

Prova scritta di Analisi Matematica I (1)  
10/11/2005

Nome.....

Matricola.....

1. Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno. Fare un esempio
2. Definizione di funzione infinitesima per  $x \rightarrow x_0$ . Motivando la risposta, dire qual è l'ordine di infinitesimo di  $\sin x^2$ .
3. Dati i numeri complessi  $z_1 = 2 + i$  e  $z_2 = 1 - 2i$ , calcolare
  - a)  $\overline{z_1 + z_2}$ ,
  - b)  $z_1 z_2$ ,
  - c)  $\frac{z_1}{z_2}$ .
4. Definizione di limite per  $x \rightarrow x_0$  per una funzione  $f(x)$ . Utilizzando i limiti notevoli calcolare il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\pi x}}{\sin 2x}$ .
5. Data  $f(x) = \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}}$ , calcolare  $f'(x)$ , determinare i punti critici e classificare i punti di non derivabilità.

Prova scritta di Analisi Matematica I (2)  
10/11/2005

Nome.....

Matricola.....

1. Utilizzando le formule di de Moivre calcolare  $z = (\sqrt{3} - i)^7$  e scrivere il suo complesso coniugato
2. Data  $f(x) = \ln(\cos x^2)$ , calcolare  $f'(x)$  e scrivere l'equazione della retta tangente a  $f(x)$  nel punto  $x = 0$ .
3. Definizione di insieme aperto, chiuso in  $\mathbb{R}$ . Fare un esempio.
4. Criterio del confronto tra infinitesimi. Utilizzandolo calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{(1 - \cos 3x)}$ .
5. Definizione di massimo e minimo relativo. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

Prova scritta di Analisi Matematica I (3)  
10/11/2005

Nome.....  
Matricola.....

1. Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità del limite di una funzione  $f(x)$ . Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 + 1}$ .
2. Dato il numero complesso  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ , si determini
  - a) il modulo e l'anomalia (o argomento) e scrivere la formula trigonometrica,
  - b) il complesso coniugato,
  - c) rappresentarlo nel piano di Gauss.
3. Data la funzione  $f(x) = \sqrt{x+1} + |x|$ , calcolare  $f'(x)$  e classificare i punti di non derivabilità.
4. Definizione di funzione continua in un punto. Calcolare il campo di esistenza di  $f(x) = \ln(1 - x^2)$ .
5. Definizione di punto di frontiera, interno, esterno ad un intervallo in  $\mathbb{R}$ .

Prova scritta di Analisi Matematica I (4)  
10/11/2005

Nome.....  
Matricola.....

1. Risolvere l'equazione in campo complesso  $z^3 + 1 = 0$
2. Definizione di funzione continua in un punto. Fare esempi sui vari tipi di discontinuità che una funzione può presentare.
3. Data la funzione  $f(x) = \arctg(x^2 + 1)$ , calcolare  $f'(x)$  e scrivere l'equazione della retta tangente ad  $f(x)$  in  $x = 0$ .
4. Definizione di derivata di una funzione  $f(x)$  in un punto e suo significato geometrico. Dimostrare che  $D(e^x) = e^x$ .
5. Enunciare il criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito. Dimostrare la condizione necessaria. Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 5x}$ .

Prova scritta di Analisi Matematica I (2<sup>a</sup> parte) A  
21/12/2005

- 1) Data la funzione  $f(x)=xe^x$ :
    - a) determinare il campo di esistenza e studiare il comportamento agli estremi,
    - b) determinare i massimi e minimi,
    - c) disegnare il grafico.
  - 2) Definizione di serie numerica, serie convergente divergente e indeterminata. Studiare il carattere della serie:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$  e se possibile calcolarne la somma.
  - 3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange (o del valor medio) per una funzione  $f(x)$  in un intervallo  $[a,b]$ , e significato geometrico. Dire se è applicabile alla funzione  $f(x) = x^2 - x$  in  $[0,1]$ .
  - 4) Definizione di integrale improprio o generalizzato. Utilizzandola dire se converge il seguente integrale  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ .
  - 5) Calcolare il seguente integrale  $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$  si consiglia la sostituzione  $e^x = t$ .
- 

FACOLTATIVO

Formula di Taylor e di Mac-Laurin. Scrivere lo sviluppo di  $f(x) = \sin 3x$  in un intorno di  $x = 0$  con il resto (forma di Peano) di ordine 3.

Prova scritta di Analisi Matematica I (2<sup>a</sup> parte) B  
21/12/2005

- 1) Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica. Utilizzando il criterio del confronto per le serie, dimostrare che  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}$  converge.
  - 2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle, illustrarne il significato geometrico. Dire se è applicabile alla funzione  $f(x) = 2x^2 - 4x$  in  $[0,2]$ .
  - 3) Definizione di integrale definito di  $f(x)$  in  $[a,b]$  e suo Significato geometrico nel caso  $f(x)>0$ . Calcolare l'area della regione piana compresa tra le due parabole di equazione  $y = -x^2 + 1$  e  $y = 3x^2$ .
  - 4) Utilizzando il metodo di integrazione per parti, calcolare il seguente integrale  $\int xe^x dx$ .
  - 5) Data la funzione  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,
    - a) calcolare il campo di esistenza e studiare il comportamento agli estremi,
    - b) determinare un intervallo di crescita per  $f(x)$ ,
    - c) disegnare il grafico.
- 

FACOLTATIVO

Formula di Taylor e Mac-Laurin. Scrivere lo sviluppo di  $f(x)=e^{2x}$  in un intorno di  $x = 0$ , con resto (di Peano) di ordine 2.

Prova scritta di Analisi Matematica I  
20/01/2006

Nome.....

Matricola.....

