre il concetto di più breve dal nostro concetto di linea retta. L'intuizione deve prestare il suo aiuto, e solo così una sintesi sarà possibile. [...]

Alcuni principi presupposti dai geometri sono in realtà analitici [...] Tuttavia, fungono da proposizioni identiche, come anelli nella catena del metodo, non come principi: per esempio, $a = a$, il tutto è uguale a sé, o $a + b > a$, il tutto è maggiore della parte. E tuttavia, anche questi stessi principi, per quanto derivino la loro validità dai concetti puri, sono ammessi in matematica solo nella misura in cui possono essere presentati nell'intuizione. (Critica della ragion pura, Introduzione, B16-17.)

Esposizione metafisica dello spazio

1. *Lo spazio non è un concetto derivato dall'esperienza esterna*: le relazioni spaziali che percepiamo nell'esperienza sono rappresentabili solo grazie a un'idea antecedente di spazio.
2. *Lo spazio è un'idea necessaria e a priori, che serve da fondamento di tutte le intuizioni esterne*: non possiamo formarci alcuna rappresentazione di oggetti che non siano in uno spazio, mentre è agevole immaginarci uno spazio privo di oggetti.
3. *Lo spazio non è un concetto generale e discorsivo delle relazioni tra le cose, ma un'intuizione pura*: lo spazio contiene le relazioni tra le sue parti, ma non si esaurisce in esse, poiché le parti possono essere pensate solo come in esso esistenti.
4. *Lo spazio è rappresentato come una quantità infinita*.

Esposizione trascendentale dello spazio

Com'è possibile la geometria come scienza sintetica a priori? Deve fondarsi su un'intuizione, perché sulla base dei soli concetti non si può produrre conoscenza sintetica. Ma tale intuizione dev'essere antecedente alla percezione degli oggetti, o questa non sarebbe possibile. Dev'essere quindi un'intuizione pura, non empirica.

> *Ora, come può un'intuizione antecedente agli oggetti stessi [...] esistere nella mente umana? In nessun modo, se non nella misura in cui ha la propria sede nel soggetto stesso, come la sua capacità formale di essere modificato dagli oggetti e quindi di formarsi una rappresentazione immediata o intuizione; ovvero, solo come la forma del senso esterno in generale.*
>
> *Quindi è solo per mezzo della nostra spiegazione che diviene comprensibile la possibilità della geometria come scienza sintetica a priori. (Critica della ragion pura, Estetica trascendentale, B41.)*

La dottrina del metodo (1)

Nella Dialettica trascendentale (B376), Kant definisce un'intuizione come una rappresentazione singolare e immediata di un oggetto, mentre i concetti hanno un riferimento generale e mediato.

> *La conoscenza filosofica è la conoscenza della ragione per mezzo di concetti; la conoscenza matematica è conoscenza per mezzo della costruzione di concetti. La costruzione di un concetto è la presentazione a priori dell'intuizione che corrisponde al concetto. Per questo scopo è richiesta un'intuizione non empirica, la quale, in quanto intuizione, è un oggetto individuale; mentre, in quanto costruzione di un concetto (idea generale), dev'essere vista come universalmente valida per tutte le possibili intuizioni che cadono sotto quel concetto. (Critica della ragion pura, Dottrina del metodo, B741.)*

La dottrina del metodo (2)

Così, io costruisco un triangolo presentando l'oggetto che corrisponde a questo concetto, o per mera immaginazione, nell'intuizione pura, o su carta, nell'intuizione empirica; in entrambi i casi, completamente a priori, senza prendere in prestito la figura dall'esperienza. La particulare figura disegnata è empirica, ma serve a indicare il concetto anche nella sua universalità, perché in questa intuizione empirica badiamo solo all'atto della costruzione del concetto, non ai vari modi per determinarla, come le sue dimensioni, la lunghezza dei lati, la misura degli angoli, cose che non modificano in alcun modo il carattere essenziale del concetto (ibid.)

La dottrina del metodo (3)

La differenza essenziale tra questi due modi di conoscenza consiste perciò nella sua qualità formale; non riguarda una differenza nella materia o nell'oggetto. Quei pensatori che cercano di distinguere la filosofia dalla matematica dicendo che la prima riguarda la qualità e la seconda la quantità sbagliano l'effetto con la causa. La conoscenza matematica può riferirsi solo alla quantità a causa della sua forma: solo le nozioni quantitative sono suscettibili di venire costruite, ovvero presentate a priori nell'intuizione, mentre le qualità possono essere date solo nell'intuizione empirica. [...] Possiamo formarci un'intuizione di un cono attraverso il mero concetto, senza l'aiuto dell'esperienza; ma il colore del cono lo possiamo conoscere solo mediante l'esperienza (ibid.)

