Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Fisica

Analisi Matematica II

prof. Antonio Greco

Prima parte

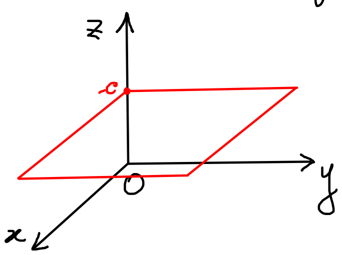
Anno accademico 2023/24

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

CI CONCENTRIAMO SU FUNZIONI DEL TIPO $z = f(x,y)$ CON $z \in \mathbb{R}$ E $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. LA TEORIA DELLE FUNZIONI $z = f(x_1, \dots, x_N)$ È DEL TUTTO ANALOGA.

ESEMPI SEMPLICI

$z = \text{COST.}$, OVVERO $f(x,y) = c \in \mathbb{R}$



IL GRAFICO DI $z = f(x,y)$ È L'INSIEME $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ DATO DA $\Gamma = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$

SE $f(x,y) = c$ ALLORA $\Gamma = \{(x,y,z) : z = c\}$

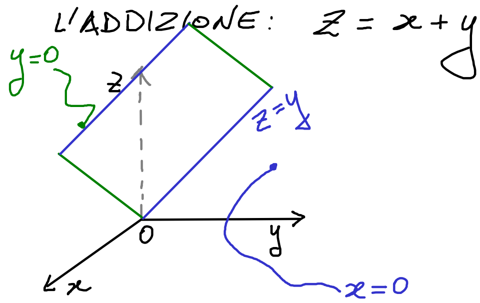
GI 28 SET 2023

FUNZIONI RADIALI:

DATA $z = \varphi(y)$ PER $y \geq 0$, RUOTANDONE IL GRAFICO INTORNO ALL'ASSE z SI OTTIENE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $f(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

MA 26 SET 2023

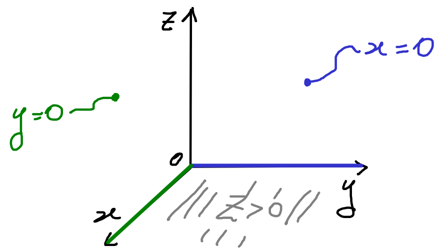
L'ADDIZIONE: $z = x + y$



ESERCIZIO: TRACCIARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $z = x - y$

STUDIAMO ADESSO LA MOLTIPLICAZIONE

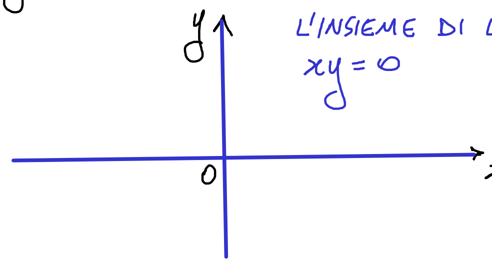
$z = xy$



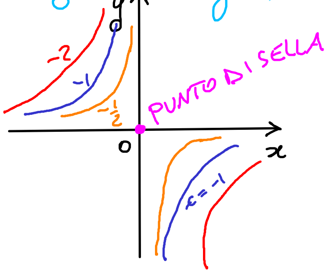
SI VEDE CHE $z(x,y) > 0$ NEL PRIMO QUADRANTE $\{(x,y) : x, y > 0\}$ E NEL TERZO $\{(x,y),\ x, y < 0\}$

LE LINEE DI LIVELLO DI $z = f(x,y)$ SONO LE LINEE DI EQUAZIONE $z = \text{cost.}$ OVVERO $f(x,y) = c$, LE QUALI DIPENDONO DA c.

L'INSIEME DI LIVELLO $xy = 0$

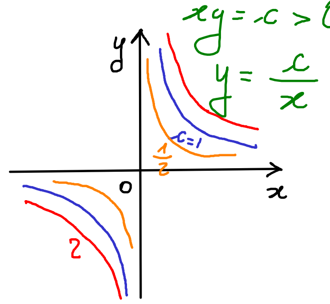


$xy = -c < 0$, $y = \frac{-c}{x}$



$xy = c > 0$

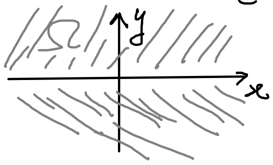
$y = \frac{c}{x}$



MA 26 SET 2023

CENNI ALLA FUNZIONE $z = \frac{x}{y}$ (LA DIVISIONE)

IL DOMINIO È L'INSIEME $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.



IL GRAFICO È COME QUELLO PRECEDENTE, SALVO SCAMBIARE LE LETTERE, IN QUANTO SE $z = \frac{x}{y}$ ALLORA $x = yz$.

NOTA: LE FUNZIONI COSTANTI $f(x,y) = c$, L'ADDIZIONE E LA SOTTRAZIONE SONO TUTTE FUNZIONI DEL TIPO

$$f(x,y) = ax + by + c$$

(POLINOMI DI PRIMO GRADO) ED HANNO COME GRAFICO UN PIANO.

LA MOLTIPLICAZIONE $z = xy$, INVECE, RIENTRA NELLA TIPOLOGIA

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g$$

CON a, b, c, d, e, g PARAMETRI FISSATI. NOTAZIONE MATRICIALE:

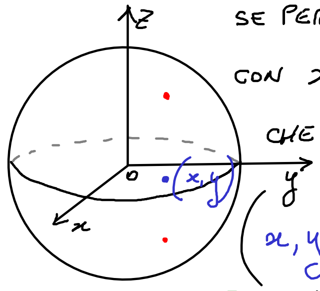
$$f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + dx + ey + g$$

I LORO GRAFICI SONO QUADRICHE E GIOCANO NELLO SPAZIO IL RUOLO CHE LE CONICHE HANNO NEL PIANO.