1. Calcolare l'area della regione di piano D compresa tra le due curve di equazione  $y = x + 2$  e  $y = x^2$ .
2. Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione delle funzioni composte. Fare un esempio.
3. Data la funzione  $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ :
  - a) Determinare il campo di esistenza e studiare il comportamento agli estremi
  - b) trovare gli eventuali punti a tangente orizzontale ( $y' = 0$ ) e classificarli,
  - c) dire se è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo  $[1,2]$  e in caso affermativo applicarlo,
  - d) tracciare il grafico.
4. Definizione di integrale improprio. Utilizzandola dire se converge l'integrale  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .
5. Definizione di serie numerica convergente, divergente, indeterminata. Dire se converge la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Prova scritta di Analisi Matematica I (A)  
08/02/2006

Nome.....

Matricola.....

1. Data la funzione  $f(x) = x\sqrt{x+1}$ 
  - a) Determinare il campo di esistenza e il comportamento agli estremi;
  - b) Calcolare i massimi e minimi relativi.
  - c) Disegnare il grafico.
2. Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri.  
Determinare un intervallo in cui il teorema è applicabile alla funzione  $f(x)$
3. Definizione di limite finito per una funzione  $g(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  con  $x_0 \in \mathfrak{R}$ . Fare un esempio.
4. Calcolare il seguente integrale  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$   
(Si utilizzi la scomposizione in tratti semplici).
5. Utilizzando il criterio del rapporto, si studi il carattere della serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ .

Prova scritta di Analisi Matematica I (B)  
08/02/2006

Nome.....

Matricola.....

1. Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
2. Definizione di derivata di una funzione in un punto. Utilizzandola dimostrare che la derivata di  $e^x$  è la stessa  $e^x$ .
3. Data la funzione  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 
  - a) Determinare il campo di esistenza e il comportamento agli estremi;
  - b) Calcolare gli intervalli di crescita e decrescenza;
  - c) Disegnare il grafico.
4. Calcolare il seguente integrale  $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$   
(Si utilizzi la sostituzione  $\ln x = t$ ).
5. Utilizzando il criterio della radice, si studi il carattere della serie:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$

Prova scritta di Analisi Matematica I  
13/06/2006

Nome.....

Matricola.....

- 1) Data la funzione  $f(x) = \arccos x$ 
  - a) Determinare il campo di esistenza.
  - b) Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti.
  - c) Tracciare il grafico.
- 2) Enunciare il criterio del confronto per le serie.  
Studiare il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctg n}{n^2}$
- 3) Sia dato il numero complesso  $z = 1 - i$ .
  - a) Scrivere  $z$  in forma trigonometrica
  - b) Calcolare le radici cubiche di  $z$ .
- 4) Definizione di funzione continua in un punto. Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno.
- 5) Definizione di integrale improprio o generalizzato per una funzione non limitata in un intervallo. Utilizzandola calcolare l'integrale  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .
- 6) Definizione di integrale definito. Calcolare il seguente integrale  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  utilizzando la sostituzione  $x = \sin t$ .

Prova scritta di Analisi Matematica I  
12/07/2006

Nome.....

Matricola.....

- 1) Data la funzione  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , calcolare
  - a) campo di esistenza,
  - b) comportamento agli estremi del campo di esistenza,
  - c) massimi e minimi relativi e assoluti,
  - d) tracciare il grafico.
- 2) Enunciare il teorema della media o di Lagrange. Dire in quanti punti la funzione  $y = \arctg x$ ,  $x \in [-1,1]$ , soddisfa questo teorema.
- 3) Calcolare l'area della regione D sotto il grafico di  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x \in [1, e]$ .
- 4) Condizioni sufficienti affinché una funzione  $g(x)$  sia sviluppabile con la formula di Mac-Laurin. Scrivere lo sviluppo di  $g(x) = 1 - \cos x$  con il resto di ordine 3.
- 5) Teorema della derivata di una funzione composta. Derivare  $h(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}$ .

Prova scritta di Analisi Matematica I  
25/07/2006

Nome.....

Matricola.....

- 1) Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .
- 2) Data la funzione  $f(x) = 4x - \sqrt{4x^2 - 1}$ , determinare
  - a) il campo di definizione,
  - b) intervalli di crescita e decrescenza,
  - c) concavità e convessità,
  - d) tracciare il grafico.
- 3) Definizione di funzione crescente. Enunciare e dimostrare la condizione sufficiente affinché una funzione sia crescente.
- 4) Calcolare  $\frac{1}{16} \int_0^1 x^3 \sqrt{4x^4 - 1} dx$ .
- 5) Scrivere la formula di Taylor per una funzione  $g(x)$  nell'intorno di un punto  $x_0$  (condizioni per la validità). Trovare lo sviluppo di  $\sin(x - \frac{\pi}{2})$  in  $x = \frac{\pi}{2}$  con il resto di ordine 3.

Prova scritta di Analisi Matematica I

26/09/2006

Nome.....

Matricola.....

- 1) Calcolare l'area della regione di piano limitata compresa tra la retta  $y = x$  e la parabola  $y = (x-1)^2$ .
- 2) Data la funzione  $f(x) = \pi - \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ 
  - a) determinare il campo di definizione,
  - b) studiare la continuità nell'intorno dell'origine e dire se è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo  $[-1,1]$
  - c) studiare la crescita e concavità
  - d) disegnare il grafico.
- 3) Scrivere la formula di Taylor di una funzione  $f(x)$  nell'intorno di un punto  $x_0$ . Applicarla alla funzione  $y = \log(2-x)$  in  $x = 1$ .
- 4) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per le serie. Utilizzandolo studiare il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{3^n}$ .
- 5) Definizione di integrale improprio per una funzione  $f(x)$  definita in  $(a,b]$  e non limitata in  $x = a$ . Fare un esempio.