

Prova scritta di Analisi Matematica I V.O.

15/09/2010

- 1) Data la funzione $f(x) = \sqrt{2x+3} - x$
 - a) disegnare il grafico illustrando i passaggi fondamentali.
 - b) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle e se possibile applicarlo a $f(x)$ nell'intervallo $[-1,3]$
- 2) Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$.
- 3) Definizione di integrale improprio o generalizzato in $[a, +\infty]$. Utilizzandola dire se $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[e, +\infty]$.
- 4) Formula di Taylor e di Mac-Laurin. Calcolare il seguente limite utilizzando gli sviluppi di Mac-Laurin
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x \ln(1 + 2x^2)}$$
.
- 5) Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^2 - x$, l'asse x e la retta di equazione $x=2$. (Si consiglia di disegnare il dominio di integrazione).

**Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (N.O.) 2 ore
15/09/2010**

- 1) Data la funzione $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x}$ disegnare il grafico illustrando i passaggi fondamentali.
- 2) Definizione di massimo e di minimo relativo per una funzione $f(x)$. Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.
- 3) Definizione di serie numerica convergente e serie numerica convergente assolutamente e illustrare con un esempio il legame tra convergenza ordinaria e convergenza assoluta. Dire inoltre se la seguente serie converge $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$.
- 4) Data la funzione $g(x) = e^{-|x-1|}$ calcolare e classificare i punti di non derivabilità e quelli con $g'(x) = 0$.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (N.O.) 2 ore

13/01/2011

- 1) Data la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$, disegnare il grafico illustrando i passaggi fondamentali.
- 2) Definizione di derivata prima in un punto x_0 e suo significato geometrico. Utilizzando tale definizione calcolare la derivata di $f(x) = e^{-3x}$ nel punto $x=1$.
- 3) Serie geometrica e sua convergenza. Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ e se possibile calcolarne la somma.
- 4) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle. Dire se è applicabile alla funzione $h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ nell'intervallo $[-1,1]$ e in caso affermativo calcolare il punto in questione.

Prova scritta di Analisi Matematica I (N.O.) 2 ore (A)

21/02/2011

- 1) Data la funzione $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^3}$
 - a) determinare il campo di esistenza e il comportamento ai suoi estremi,
 - b) studiare la derivata prima e determinare i punti di massimo e minimo,
 - c) studiare la convessità e determinare i punti di flesso,
 - d) tracciare il grafico.
- 2) Definizione di massimo e minimo assoluti. Condizioni sufficienti per la loro esistenza. Dire se $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ha massimo e minimo in $[-1,1]$.
- 3) Serie numeriche: definizione di serie convergente, divergente e indeterminata. Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (x - \sqrt{2})^n$.
- 4) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle. Data la funzione $f(x) = (x-3)^2(x-2)$ dire se è applicabile in $[2,3]$ e in caso affermativo calcolare "c".

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (N.O.) 2 ore (B)

21/02/2011

- 1) Data la funzione $f(x) = \log\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$,
 - a) determinare il campo di esistenza e il comportamento agli estremi,
 - b) trovare gli eventuali punti a tangente orizzontale,
 - c) disegnare il grafico.
- 2) Enunciare il Teorema della formula di Taylor. Scrivere l'espressione del Resto nelle forme di Lagrange e Peano. Approssimare il numero "e" dopo aver scritto la formula di Mac-Laurin con il resto di ordine 3.

- 3) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per la convergenza di una serie numerica.

Utilizzandolo studiare la convergenza della seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \cos \frac{1}{n}}{n^2 + 1}$.

- 4) Definizione di funzione continua in un punto. Trovare il valore di $b \in \mathfrak{R}$ affinché la

$$\text{funzione } f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{e^{2x} - 1}{x} & x > 0 \\ x + b & x \leq 0 \end{cases},$$

Prova scritta di Analisi Matematica I (N.O.) 2 ore

21/02/2011

- 1) Definizione di funzione derivabile in un punto. Data la funzione $\begin{cases} 2 + \ln(x+1) & x \geq 0 \\ ax + 2 & x < 0 \end{cases}$ dire

per quali valori di $x \in \mathfrak{R}$ è derivabile.

- 2) Data la funzione $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^3}$

- determinare il campo di esistenza e ricerca degli asintoti,
- studiare la crescita e decrescenza,
- studiare la derivata seconda e determinare i punti di flesso,
- tracciare il grafico.