LA QUADRICA PIÙ NOTEVOLE È SENZA DUBBIO LA SFERA. SE IL CENTRO È IN O L'EQUAZIONE CARTESIANA È $x^2+y^2+z^2 = R^2$ DOVE $R > 0$ È IL RAGGIO.

DUE PROBLEMI:

1. LA SFERA NON È IL GRAFICO Γ DI NESSUNA $z = f(x,y)$: UNA FUNZIONE $z = f(x,y)$ ASSOCIA AD OGNI $(x,y) \in \Omega$ UNO E UN SOLO VALORE DI z.



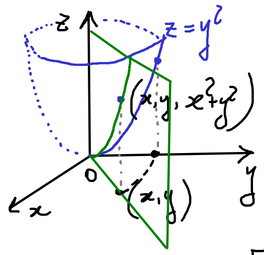
SE PERÒ PRENDO (x,y) CON $x^2+y^2 < R$ VEDO CHE I DUE PUNTI $\left(x, y, \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)$ E $\left(x, y, -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)$ APPARTENGONO ALLA SFERA.

2. LA FUNZIONE $f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ HA PER GRAFICO LA SEMISFERA SUPERIORE, MENTRE $f(x,y) = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ HA PER GRAFICO QUELLA INFERIORE.

NON SONO FUNZIONI POLINOMIALI.

UNA QUADRICA È IL LUOGO DEGLI ZERI DI UN POLINOMIO DI SECONDO GRADO IN TRE VARIABILI: SI USA, CIOÈ, L'EQUAZIONE CARTESIANA IMPLICITA.

LA SECONDA QUADRICA PIÙ IMPORTANTE È IL PARABOLOIDE DI ROTAZIONE. TROVIAMO LA $f(x,y)$ DI CUI ESSO È IL GRAFICO.

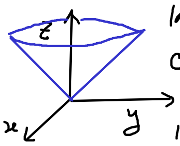


PRENDO $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

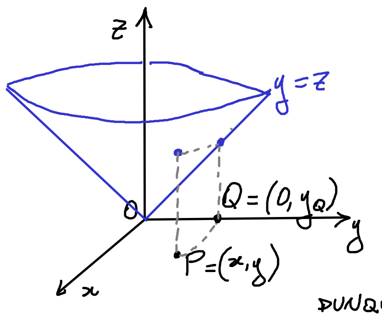
(x,y) DISTA DA $(0,0)$ $\sqrt{x^2+y^2}$

DUNQUE $f(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2$

ESERCIZIO: PRENDO LA RETTA $z=y$ E LA RUOTO INTORNO ALL'ASSE z OTTENENDO UN CONO: DI QUALE $f(x,y)$ ESSO È IL GRAFICO?



GI 28 SET 2023



$\overline{OP}=\overline{OQ}$ PER ROTAZIONE

QUINDI $x^2+y^2=y_Q^2$

MA ALLORA $z=f(x,y)$

$=y_Q=\sqrt{x^2+y^2}$

DUNQUE $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

NOTA: IL CONO COME QUADRICA HA EQUAZIONE $z^2=x^2+y^2$ OVVERO $x^2+y^2-z^2=0$.

ALTRE QUADRICHE NOTEVOLI

ELLISSOIDE: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

CON $a,b,c>0$ (SEMIASSI).

È AMMESSO CHE $a=b=c=R$ (SFERA).

IPERBOLOIDI:

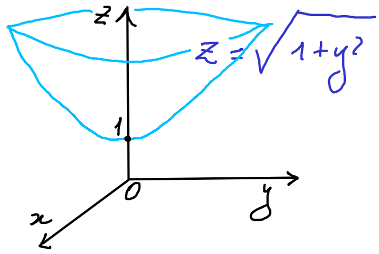


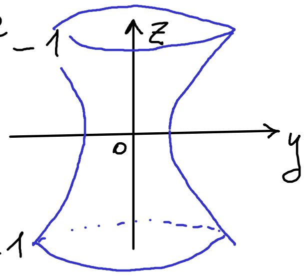
GRAFICO DI

$f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$

COME QUADRICA: $z^2=1+x^2+y^2$

$x^2+y^2-z^2+1=0$ HA DUE FALDE

L'IPERBOLOIDE A UNA FALDA SI OTTIENE RUOTANDO INTORNO ALL'ASSE z L'IPERBOLE $z^2=y^2-1$

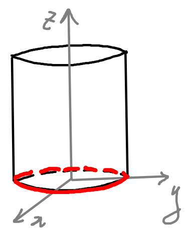


ED HA EQUAZIONE CARTESIANA

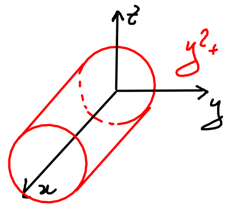
$z^2=x^2+y^2-1$

CIOÈ $x^2+y^2-z^2-1=0$.

CILINDRI



$x^2+y^2=R^2$



$y^2+z^2=R^2$

LA METÀ SUPERIORE È IL GRAFICO DI

$f(x,y)=\sqrt{R^2-y^2}$

CILINDRI (NON NECESSARIAMENTE QUADRICHE): DATA $z=\varphi(y)$ DEFINISCO $f(x,y)=\varphi(y)$ IL CUI GRAFICO È DETTO CILINDRO.

