LE SOLUZIONI DELL'ESAME DI GEOMETRIA 1 DEL 7/7/23

ESERCIZIO 1

a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -2s \\ x_2 = -t \end{cases}$$

$rg = 2$

$x_3 = s, \quad x_4 = t$

$\Rightarrow \quad x_2 = -t, \quad x_1 = -2s - t, \quad x_3 = s, \quad x_4 = t.$

Quindi $\ker(f) = \{(-2s-t, -t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(-2s, 0, s, 0) + (-t, -t, 0, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{s(-2, 0, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$

$= L((-2, 0, 1, 0), (-1, -1, 0, 1))$

Poiché i vettori $(-2, 0, 1, 0)$ e $(-1, -1, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, $\{(-2, 0, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$ è base di $\ker(f)$.

b) $\ker(f) + W$ è sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Allora si ha $\ker(f) + W = \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \dim(\ker f + W) = \dim \mathbb{R}^4$

$\Leftrightarrow \quad \dim(\ker(f)) + \dim(W) - \dim(\ker(f) \cap W) = 4$

Troviamo innanzitutto $\dim W$.

Notiamo che i generatori di W, $(-1, 1, k, 1-k)$ e $(1+k, 1, k, -1)$, sono linearmente indipendenti se e solo se

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & k & 1-k \\ 1+k & 1 & k & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Il minore $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1+k & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da 0 se e solo se

$-1-1-k \neq 0$ cioè $k \neq -2$. Quindi $\forall k \neq -2$ rango $=2$.

Per $k=-2$ la matrice diventa $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ che ha

ancora rango 2, dato che

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0.$$

In conclusione i vettori $(-1, 1, k, 1-k)$ e $(1+k, 1, k, -1)$ sono linearmente indipendenti $\forall k \in \mathbb{R}$.

Allora $\dim W = 2$. $\forall k \in \mathbb{R}$.

Quindi $\ker f + W = \mathbb{R}^4 \iff$

$$2 + 2 - \dim(\ker f \cap W) = 4$$

$\iff \dim(\ker f \cap W) = 0$, da cui $\ker f + W \neq \mathbb{R}^4 \iff$

$\dim(\ker f \cap W) > 0$.

Affinché ciò accada basta che i vettori che compongono le basi di $Ker(f)$ e W sono linearmente dipendenti, cioè

$$0 = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & k & 1-k \\ 1+k & 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 1-k \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-k \\ 1+k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$C_1 \to C_1 + C_3$ $\qquad\qquad$ $R_2 \to R_2 + R_3$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2-k & k & 1-k \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ k & 2 & -k \\ 1+k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$C_1 \to C_1 + C_3$

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 2-k & k \\ 0 & k \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot k \cdot (2-k) + k(k-2)$$

$$= (k-2)(2k+k)$$

$$= 3k(k-2).$$

In conclusione $Ker(f) + W \neq \mathbb{R}^4 \iff k = 0 \vee k = 2$.

c) Se $k = 0$ $\quad W = L((-1,1,0,1),(1,1,0,-1))$

Pertanto

$$\operatorname{Ker}(f) + W = L((-1,1,0,1),(1,1,0,-1),(-2,0,1,0),(-1,-1,0,1))$$

Al fine di trovare il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra i generatori di $\operatorname{Ker}(f) + W$ osserviamo che rank [illegible] comunque < 4 (per il punto precedente) ed è [illegible]. Verifichiamo se il terzo vettore è combinazione lineare dei primi due cioè se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned}(-2,0,1,0) &= \alpha(-1,1,0,1) + \beta(1,1,0,-1)\\ &= (-\alpha,\alpha,0,\alpha) + (\beta,\beta,0,-\beta)\\ &= (-\alpha+\beta,\ \alpha+\beta,\ 0,\ \alpha-\beta) \quad \Rightarrow 1 = 0\end{aligned}$$

[illegible] $\{(-1,1,0,1),(1,1,0,-1),(-2,0,1,0)\}$ è base

[illegible]

[illegible] $\mathbb{R}^4$, consideriamo i vettori

[illegible]

ed estraiamo il massimo numero di vettori lin. indipendenti tra di essi.

Per quanto visto prima v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Vediamo se $e_1 \in L(v_1, v_2, v_3)$.

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3, e_1\}$ è base di $\mathbb{R}^4$.