- 3) Serie geometrica: per quali valori della ragione è convergente, divergente o indeterminata

(dimostrazione). Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (2x - \frac{1}{2})^n$.

- 4) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange. Dire se è applicabile a $f(x) = 3x^3 - 3x + 1$ in $[-2, 2]$ e in caso affermativo calcolare "c".

Prova scritta di Analisi Matematica I (N.O.) 2 ore

15/06/2011

- 1) Definizione di funzione inversa. Enunciare e dimostrare il teorema della derivata della funzione inversa. Utilizzandolo calcolare la derivata di $f(x) = \arcsin x$.

- 2) Enunciato del Teorema di Weierstrass : trovare un intervallo dove siano verificate le ipotesi

per la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ e calcolarne il max e minimo assoluti

- 3) Data la funzione $f(x) = e^{\sin x}$, $x \in [0, 2\pi]$, tracciare il grafico illustrando i passaggi fondamentali.

- 4) Definizione di serie numerica convergente e condizione necessaria per la sua convergenza.

Dire se converge la seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{3^n + n}$.

Prova scritta di Analisi Matematica I (N.O.) 2 ore

15/06/2011

- 1) Definizione di serie numerica convergente e somma della serie. Dire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ converge la seguente serie geometrica $\sum_{n=2}^{+\infty} (\sin x)^n$ e calcolare la sua somma.
- 2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle: trovare un intervallo dove siano verificate le ipotesi per la funzione $f(x) = \sqrt{e - e^{x^2}}$ e calcolare il punto x_0 .
- 3) Data la funzione $f(x) = xe^{|x|}$, tracciare il grafico illustrando i passaggi fondamentali.
- 4) Enunciare le ipotesi per la validità della formula di Mc-Laurin. Utilizzando tale formula calcolare il polinomio di Mc-Laurin di grado 3 che approssima la funzione $g(x) = \ln \sqrt{1 + 4x}$.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (A) 2 ore

30/06/2011

- 1) Definizione di funzione derivabile in un punto e suo significato geometrico. Calcolare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \operatorname{arctg}(1/x)$ in $x=1$.
- 2) Studiare il grafico della funzione $f(x) = x \ln^2 x$, illustrando i passaggi fondamentali.
- 3) Definizione di funzione infinitesima e confronto tra infinitesimi. Utilizzandolo calcolare il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin 2x + tg^3 x}{1 - \cos 3x + \ln(1 + 3x)}$.
- 4) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per le serie numeriche. Utilizzandolo dire se converge la seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (B) 2 ore

30/06/2011

- 1) Definizione di funzione continua in un punto, classificare (con degli esempi) i vari punti di discontinuità per una funzione $f(x)$. Dire per quali valori di $k > 0$ è continua in $x=0$ la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \geq 0 \\ 2k \cos x & x < 0 \end{cases}$
- 2) Studiare il grafico della funzione $f(x) = x^2 \ln x$, illustrando i passaggi fondamentali.

- 3) Definizione di funzione infinita e confronto tra infiniti. Utilizzandolo calcolare il seguente limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + \ln x}{e^{3x} + x^3}$.
- 4) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per le serie numeriche. Utilizzandolo dire se converge la seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (A) 2 ore

14/07/2011

- 1) Dire sotto quali ipotesi una funzione $f(x)$ si può approssimare con un polinomio in un intorno di un punto x_0 . Determinare il polinomio di grado 3 che approssima la funzione $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ nell'intorno di $x_0=0$.
- 2) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \ln(x-2x^2)$, illustrando i passaggi fondamentali.
- 3) Enunciare il Teorema degli zeri. Dire se la funzione $f(x) = |\ln x|$ soddisfa il Teorema nell'intervallo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.
- 4) Dimostrare che una serie a termini positivi non può essere indeterminata. Dire se converge la seguente serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1}$.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (B) 2 ore

14/07/2011

- 1) Dire sotto quali ipotesi una funzione $f(x)$ si può approssimare con un polinomio in un intorno di un punto x_0 . Determinare il polinomio di grado 3 che approssima la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$ nell'intorno di $x_0=0$.
- 2) Studiare il grafico della funzione $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$ illustrando tutti i passaggi fondamentali. Classificare inoltre i punti di non derivabilità.
- 3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle. Dire se la funzione $f(x) = |\ln x|$ soddisfa il Teorema nell'intervallo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.
- 4) Definizione di serie numerica convergente, divergente, indeterminata. Studiare la convergenza della serie geometrica $\sum_{n=3}^{+\infty} (x^2 - 1)^n$ al variare di $x \in \mathbb{R}$ e calcolarne la somma.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (A) 2 ore