MA 03 OTT 2023

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEFINIZIONE: PRESO UN INTERO $n \geq 1$ (ORDINE DELL'EQUAZIONE) E UNA FUNZIONE $F(t, y_0, y_1, \dots, y_n)$ DI $n+2$ VARIABILI REALI AVENTE PER DOMINIO, PER SEMPLICITÀ, LO STRATO $(a,b) \times \mathbb{R}^{n+1}$, UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

È UNA FUNZIONE $y : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILE ALMENO n VOLTE CHE SODDISFA L'UGUAGLIANZA PER OGNI $t \in (a,b)$.

ESEMPIO: LA SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE SECONDO NEWTON:

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

I RUOLI DEI TERMINI DAL PUNTO DI VISTA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI:

$\bar{F}$, m SONO DATI;

LA POSIZIONE $\bar{x}(t)$ DEL PUNTO MATERIALE ALL'ISTANTE t È L'INCOGNITA

L'ACCELERAZIONE $\bar{a}$ SI DEFINISCE $\bar{a}(t) = \dfrac{d^2\bar{x}}{dt^2}$

E QUINDI LA SECONDA LEGGE SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$\bar{F} = m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}.$$

NEL CASO SPECIFICO DELLA CADUTA DEI GRAVI LUNGO L'ASSE y SI HA $F = P = -mg$ E L'EQUAZIONE SI RIDUCE A $-mg = m\,y''(t)$

OVVERO $y''(t) = -g$ (DATA), O ANCHE

$y''(t) + g = 0$ QUINDI LA F DELLA DEFINIZIONE È $F(t, y_0, y_1, y_2) = y_2 + g$

RISOLUZIONE VELOCE: INTEGRO DUE VOLTE $y''(t) = -g$. INTEGRANDO AMBO I MEMBRI TROVO $\int y''(t)\,dt = -\int g\,dt$. SONO INTEGRALI IMMEDIATI: $\int y''(t)\,dt = y'(t) + C_1$

$\int g\,dt = gt + C_2$ QUINDI L'EQUAZIONE DIVENTA $y'(t) = -gt + C_3$ ESSENDO $C_3 = -C_1 - C_2$. INTEGRANDO NUOVAMENTE SI TROVA $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$:

LE EVENTUALI SOLUZIONI DEVONO AVERE QUESTA FORMA. DOMANDA: COME ESCLUDO L'ESISTENZA DI ALTRE SOLUZIONI? DOMANDA: LE FUNZIONI $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$ SODDISFANO L'EQUAZIONE $y'' = -g$? DOMANDA: QUALI VALORI POSSONO AVERE LE COSTANTI C_3 E C_4?

QUALUNQUE VALORE REALE. L'INTEGRALE GENERALE DI $y'' = -g$ È L'INSIEME DELLE $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$ CON $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

PRESUPPOSTO TEORICO DEI PASSAGGI PRECEDENTI: SE ESISTE UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $y''(t) = -g$ IN UN INTERVALLO (a,b) ESSA È DI CLASSE C^2 CIOÈ $y''(t)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA, QUINDI L'UGUAGLIANZA $\int y''(t)\,dt = y'(t) + C_1$ SUSSISTE PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

QUALUNQUE FUNZIONE $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ CHE SIA CONTINUA IN (a,b) AMMETTE INFINITE PRIMITIVE (CIOÈ FUNZIONI DERIVABILI F TALI CHE $F'(t)=f(t)$ PER OGNI $t\in(a,b)$).

L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE SI INDICA CON $\int f(t)\,dt$, E, INDICATA CON F UNA QUALUNQUE DI ESSE, SI HA

$$\int f(t)\,dt = F(t)+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI BANALI

$y^{(n)}(t)=f(t)$ CON $f(t)$ CONTINUA

ESERCIZIO: TROVARE L'INTEGRALE GENERALE.

SUGGERIMENTO: INDICARE CON $F(t)$ UNA DELLE PRIMITIVE DI $f(t)$, CHE ESISTONO PER IL TEOREMA FONDAMENTALE, COSICCHÉ $F'(t)=f(t)$. INTEGRANDO AMBO I MEMBRI DELL'EQUAZIONE $y^{(n)}(t)=f(t)$, TROVIAMO $\int y^{(n)}(t)\,dt = F(t)+C$, E, PER IL TEOREMA FONDAMENTALE,

$$\int y^{(n)}(t)\,dt = y^{(n-1)}(t)+D \quad \text{QUINDI}$$

$y^{(n-1)}(t)=F(t)+C_2$. ESSENDO $F(t)$ CONTINUA, HA UNA PRIMITIVA $F_2(t)$ E, INTEGRANDO AMBO I MEMBRI, TROVIAMO

$y^{(n-2)} = F_2(t)+C_2t+C_3$. RIPETIAMO FINCHÉ OTTENIAMO L'INTEGRALE GENERALE:

$$y(t)=F_n(t)+A_{n-1}t^{n-1}+A_{n-2}t^{n-2}+\dots+A_0$$

MA 03 OTT 2023

ESEMPI SEMPLICI, NON BANALI

1. $y'=y$: CERCHIAMO $y(t)$ DERIVABILE TALE CHE $y'(t)=y(t)$ PER OGNI t.

$y'=t$ HA SOLUZIONE $y(t)=\frac{1}{2}t^2+C$

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI DI $y'(t)=y(t)$ NON SI TROVA $y(t)=\frac{1}{2}y^2$ MA BENSÌ $y(t)=\int y(t)\,dt$. L'INTEGRAZIONE È LEGITTIMA PERCHÉ OGNI EVENTUALE SOLUZIONE $y(t)$ È DERIVABILE QUINDI CONTINUA E L'INSIEME DELLE PRIMITIVE È $\int y(t)\,dt$. INOLTRE $y'(t)$ COINCIDE CON $y(t)$ QUINDI ANCH'ESSA È CONTINUA.

