# La geometria nell'antichità greca

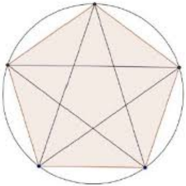
Francesco Paoli

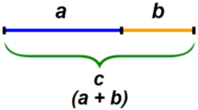
Filosofia della scienza, 2023-24

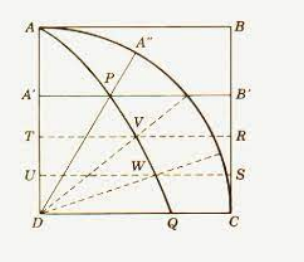
# La geometria greca sino al V sec. a.C.

- Talete di Mileto (624-548 a.C. ca.) e Pitagora di Samo (580-500 a.C. ca.), quest'ultimo con l'ausilio della sua scuola, pongono i fondamenti della cosiddetta geometria euclidea piana e solida, anche se le esatte attribuzioni dei risultati sono difficoltose per la carenza di fonti.
- Ad Ippaso di Metaponto (530-450 a.C. ca.) è attribuita la scoperta di grandezze incommensurabili, attraverso il rapporto tra diagonale e lato del quadrato o mediante la sezione aurea.
- Ippocrate di Chio (470-410 a.C. ca.) compone degli *Elementi di geometria*, oggi perduti, e si occupa della quadratura delle lunule, utilizzando strumenti di teoria delle proporzioni.
- Ippia di Elide (443-399 a.C. ca.) studia la prima linea curva oltre al cerchio, nota come *trisettrice di Ippia*.
- Filolao di Crotone (470-390 a.C. ca.) e Archita di Taranto (428-360 a.C. ca.) proseguono le indagini della scuola pitagorica, sviluppando la teoria delle proporzioni.

# La geometria greca sino al V sec. a.C.





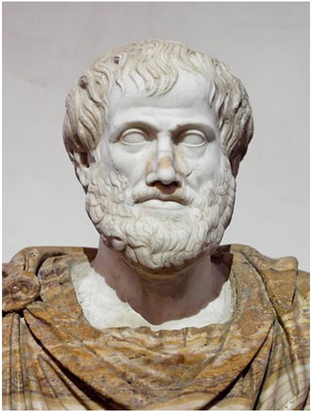



# La svolta logico-deduttiva del IV sec. a.C.

A partire dal IV sec. a.C., si fa strada l'esigenza sempre più pervasiva di un ricorso al metodo deduttivo nel ragionamento matematico. Varie cause, sia matematiche che extramatematiche, giustificano tale aspirazione:

- Secondo van der Waerden, le numerose differenze riscontrate da Talete p. es. tra le regole della matematica egizia e di quella babilonese favorisce l'esigenza di un metodo rigorosamente razionale di giustificazione dei risultati.
- Secondo Neugebauer, la scoperta delle grandezze incommensurabili pone in rilievo l'insufficienza delle argomentazioni intuitive e spinge verso un maggior rigore logico.
- Secondo Szabó, vi è un impatto esercitato dallo sviluppo della dialettica, sia come procedura argomentativa utilizzata in filosofia, sia come strumento di dibattito politico nelle città-stato della Grecia.

# Aristotele (383-322 a.C.)



# Aristotele: gli Analitici Posteriori

Negli *Analitici Posteriori*, Aristotele individua le caratteristiche essenziali dell'organizzazione delle teorie deduttive, in particolare della geometria. Ogni teoria deduttiva si fonda su *assiomi* che sono "cose vere e prime", ossia verità evidenti. Le *dimostrazioni* sono catene di inferenze logiche che servono a trasferire l'evidenza dagli assiomi ai teoremi. Anche se esaminando una dimostrazione concreta non ne è sempre perspicuo il carattere di concatenazione di inferenze logiche, ogni dimostrazione concreta può essere opportunamente espansa sino ad assumere una tale forma.

Non tutte le dimostrazioni sono epistemologicamente equivalenti: le dimostrazioni *dióti*, che mostrano *perché* vale il teorema dimostrato, sono superiori alle dimostrazioni *hóti*, che si limitano a stabilire *che* il teorema dimostrato vale.

# Aristotele: la completezza della sillogistica

In *An. Pr.* I.23.40b18-42a32, Aristotele cerca di dimostrare che ogni inferenza deduttiva può essere espressa come una serie di inferenze sillogistiche a due premesse. In particolare, ne seguirebbe che la teoria del sillogismo è completa rispetto alle dimostrazioni matematiche di ogni tipo. Il teorema che Aristotele cerca di dimostrare è il seguente (in notazione moderna):

**Theorem**

*Se la conclusione $\alpha$ segue dalle premesse $\gamma_1, ..., \gamma_n$, allora esistono $i, j \leq n$ $(i \neq j)$ tali che $\gamma_i$ e $\gamma_j$ sono le premesse maggiore e minore di un sillogismo categorico di prima, seconda o terza figura e $\alpha$ ne è la conclusione.*

La dimostrazione aristotelica è non conclusiva: si basa su una serie di asserzioni giustificate intuitivamente e sul *principio della catena*, secondo cui ogni inferenza deduttiva con conclusione $\alpha$ deve formare una catena di predicazioni che collega soggetto e predicato di $\alpha$. Tale principio non viene però adeguatamente giustificato.