9/09/2011

- 1) Definizione di massimo e minimo relativo per una funzione $f(x)$. Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat e dire se è applicabile alla funzione $y = |x|$, x in \mathbb{R} , motivando la risposta.
- 2) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}}$, illustrando in particolare gli asintoti, la crescita, la concavità e l'esistenza di flessi.
- 3) Verificare che della funzione $f(x) = \cos(x^2)$ si può scrivere lo sviluppo di Mc-Laurin e scriverlo con resto di Peano di ordine 10.
- 4) Condizione necessaria e condizione sufficiente per la convergenza di una serie numerica. Utilizzando un criterio sufficiente dire se converge la seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} n^n$.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (B) 2 ore

9/09/2011

- 1) Definizione di funzione crescente e decrescente. Enunciare e dimostrare la condizione sufficiente affinché questa proprietà si verifichi. Fare un esempio.
- 2) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x}}$, illustrando in particolare gli asintoti, la crescita, la concavità e l'esistenza di flessi.
- 3) Verificare che della funzione $f(x) = \sin(x^2)$ si può scrivere lo sviluppo di Mc-Laurin e scriverlo con resto di Peano di ordine 9.
- 4) Condizione necessaria e condizione sufficiente per la convergenza di una serie numerica. Utilizzando un criterio sufficiente trovare per quali x reali converge la seguente serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n} |x|^{-n}$.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (A) 2 ore

23/09/2011

- 1) Condizioni sufficienti affinché per una funzione $f(x)$ si possa scrivere lo sviluppo di Mac-Laurin di ordine n . Definizione di resto. Scrivere lo sviluppo della funzione $f(x) = \arctg x$, con il resto di Lagrange di ordine 5.
- 2) Data la funzione $f(x) = 1 + |\ln(x-2)|$,
 - a. Determinare il campo di esistenza,
 - b. Studiare la crescita e decrescenza,
 - c. Studiare la derivabilità in $x=3$,
 - d. Disegnare il grafico.
- 3) Calcolare l'ordine di infinitesimo di ciascuna funzione presente nel limite $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x - \frac{\pi}{2}) + \cos x}{\sqrt{(x - \frac{\pi}{2}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})}}$ e poi calcolare il limite.
- 4) A scelta risolvere uno dei seguenti quesiti:
 - a. Studiare il carattere seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sin \frac{1}{n}}{2n^2}$.

- b. Enunciare e dimostrare il teorema della derivazione della funzione composta

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (N.O.) 2 ore

22/11/2011

- 1) Definizione di funzione continua in un punto. Utilizzandola dire per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua in $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x}{x-1} & x = 1 \\ k & x \neq 1 \end{cases}$$

- 2) Data la funzione $f(x) = \ln\left(\frac{x}{|x-2|}\right)$ determinare
- campo di esistenza e comportamento ai suoi estremi,
 - un intervallo in cui essa è monotona crescente o decrescente,
 - massimi, minimi, flessi, (se esistono)
 - disegnare il grafico.
- 3) Determinare per quali valori del parametro k converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n(k-2)$ e calcolarne la somma.
- 4) Enunciare la formula di Taylor, utilizzandola scrivere il polinomio di grado 10 che approssima la funzione $f(x) = \sin(2x^2)$ nell'intorno di $x = 0$.

Prova scritta del modulo di Analisi Matematica I (N.O.)

13/12/2011

- 1) Data la funzione $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$, calcolare
- campo di esistenza e comportamento agli estremi del campo;
 - punti critici e crescita/decrecenza;
 - convessità ed eventuali flessi;
 - disegnare il grafico.
- 2) Definizione di funzione continua in un intervallo $[a,b]$. Enunciare il Teorema di Weierstrass e applicarlo alla funzione $h(x) = \sqrt{|x|}$ in $[-1,1]$.
- 3) Enunciare il Teorema della derivata della funzione composta e dimostrarlo utilizzando il limite del rapporto incrementale. Trovare la derivata di $g(x) = 2^{\frac{1}{x^2-1}}$.
Enunciare la formula di Taylor e di Mac-Laurin con il resto di Peano. Applicarla alle funzioni $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = \sin x$ in $x=0$, e calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - 2}{\sin^3 x}$