1 bis: $y'=ky$ CON $k\in\mathbb{R}$.

SE $k<0$ MODELLIZZA: SCARICA DEL CONDENSATORE (FISICA 2), DILUIZIONE DI UN SOLUTO IN UN LAGO. SE $k>0$ MODELLIZZA: ESPLOSIONE DEMOGRAFICA, PROPAGAZIONE DI UN'EPIDEMIA (MODELLO MALTHUSIANO)

2. L'EQUAZIONE DEL PENDOLO

$$y''(t)=-\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\big(y(t)\big)$$

3. L'EQUAZIONE DEI MOTI ARMONICI

$$y''(t)=-\omega^2 y(t)\quad \text{CON } \omega>0.$$

4. EQUAZIONE DELLA LOGISTICA:

$$y'(t)=y(t)\cdot\big(1-y(t)\big)$$

GI 05 OTT 2023

PROBLEMI ASSOCIATI ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (LE DOMANDE PIÙ TIPICHE)

1 ESISTENZA E MOLTEPLICITÀ DELLE SOLUZIONI

A TROVARE L'INTEGRALE GENERALE DI UN'EQUAZIONE DATA

B TROVARE LA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA AI VALORI INIZIALI, O PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \quad (\text{DATO}) \\ y'(t_0) = y_1 \quad (\text{DATO}) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \quad (\text{DATO}) \end{cases}$$

C TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA AL CONTORNO, DETTO ANCHE PROBLEMA AI LIMITI, ASSOCIATO AD UN'EQUAZIONE DEL SECONDO ORDINE:

$$\begin{cases} y''(t) = f\left(t, y(t), y'(t)\right) \\ y(a) = y_a \quad (\text{DATO}) \\ y(b) = y_b \quad (\text{DATO}) \end{cases}$$

2 REGOLARITÀ DELLE SOLUZIONI

3 PROPRIETÀ QUALITATIVE DELLE SOLUZIONI: PARITÀ, DISPARITÀ, PERIODICITÀ, MONOTONIA, CONVESSITÀ

TROVIAMO L'INTEGRALE GENERALE DI $y'=y$ CON IL METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

0 TROVIAMO LE EVENTUALI SOLUZIONI BANALI $y(t) = c$ (COSTANTE). SI APPLICA LA DEFINIZIONE. SICCOME $y'(t)=0$ L'EQUAZIONE $y'=y$ SI RIDUCE A $0=c$, E IN EFFETTI LA $y(t)=0$ È SOLUZIONE.

1 SE UNA SOLUZIONE $y(t)$ SODDISFA $y(t_0) \neq 0$ ALLORA (PERMANENZA DEL SEGNO) RISULTA $y(t) \neq 0$ PER OGNI $t \in (t-\delta, t+\delta)$ CON UN $\delta > 0$ E POSSIAMO SEPARARE LE VARIABILI:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI TROVIAMO

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = t + C_1$$

SAPENDO CHE $\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \log|y(t)| + C_2$

TROVIAMO $\log|y(t)| = t + C$ E QUINDI

$$|y(t)| = e^{t+C} = k e^{t} \quad \text{ESSENDO } k = e^{C} > 0$$

DA CUI SEGUE $y(t) = \pm k e^{t}$. IN CONCLUSIONE L'INTEGRALE GENERALE È

$$y(t) = k e^{t}, \quad k \in \mathbb{R}$$

GI 05 OTT 2023

OSSERVAZIONE: LO STESSO METODO SI APPLICA, IN GENERALE, ALLE EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$y'(t) = f(t)\, g(y(t))$$

CON f E g FUNZIONI CONTINUE.

0 LE SOLUZIONI BANALI $y(t) = c$ SI TROVANO RISOLVENDO L'EQUAZIONE

$$0 = f(t)\, g(c)$$

E QUINDI (ESCLUSO IL CASO $f = 0$)

$$g(c) = 0.$$

1 SEPARO LE VARIABILI:

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$$

E INTEGRO AMBO I MEMBRI

MA 10 OTT 2023

OSSERVAZIONE: CERTE EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI NON HANNO SOLUZIONI BANALI.

ESEMPIO: $y' = \frac{1}{y}$; $y' = \operatorname{sen} y$ HA LE SOLUZIONI BANALI $y(t) = k\pi$ PER $k \in \mathbb{Z}$.

L'EQUAZIONE $y' = e^{y}$ NON HA SOLUZIONI BANALI. QUELLE NON BANALI SI TROVANO SEPARANDO LE VARIABILI: $e^{-y} y' = 1$ E INTEGRANDO: $\int e^{-y} y'\, dt = \int e^{-y}\, dy =$

$$= -e^{-y} + C; \quad \int 1\, dt = t + C;$$

DUNQUE $-e^{-y} = t + C$, $y(t) = -\log(C - t)$

IL PASSAGGIO $\int e^{-y} y'\, dt = \int e^{-y}\, dy$ RISULTA DALLA REGOLA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE, DOVE y DENOTA AL PRIMO MEMBRO LA FUNZIONE INCOGNITA: $\int e^{-y(t)} y'(t)\, dt$ COSÌ COME NELL'EQUAZIONE $y'(t) = e^{y(t)}$. AL SECONDO MEMBRO, PER BREVITÀ, y DENOTA LA NUOVA VARIABILE DI INTEGRAZIONE, LEGATA A t DALLA RELAZIONE $y = y(t)$. SI PUÒ LEGITTIMAMENTE PORRE $z = y(t)$ E SI OTTIENE $\frac{dz}{dt} = y'(t)$

QUINDI $dz = y'(t)\, dt$ E $\int e^{-y(t)} y'(t)\, dt =$

$$= \int e^{-z}\, dz = -e^{-z} + C = -e^{-y(t)} + C.$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

PER ESSE SONO NOTE PROPRIETÀ ELEGANTI.

