Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

8 settembre 2023

Esercizio 1

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,2,0) = (1,1,0)$, $f(-1,0,1) = (1,2,1)$ e $(0,1,1) \in \ker(f)$.

a) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$
b) Dire se il vettore $(3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(f)$.
c) Trovare una base di $\ker(f)$
d) Trovare $(g \circ f)(1,1,1)$, dove $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1,1),(0,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è la seguente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Stabilire per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (k+2)x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ (k+2)x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2kx_1 - 3x_2 + 3x_3 = h - 1 \end{cases}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.

Esercizio 3

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali, e

$$f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione tale che

$$f(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Verifica che f è un'applicazione lineare
b) Trova gli autovalori e gli autospazi di f
c) Stabilisci se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trova una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f