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + (k-3)x_4 = k \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + (k+1)x_4 = 1 \\ kx_1 + k^2 x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & k-3 \\ 2 & 1 & 2 & k+1 \\ k & 0 & k^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & k-3 & k \\ 2 & 1 & 2 & k+1 & 1 \\ k & 0 & k^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2.$$

Considero l'orlato $\begin{pmatrix} 1 & 0 & k-3 \\ 2 & 1 & k+1 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & k-3 \\ 2 & 1 & k+1 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & k-3 \\ k & 0 \end{pmatrix} = -k(k-3)$$

Quindi se $k \neq 0$ e $k \neq 3$ $rg(A) = 3 = rg(A|B)$.

Per $k=0$ l'altro orlato ha determinante

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad rg(A) = 2$$

Per $k=3$ l'altro orlato ha determinante

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad rg(A) = 2$$

Passiamo a $A|B$.

Per $k=0$ $\qquad A|B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$rg(A)=2$ dato che l'ultima riga è nulla

Per $k=3$ $\qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

l'unico orlato non ancora esaminato ha determinante

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -9 \neq 0$$

da cui $rg(A|B)=3$.

<u>Riassumendo</u>

- Per $k \neq 0$ e $k \neq 3$ $\quad rg(A)=3=rg(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni
- Per $k=0$ $\quad rg(A)=2=rg(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni
- Per $k=3$ $\quad rg(A)=2$ e $rg(A|B)=3 \Rightarrow$ il sistema è incompatibile

Troviamo le soluzioni.

- $k \neq 0, \; k \neq 3$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + (k-3)x_4 = k - 3s \\ 2x_1 + x_2 + (k+1)x_4 = 1 - 2s \\ kx_1 = -k^2 s \end{cases} \qquad x_3 = s$$

Dall'ultima equazione si ha $x_1 = -ks$. Sostituendo nella prima equazione si ha

$$x_4 = \frac{ks + k - 3s}{k-3}$$

Inoltre

$$x_2 = 1 - 2s + 2ks - \frac{k+1}{k-3}(ks + k - 3s)$$

L'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \left(-ks,\; 1-2s+2ks - \frac{k+1}{k-3}(ks+k-3s),\; s,\; \frac{ks+k-3s}{k-3} \right) : s \in R \right\}$$

- $k = 3$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = [illegible] - (k-3)t \\ 2x_1 + x_2 = [illegible] - (k+1)t \end{cases} \qquad x_3 = s, \; x_4 = t$$

Sostituendo nella seconda equazione,

$$x_2 = 1 - 2s - (k+1)t - 2k + 6s + 2(k-3)t$$
$$= 1 + 4s + (k-7)t - 2k$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(k - 3s - (k-3)t,\ 1 - 2k + 4s + (k-7)t,\ s,\ t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

ESERCIZIO 3

$$V = \mathcal{L}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \right)$$

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Im(f) \iff v \in \mathcal{L}(f(v_1), f(v_2), f(v_3)) =$

$= \mathcal{L}(2v_1 + v_2,\ v_2,\ v_2 + v_3) \iff \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = \alpha(2v_1 + v_2) + \beta v_2 + \gamma(v_2 + v_3)$$
$$= 2\alpha v_1 + (\alpha + \beta + \gamma) v_2 + \gamma v_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (\alpha+\beta+\gamma)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\alpha & 3\alpha + \beta + \gamma \\ \gamma & -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha = 1 & \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 2 & \longrightarrow \beta = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 & \longrightarrow \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta - \gamma = -1 & \longrightarrow \beta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $v = \frac{1}{2}(2v_1 + v_2) + \frac{1}{2} v_2 + 0 \cdot (v_2 + v_3)$ e possiamo concludere che $v \in Im(f)$.

b) $P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

Due autovalori: $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 1

$\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 2

• $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(1) \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \end{matrix}$

Quindi

$V(1) = \{0 \cdot v_1 + s \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 : s \in \mathbb{R}\}$

$= L(v_2) = L\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Una base di $V(1)$ è $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

• $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(2) \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2x_1 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{matrix} x_1 = s \\ x_2 = s, \quad x_3 = 0 \end{matrix}$

Quindi $V(2) = \{s v_1 + s v_2 + 0 \cdot v_3 : s \in \mathbb{R}\} = L(v_1 + v_2) = L\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Una base di $V(2)$ è $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

c) f NON è diagonalizzabile, perché $m_a(1) \neq m_g(1)$.