DEFINIZIONE: UN'EQUAZIONE LINEARE DI ORDINE n È UN'EQUAZIONE AVENTE LA FORMA

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = f(t)$$

CON $a_n(t)$ NON IDENTICAMENTE NULLO (SE NO DIVENTA $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t)$).

PUÒ AVERSI $f(t)$ IDENTICAMENTE NULLA: EQUAZIONE OMOGENEA.

ESEMPI. SONO LINEARI LE EQUAZIONI

$y' = f(t)$, $y' = y$, $y' = ky$

$y''(t) = -\omega^2 y(t)$ (OMOGENEE)

NON SONO LINEARI $y''(t) = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}(y(t))$

$y'(t) = y(t) \cdot (1 - y(t))$.

LE EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE SI POSSONO RISOLVERE PER QUADRATURE. VEDIAMO COME. (I) L'EQUAZIONE OMOGENEA $\sum_{k=0}^{1} a_k(t) y^{(k)}(t) = 0$ SI PUÒ RISCRIVERE $a_1(t)\, y'(t) = -a_0(t)\, y(t)$

CHE È UN'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI. SUPPONIAMO $a_0(t), a_1(t)$ FUNZIONI CONTINUE E $a_1(t) \neq 0$ PER OGNI t.

MA 10 OTT 2023

DISCUTIAMO L'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

$$y'(t) = -\frac{a_0(t)}{a_1(t)}\, y(t)$$

CHE HA LA FORMA $y' = f(t) \cdot g(y(t))$.

LA SOLUZIONE BANALE È $y(t) \equiv 0$.

QUELLE NON BANALI SI TROVANO INTEGRANDO

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{a_0(t)}{a_1(t)}.$$ SI OTTIENE

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int \frac{dy}{y} = \log|y(t)| + C$$

DA CUI $\log|y(t)| = -\int \frac{a_0(t)}{a_1(t)}\, dt$

QUINDI $y(t) = \pm e^{-\int \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt}$.

SAPENDO CHE $\int \frac{a_0(t)}{a_1(t)}\, dt = A(t) + C$

SI PUÒ SCRIVERE $y(t) = k e^{-A(t)}$ DOVE $k = \pm e^{-C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. QUINDI L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE

$a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = 0$ CON $a_0(t), a_1(t)$ CONTINUI E $a_1(t) \neq 0$

È $y(t) = k e^{-A(t)}$ CON k COSTANTE ARBITRARIA E $A(t)$ UNA PRIMITIVA DI $\frac{a_0(t)}{a_1(t)}$.

ESEMPIO: ATTRITO IN UN FLUIDO VISCOSO. L'EQUAZIONE $m y'' = -k y'$ È LINEARE E DEL SECONDO ORDINE, PERÒ, MANCANDO IL TERMINE $a_0(t)\, y(t)$ CONVIENE CERCARE LA FUNZIONE $z(t) = y'(t)$ LA QUALE SODDISFA $m z' = -k z$ LINEARE OMOGENEA DEL PRIMO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI.

SOLUZIONE BANALE: $z(t) \equiv 0$. ALTRE SOLUZIONI: $\int \frac{z'}{z}\, dt = \int -\frac{k}{m}\, dt = -\frac{k}{m} t + C$.

INOLTRE $\int \frac{z'}{z}\, dt = \int \frac{dz}{z} = \log|z(t)| + C$,

QUINDI $\log|z(t)| = -\frac{k}{m} t + C$ DA CUI

$z(t) = z_0\, e^{-\frac{k}{m} t}$, $z_0 \in \mathbb{R}$, E QUINDI

$$y(t) = \int z(t)\, dt = z_0 \int e^{-\frac{k}{m} t}\, dt =$$

$$= -\frac{m}{k} z_0\, e^{-\frac{k}{m} t} + C, \quad \text{CON}$$

$C, z_0 \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI HA LA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE. SUGGERIMENTO: PRENDO DUE SOLUZIONI $y_1(t)$ E $y_2(t)$ E DUE SCALARI $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ E VERIFICO CHE LA FUNZIONE $\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ È ANCORA SOLUZIONE.

SVOLGIMENTO. PRENDO $y_1(t) = -\frac{m}{k} z_1\, e^{-\frac{k}{m} t} + C_1$ E

$$y_2(t) = -\frac{m}{k} z_2\, e^{-\frac{k}{m} t} + C_2$$

E OSSERVO CHE $\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$

$$= -\frac{m}{k}\left(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\right) e^{-\frac{k}{m} t} + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

DUNQUE HA LA FORMA $-\frac{m}{k} z_0\, e^{-\frac{k}{m} t} + C$

CON $z_0 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ E $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ E PERTANTO È UNA SOLUZIONE.

IN GENERALE SI PUÒ DIMOSTRARE CHE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0$$

È UNO SPAZIO VETTORIALE.

DIMOSTRAZIONE. PRENDO DUE SOLUZIONI $y_1(t)$ E $y_2(t)$, DUNQUE $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_1^{(k)}(t) = 0$ E $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_2^{(k)}(t) = 0$, E DUE SCALARI λ_1 E λ_2. VERIFICO CHE LA FUNZIONE $\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ SODDISFA L'EQUAZIONE. INTENDO APPLICARE LA DEFINIZIONE, QUINDI MI PREPARO

$$\left(\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)\right)^{(k)} = \lambda_1 y_1^{(k)}(t) + \lambda_2 y_2^{(k)}(t)$$

E CON ESSE TROVO $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\left(\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\left(\lambda_1 y_1^{(k)}(t) + \lambda_2 y_2^{(k)}(t)\right)$. INFINE, PER LE PROPRIETÀ ALGEBRICHE, $\lambda_1 \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_1^{(k)}(t) + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_2^{(k)}(t)$ IL CHE È ZERO PER LE IPOTESI.

