Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

16 giugno 2023

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale reale e $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione lineare $f: V \longrightarrow V$ la cui matrice associata rispetto alla base B è

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di $\ker(f)$
b) Trovare una base di $\mathrm{Im}(f)$

Data inoltre l'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$ tale che $g(1,0) = \mathbf{v}_2$ e $g(0,1) = \mathbf{v}_3$, si consideri l'insieme

$$W = \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) \in \mathrm{Im}(g)\}$$

c) Stabilire se W è sottospazio vettoriale di V. In caso affermativo, trovare la dimensione di W.

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, trovare gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kx_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ (1-k)x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 - kx_5 = 1 \\ x_1 + x_4 = k \end{cases}$$

è compatibile e, in corrispondenza di tali valori, trovare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 3

Si considerino i seguenti vettori di $M_2(\mathbb{R})$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Posto $V = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, si consideri l'endomorfismo $f: V \longrightarrow V$ tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \qquad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2, \qquad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

a) Trovare una base per ciascun autospazio di f
b) Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di V formata da autovettori di f.