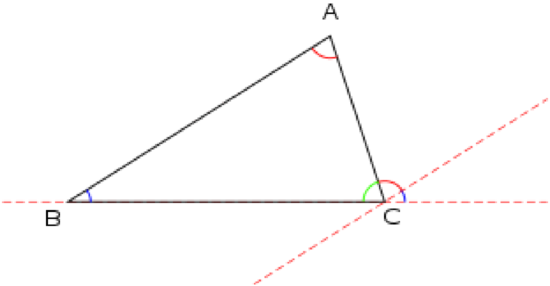
La dottrina del metodo (4)

Date a un filosofo il concetto di un triangolo e chiedetegli di scoprire, attraverso il metodo filosofico, che relazione c'è tra la somma dei suoi angoli e un angolo retto. Questi non avrà dinanzi a sé niente se non il concetto di una figura racchiusa da tre segmenti, e di consequenza con tre angoli. Potrà analizzare quanto vorrà i concetti di segmento, di angolo o del numero tre, ma non scoprirà alcuna proprietà che non sia già contenuta in questi concetti (Critica della ragion pura, Dottrina del metodo, B744.)

La dottrina del metodo (5)

Ma, se la questione viene posta a un geometra, questi immediatamente costruirà un triangolo. Sa che la somma di angoli adiacenti è uguale a due angoli retti; quindi, produrrà un lato di questo triangolo, formando due angoli adiacenti nel complesso pari a due retti. Poi dividerà l'angolo esterno tracciando una linea parallela al lato opposto del triangolo, e percepirà immediatamente che avrà un angolo adiacente esterno uguale a quello interno. Procedendo così, attraverso una catena di inferenze, e sempre basandosi sull'intuiione, arriverà a una soluzione del problema chiara e universalmente valida (ibid.)

La dottrina del metodo (6)



Assiomi e dimostrazioni

- Gli assiomi matematici sono principi sintetici a priori immediatamente certi, autoevidenti.
- Le dimostrazioni matematiche sono prove apodittiche basate sull'intuizione.

Kant: il modello euclideo

- In Kant, il modello di riferimento per quanto riguarda il metodo assiomatico è senz'altro quello euclideo.
- La distinzione tra *ékthesis* e *apódeixis* fornisce a Kant un potente strumento di analisi delle dimostrazioni matematiche, che gli consente di separare chiaramente l'aspetto contenutistico-intuitivo e quello logico-formale.
- Quando Kant afferma che una certa proposizione, ad es. $7 + 5 = 12$, è "indimostrabile" (B204-205), si riferisce al momento dell'*apódeixis*: una volta eseguita la costruzione corrispondente all'operazione di somma, l'*apódeixis* si riduce a una mera constatazione di identità, in un certo senso si dissolve.
- Kant, quando dà esempi di giudizi analitici in geometria, cita sempre nozioni comuni, mentre quando esemplifica il concetto di costruzione, si riferisce a postulati o teoremi del sistema di Euclide.

Kant e Wolff: un dissidio reale?

Quando Wolff asserisce che le dimostrazioni geometriche possono essere ricondotte alla teoria del sillogismo categorico, e quindi sono analitiche, si riferisce al momento dell'*apódeixis*. Kant, invece, qualificando la geometria come sintetica, considera la dimostrazione nel suo complesso.

Questioni esegetiche

Shabel: un'intuizione pura non è che un'intuizione empirica (una figura disegnata) in grado di conferire universalità e necessità alle dimostrazioni geometriche quando queste non dipendono da proprietà metriche.
Mandels: le intuizioni sono diagrammi. Infatti hanno un carattere particolare e sono collegate agli enunciati generali attraverso un processo di schematizzazione. L'intuizione geometrica è necessaria e a priori perché gli enunciati basati su diagrammi sono stabili rispetto alle distorsioni delle figure, quindi indipendenti da ogni particolare realizzazione empirica.
Friedman: l'interpretazione diagrammatica non spiega perché lo spazio fisico acquisisca la sua struttura matematica oggettiva.