LA TESI NON DIPENDE DALLA CONTINUITÀ DEI COEFFICIENTI $a_k(t)$. SE PERÒ TUTTI GLI $a_k(t)$ SONO CONTINUI, E RISULTA $a_n(t) \neq 0$ PER OGNI t, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È UGUALE ALL'ORDINE DELL'EQUAZIONE.

AD ESEMPIO LE SOLUZIONI DI $m y'' = -k y'$ SONO $y(t) = -\frac{m}{k} z_0 e^{-\frac{k}{m}t} + C$

E COSTITUISCONO UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE 2 PERCHÉ LE SOLUZIONI $e_1(t) = -\frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$ E $e_2(t) = 1$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E PERMETTONO DI SCRIVERE $y(t) = z_0 e_1(t) + C e_2(t)$.

<u>OSSERVAZIONE</u>: L'IPOTESI $a_n(t) \neq 0$ SERVE PER POTER SCRIVERE L'EQUAZIONE IN FORMA NORMALE: $y^{(n)}(t) = \frac{-1}{a_n(t)} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, y^{(k)}(t)$

GI 12 OTT 2023

$\boxed{\text{L'EQUAZIONE CARATTERISTICA}}$

L'EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA A COEFFICIENTI COSTANTI $\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(t) = 0$ È ASSOCIATA ALL'EQUAZIONE ALGEBRICA $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, DETTA EQUAZIONE CARATTERISTICA, LA QUALE, PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA, HA n SOLUZIONI, EVENTUALMENTE COINCIDENTI (SUPPONIAMO $a_n \neq 0$). SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, SE $\lambda \in \mathbb{C}$ È UNA SOLUZIONE DI $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$ DI MOLTEPLICITÀ $m \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$ ALLORA LE FUNZIONI $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1} e^{\lambda t}$ SONO m SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(t) = 0$.

<u>ESERCIZIO</u> TROVARE L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $m y'' = -k y'$ E DETERMINARE DI CONSEGUENZA DUE SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

MA 17 OTT 2023

<u>SVOLGIMENTO</u> L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È $m\lambda^2 + k\lambda = 0$, UNA SOLUZIONE È $\lambda = 0$ E L'ALTRA $\lambda = -k/m$. DUNQUE DUE SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI DELL'EQUAZIONE $m y'' = -k y'$ SONO $y_1(t) = 1$ E $y_2(t) = e^{-\frac{k}{m}t}$.

 MA 17 OTT 2023

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE, OMOGENEA, A COEFFICIENTI COSTANTI $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = 0$ CON $n \geq 1$ E $a_n \neq 0$.

SUPPONIAMO CHE λ SIA UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$ DI MOLTEPLICITÀ $m \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$.

DIMOSTRIAMO CHE LA FUNZIONE $y(t) = e^{\lambda t}$ SODDISFA L'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = 0$.

INTENDO APPLICARE LA DEFINIZIONE, QUINDI MI PREPARO $y^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$ E OTTENGO

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$$

E QUESTA SOMMA È NULLA PER IPOTESI, LA TESI SEGUE.

OSSERVAZIONE: PUÒ CAPITARE CHE $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ COME AVVIENE PER L'EQUAZIONE $y''(t) = -\omega^2 y(t)$ LE CUI SOLUZIONI SONO $y(t) = A\cos\omega t + B \operatorname{sen}\omega t$ OVVERO $y(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$.

IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ LE CUI SOLUZIONI SONO $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ESSENDO i L'UNITÀ IMMAGINARIA. IN CORRISPONDENZA AD ESSE SI TROVANO LE FUNZIONI $y_1(t) = e^{i\omega t}$ E $y_2(t) = e^{-i\omega t}$ QUINDI L'INTEGRALE GENERALE DI $y''(t) = -\omega^2 y(t)$ È $y(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ CON $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

SAPENDO CHE $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t$

OTTENIAMO
$$y(t) = C_1(\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t).$$

QUALI, FRA QUESTE, SONO FUNZIONI A VALORI REALI?

PER RISPONDERE, SCRIVIAMO $C_1 = A_1 + iB_1$ E $C_2 = A_2 + iB_2$ CON $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathbb{R}$.

COSÌ FACENDO, OTTENIAMO:

$$y(t) = (A_1 + iB_1)(\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t) + (A_2 + iB_2)(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t).$$

$$= (A_1 + A_2)\cos\omega t + (B_2 - B_1)\operatorname{sen}\omega t + i\left[(B_1 + B_2)\cos\omega t + (A_1 - A_2)\operatorname{sen}\omega t\right]$$

SCEGLIENDO $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$ E $B_1 = -B_2 = -\frac{B}{2}$

OTTENGO LE SOLUZIONI A VALORI REALI:

$$y(t) = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t.$$

 MA 17 OTT 2023

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI NON OMOGENEE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = f(t)$$

SE $f(t) \neq 0$, L'INSIEME DELLE SOLUZIONI NON SARÀ UNO SPAZIO VETTORIALE. TUTTAVIA VALE IL SEGUENTE LEMMA: SE $z_1(t)$ E $z_2(t)$ SONO DUE SOLUZIONI, ALLORA LA DIFFERENZA $y(t) = z_1(t) - z_2(t)$ È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE

APPLICO LA DEFINIZIONE, E PERCIÒ MI PREPARO

$$y^{(k)}(t) = \left(z_1(t) - z_2(t)\right)^{(k)} = z_1^{(k)}(t) - z_2^{(k)}(t)$$

E COSÌ OTTENGO $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\left(z_1^{(k)}(t) - z_2^{(k)}(t)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(a_k(t)\, z_1^{(k)}(t) - a_k(t)\, z_2^{(k)}(t)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_1^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_2^{(k)}(t)$$

$$= f(t) - f(t) = 0$$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE

VICEVERSA: SE $z_2(t)$ SODDISFA L'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_2^{(k)}(t) = f(t)$ E $y(t)$ SODDISFA $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0$, ALLORA LA FUNZIONE $z_1(t) = z_2(t) + y(t)$ SODDISFA $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_1^{(k)}(t) = f(t)$.

