Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - Analisi complessa (13/09/2023)

Esercizio 1.
Calcolare i seguenti integrali:
i) $\int_\gamma \overline{z}^3\, dz$, dove γ è la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2 (**2 punti**);
ii) $\int_\gamma \frac{2}{z^3(9-z^2)}\, dz$, dove $\gamma(t)$ è il quadrato di lato 2 le cui diagonali si intersecano nell'origine (**2 punti**);
iii) $\int_\gamma \frac{2}{z^3(9-z^2)}\, dz$, dove $\gamma(t)$ è la circonferenza centrata nel punto $z_0 = 6i$ e di raggio 1 (**2 punti**);
iv) se possibile, ricavare il risultato del punto ii) in un modo diverso da quello usato in precedenza (**2 punti**).

Esercizio 2.
a) Calcolare, se possibile, la trasformata di Fourier della trasformata di Fourier della funzione $f(t) = e^{-|t|}$ (cioé $\mathcal{F}^2[f(t)](\omega)$) (**4 punti**).
b) Trovare la soluzione $y(t)$, $t \geq 0$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 6 = 1 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

utilizzando la trasformata di Laplace (**4 punti**).

Domanda 1.
i) Cos'è una funzione primitiva? (**1 punto**)
ii) Se una funzione è olomorfa in un aperto, allora ammette una primitiva in tale aperto? Giustificare la risposta, eventualmente anche facendo qualche esempio (**2 punti**).
iii) Il viceversa del punto ii) è vero? Se si, quando? (**2 punti**)
iv) Dimostrare il "Teorema fondamentale del calcolo integrale" per funzioni complesse (prima parte) e giustificare la seconda parte dell'enunciato (**3 punti**).

Domanda 2.
i) Definire quando una funzione si dice anti-trasformabile secondo Fourier e, in tal caso, definire la sua Fourier anti-trasformata (**2 punti**).
ii) Dimostrare la "formula di simmetria" nel contesto della trasformazione di Fourier (**4 punti**).