Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

7 luglio 2023

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ \ x_2 - x_3 + x_4).$$

ed il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W = L\big((-1,1,k,1-k),(1+k,1,k,-1)\big)$$

dove k è un parametro reale.

a) Trovare una base di $\ker(f)$
b) Determinare tutti i valori del parametro reale k per i quali si ha $\ker(f) + W \neq \mathbb{R}^4$
c) Per $k = 0$, determinare una base di $\ker(f) + W$ e poi completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile e, in caso affermativo, trovare esplicitamente le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + (k-3)x_4 = k \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + (k+1)x_4 = 1 \\ kx_1 + k^2x_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

Sia V il sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dato da

$$V = L\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

Si consideri l'endomorfismo $f\colon V \longrightarrow V$ di V, la cui matrice associata rispetto alla base $B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ di V è

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Stabilire se il vettore $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$ appartiene a $\mathrm{Im}(f)$
b) Trovare una base di ciascun autospazio di f
c) Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di V formata da autovettori di f