DIMOSTRAZIONE: INTENDO APPLICARE LA DEFINIZIONE, QUINDI MI PREPARO $z_1^{(k)}(t) = z_2^{(k)}(t) + y^{(k)}(t)$. SOSTITUENDO, TROVO

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_1^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\left(z_2^{(k)}(t) + y^{(k)}(t)\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(a_k(t)\, z_2^{(k)}(t) + a_k(t)\, y^{(k)}(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z_2^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = f(t)$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

MA 17 OTT 2023

METTENDO INSIEME LE OSSERVAZIONI PRECEDENTI SI PUÒ DUNQUE DIMOSTRARE CHE:

TEOREMA SE L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = 0$ È $y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t)$ E $z_0(t)$ È UNA SOLUZIONE DI $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t) = f(t)$, ALLORA L'INTEGRALE GENERALE DI QUEST'ULTIMA EQUAZIONE È $z(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t) + z_0(t)$.

L'IMPORTANZA DEL TEOREMA STA NEL FATTO CHE, PER TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t) = f(t)$, BASTA TROVARNE UNA!

GI 19 OTT 2023

COME TROVARE UNA SOLUZIONE $z_0(t)$ DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t) = f(t)$

(A) METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE

SUPPONIAMO CHE I COEFFICIENTI $a_k(t)$ E LA FUNZIONE $f(t)$ SIANO CONTINUI, E $a_n(t) \neq 0$ PER OGNI t. ALLORA L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t) = 0$ HA LA FORMA $y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t)$ ESSENDO $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI, E $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ESISTONO FUNZIONI OPPORTUNE $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ TALI CHE LA FUNZIONE $z_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, y_i(t)$ SODDISFA L'EQUAZIONE COMPLETA $\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, z^{(k)}(t) = f(t)$.

LE FUNZIONI $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ SI POSSONO TROVARE PER QUADRATURE. VEDIAMO LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO $n=1$. CONSIDERIAMO DUNQUE L'EQUAZIONE $a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = f(t)$

(I) SAPPIAMO DA MARTEDÌ 10/10 CHE L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = 0$ È $y(t) = k\, e^{-A(t)}$ DOVE $A(t)$ È UNA PRIMITIVA DEL RAPPORTO $\frac{a_0(t)}{a_1(t)}$ E $k \in \mathbb{R}$.

 GI 19 OTT 2023

(II) DIMOSTRIAMO CHE ESISTE UNA FUNZIONE $\varphi(t)$, OPPORTUNA, TALE CHE LA FUNZIONE $z_0(t) = \varphi(t)\, e^{-A(t)}$ SODDISFA L'EQUAZIONE

$$a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = f(t).$$

STRATEGIA: SOSTITUIAMO $z_0(t)$ NELL'EQUAZIONE E DETERMINIAMO DI CONSEGUENZA $\varphi(t)$. SI HA:

$$z_0'(t) = \left(\varphi'(t) - \frac{a_0(t)}{a_1(t)}\varphi(t)\right) e^{-A(t)}$$

QUINDI $a_1(t) z_0'(t) + a_0(t) z_0(t) =$

$$= \left(a_1(t)\varphi'(t) - a_0(t)\varphi(t) + a_0(t)\varphi(t)\right) e^{-A(t)}$$

$= a_1(t)\varphi'(t)\, e^{-A(t)}$ E PERCIÒ $z_0(t) = \varphi(t) \cdot e^{-A(t)}$ SODDISFA L'EQUAZIONE COMPLETA

$a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = f(t)$ SE E SOLO

IL TERMINE $a_1(t)\varphi'(t)\, e^{-A(t)}$ COINCIDE CON $f(t)$.

NON RESTA CHE DETERMINARE $\varphi(t)$ IN MODO TALE CHE $a_1(t)\varphi'(t)\, e^{-A(t)} = f(t)$, E CIOÈ

$\varphi'(t) = \dfrac{f(t)}{a_1(t)}\, e^{A(t)}$. DUNQUE PRENDIAMO

$\varphi(t)$ = UNA PRIMITIVA DI $\dfrac{f(t)}{a_1(t)}\, e^{A(t)}$.

IN CONCLUSIONE L'INTEGRALE GENERALE DI

$a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = f(t)$ È

$$z(t) = k\, e^{-A(t)} + z_0(t)$$
$$= k\, e^{-A(t)} + \varphi(t)\, e^{-A(t)}$$
$$= \left(\varphi(t) + k\right) e^{-A(t)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

SI SUOLE SCRIVERE $z(t) = e^{-A(t)} \displaystyle\int \frac{f(t)}{a_1(t)}\, e^{A(t)}\, dt$.

(B) METODO DI SOMIGLIANZA: È DESCRITTO A PAG. 266 DEL TESTO. VEDIAMO UN'APPLICAZIONE. CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE $y''(t) = -\omega^2 y(t) + A\cos\alpha t$. SE $\alpha \neq \pm\omega$ CERCHIAMO $z_0(t) = C_1 \cos\alpha t + C_2\, \mathrm{sen}\, \alpha t$ CON C_1, C_2 OPPORTUNE. SE, INVECE, $\alpha = \omega$, CERCHIAMO $z_0 = C_1\, t\cos\omega t + C_2\, t\, \mathrm{sen}\, \omega t$. ESERCIZIO.