# Euclide (IV-III sec. a.C.)

# Gli *Elementi* di Euclide: il metodo

In quest'opera, che sistematizza le conoscenze geometriche (e non solo) dell'epoca, Euclide dà un limpido esempio del metodo assiomatico antico.

- Si identificano dei concetti primitivi la cui intelligibilità è garantita dall'*evidenza*.
- Si identificano delle proposizioni primitive (assiomi e postulati) la cui verità è garantita dall'*evidenza*.
- Gli altri concetti geometrici sono definite a partire dai concetti primitivi mediante le *definizioni*, che trasferiscono l'evidenza dai secondi ai primi.
- Le altre verità geometriche sono definite a partire dalle proposizioni primitive mediante le *dimostrazioni*, che trasferiscono l'evidenza dalle seconde alle prime.

# Gli *Elementi* di Euclide: assiomi e postulati

*Assiomi* (o *nozioni comuni*): proposizioni primitive che si ritengono evidentemente vere in generale, indipendentemente dal dominio di appicazione (es. "Il tutto è maggiore della parte").
*Postulati*: proposizioni primitive la cui verità è assunta come evidente, ma la cui validità è limitato al campo specifico della scienza che li assume.

# Gli *Elementi* di Euclide: i cinque postulati

1. Da ogni punto si può condurre una retta a ogni altro punto;
2. Ogni segmento si può prolungare indefinitamente;
3. Dato un punto e un segmento, si può costruire una circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;
5. Se due rette tagliate da una trasversale formano, dalla stessa parte, angoli coniugati interni la cui somma è minore di due retti, esse si incontrano da quella parte.

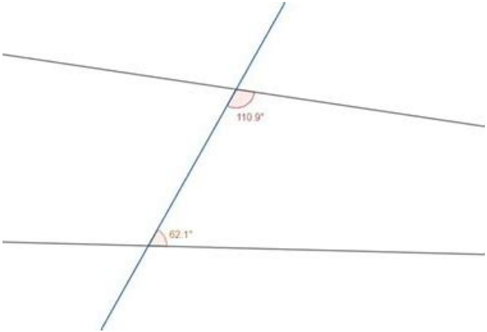
# Il modello euclideo di dimostrazione

Nelle dimostrazioni euclidee, si fa una chiara distinzione tra:

- un momento costruttivo, consistente nell'esposizione (*ékthesis*) della figura e nel completamento di quest'ultima mediante linee, punti e cerchi (*kataskeué*);
- un momento più strettamente dimostrativo, consistente in una catena di inferenze logiche (*apódeixis*).

La distinzione tra *ékthesis* e *apódeixis* fornirà a molti (ad es. Kant) un potente strumento di analisi delle dimostrazioni matematiche, che gli consente di separare chiaramente l'aspetto contenutistico-intuitivo e quello logico-formale.

# Gli *Elementi* di Euclide: il quinto postulato



# Gli *Elementi* di Euclide: il quinto postulato

- Il quinto postulato è equivalente alla seguente proposizione: Dati una retta e un punto fuori di essa, per quel punto può essere condotta una e una sola parallela alla retta data.
- Euclide non è probabilmente soddisfatto della sua "evidenza", tanto è vero che lo usa una volta sola nel primo libro degli *Elementi* (Prop. 29, libro I).
- In una regione piana, grande a piacere ma comunque accessibile all'intuizione diretta, dati una retta e un punto fuori di essa, possiamo far passare per quel punto *infinite* rette che non incontrano la retta data; affermare che tutte quelle rette *meno una* incontrano la retta data è un'impegnativa estrapolazione che ci porta oltre i dati dell'osservazione e dell'intuizione.

# Critiche antiche al quinto postulato

**Posidonio** (I sec. a.C.): cambia la definizione di parallelismo. Due rette sono parallele se sono complanari e equidistanti. *Problema*: va dimostrato che il luogo dei punti equidistanti da una retta e giacenti da una parte di essa è una retta (la dimostrazione richiede il quinto postulato).
**Tolomeo** (II sec. d.C.): dimostra il quinto postulato a partire dalla proposizione che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti. *Problema*: questa proposizione va assunta come nuovo assioma, e non è più evidente del quinto postulato.
**Proclo** (V sec. d.C.): dimostra il quinto postulato a partire dalla proposizione che la distanza fra due punti presi su rette intersecantesi può essere resa grande a piacere prolungando sufficientemente le due rette. *Problema*: questa proposizione va assunta come nuovo assioma, e non è più evidente del quinto postulato.