SVOLGIMENTO NEL CASO $\alpha \neq \pm\omega$: DERIVO

$z_0(t) = C_1 \cos\alpha t \quad C_2\, \mathrm{sen}\, \alpha t$ E OTTENGO

$$z_0'(t) = \alpha C_2 \cos\alpha t \quad \alpha C_1\, \mathrm{sen}\, \alpha t$$

$$z_0''(t) = -\alpha^2 C_1 \cos\alpha t - \alpha^2 C_2\, \mathrm{sen}\, \alpha t$$

QUINDI $z_0''(t) + \omega^2 z_0(t) =$

$$= \left(-\alpha^2 C_1 + \omega^2 C_1\right)\cos\alpha t +$$
$$+ \left(-\alpha^2 C_2 + \omega^2 C_2\right)\mathrm{sen}\, \alpha t$$

E L'EQUAZIONE DATA È SODDISFATTA SE E SOLO SE $C_2 = 0$ E $(\omega^2 - \alpha^2)\, C_1 = A$

DUNQUE $C_1 = \dfrac{A}{\omega^2 - \alpha^2}$, PERCIÒ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE È $z_0(t) = \dfrac{A}{\omega^2 - \alpha^2}\cos\alpha t$

SVOLGIMENTO NEL CASO $\alpha = \omega$. DERIVANDO

$$z_0 = C_1 t \cos \omega t + C_2 t \operatorname{sen} \omega t$$

TROVIAMO

$$z_0'(t) = \left(C_1 + C_2 t \omega\right) \cos \omega t + \left(-C_1 t \omega + C_2\right) \operatorname{sen} \omega t$$

E

$$\begin{aligned} z_0''(t) &= \left(C_2 \omega - C_1 t \omega^2 + C_2 \omega\right) \cos \omega t + \left(-C_1 \omega - C_2 t \omega^2 - C_1 \omega\right) \operatorname{sen} \omega t \\ &= \left(2C_2 - C_1 t \omega\right) \omega \cos \omega t + \left(-2C_1 - C_2 t \omega\right) \omega \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

QUINDI IL PRIMO MEMBRO DELL'EQUAZIONE DIVENTA

$$\begin{aligned} &\left(2C_2 - C_1 t \omega\right) \omega \cos \omega t + \left(-2C_1 - C_2 t \omega\right) \omega \operatorname{sen} \omega t + C_1 t \omega^2 \cos \omega t + C_2 t \omega^2 \operatorname{sen} \omega t = \\ &= \left(2C_2 - C_1 t \omega + C_1 t \omega\right) \omega \cos \omega t + \left(-2C_1 - C_2 t \omega + C_2 t \omega\right) \omega \operatorname{sen} \omega t \\ &= 2 C_2 \omega \cos \omega t - 2 C_1 \omega \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

E COINCIDE COL SECONDO MEMBRO $A \cos \omega t$ SE PRENDO $C_1 = 0$ E $C_2 = \dfrac{A}{2\omega}$. INSERENDO QUESTI VALORI NELL'ESPRESSIONE DI z_0 OTTENIAMO

$$z_0(t) = \frac{A}{2\omega} t \operatorname{sen} \omega t$$

MA 24 OTT 2023

PARTE FACILE E PARTE DIFFICILE DEL PROBLEMA AI VALORI INIZIALI

PARTE FACILE: DATA L'EQUAZIONE IN FORMA NORMALE, MAGARI LINEARE, MAGARI A COEFFICIENTI COSTANTI, MAGARI DEL SECONDO ORDINE

$$y''(t) = a_1 y'(t) + a_0 y(t) + f(t)$$

SUPPONIAMO DI AVERE TROVATO L'INTEGRALE GENERALE $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + z_0(t)$ CON $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ASSEGNATE LE CONDIZIONI INIZIALI $y(t_0) = y_0$ (DATO) E $y'(t_0) = y_1$ (DATO) POSSIAMO TROVARE C_1 E C_2 IN MODO TALE DA SODDISFARLE. SI HA, INFATTI, $y(t_0) = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) + z_0(t_0)$ E $y'(t_0) = C_1 y_1'(t_0) + C_2 y_2'(t_0) + z_0'(t_0)$ E QUINDI C_1 E C_2 SI RICAVANO DAL SISTEMA

$$\begin{cases} y_1(t_0)\, C_1 + y_2(t_0)\, C_2 = y_0 - z_0(t_0) \\ y_1'(t_0)\, C_1 + y_2'(t_0)\, C_2 = y_1 - z_0'(t_0) \end{cases}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, SE $y_1(t)$ E $y_2(t)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, LA MATRICE DEI COEFFICIENTI

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

DETTA MATRICE WRONSKIANA, È INVERTIBILE QUINDI IL SISTEMA HA UNA E UNA SOLA SOLUZIONE (C_1, C_2).

MA 24 OTT 2023

PARTE DIFFICILE: SE LA FUNZIONE AL SECONDO MEMBRO $f(t, y_0, \dots, y_{n-1})$ È DI CLASSE C^1 IN UN INTORNO n-DIMENSIONALE DEL PUNTO $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ LE CUI COORDINATE SONO I DATI INIZIALI, ALLORA ESISTE UN INTERVALLO $(t_0 - \delta, \ t_0 + \delta)$ NEL QUALE ESISTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA AI VALORI INIZIALI (TEOREMA DI CAUCHY).