Le soluzioni dell'esame scritto di Geometria 1

16 Giugno 2023

Esercizio 1

a) $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 \in \ker(f) \iff$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$rg = 3$

$$x_1 = t \quad e \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = -t \\ x_3 = 2t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui $x_1 = t$, $x_2 = -3t$, $x_3 = 2t$, $x_4 = 0$.

Quindi

$$\ker(f) = \{t v_1 - 3t v_2 + 2t v_3 + 0 \cdot v_4 : t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{t(v_1 - 3v_2 + 2v_3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

$$= L(v_1 - 3v_2 + 2v_3)$$

Una base di $\ker(f)$ è $\{v_1 - 3v_2 + 2v_3\}$.

b) $\mathrm{Im}(f) = L(f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4))$

$= L(v_1 - 2v_2 + v_3, \ v_1 + v_3, \ v_1 + v_2 + v_3, \ v_4)$

$= L(v_1 - 2v_2 + v_3, \ v_1 + v_3, \ v_4)$

la terza colonna è combinazione lineare delle prime due colonne, e $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}\, M_{BB}(f) = 3$

Una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $B = \{ v_1 - 2v_2 + v_3, \ v_1 + v_3, \ v_4 \}$.

c) Dimostriamo che W è sottospazio di V.

$\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \quad \forall w, w' \in W$

$$f(\lambda w + \lambda' w') \underset{f \text{ lineare}}{=} \lambda \underbrace{f(w)}_{\in \mathrm{Im}(g)} + \lambda' \underbrace{f(w')}_{\in \mathrm{Im}(g)} \in \mathrm{Im}(g).$$

$\mathrm{Im}(g)$ sottospazio

$\Rightarrow \lambda w + \lambda' w' \in W.$

Troviamo $\dim(W)$. Ebbene

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 \in W \Leftrightarrow f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4) \in$

$\mathrm{Im}(g) = L(g(1,0), g(0,1)) = L(v_2, v_3) \Leftrightarrow$

$x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + x_3 f(v_3) + x_4 f(v_4) \in L(v_2, v_3) \Leftrightarrow$

$$x_1(v_1 - 2v_2 + v_3) + x_2(v_1 + v_3) + x_3(v_1 + v_2 + v_3) + x_4 v_4 \in$$

$$\in L(v_2, v_3) \iff$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)v_1 + (-2x_1 + x_3)v_2 + (x_1 + x_2 + x_3)v_3 + x_4 v_4 \in$$

$$\in L(v_2, v_3) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = s \qquad \begin{cases} x_3 = -s - t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$
$$x_2 = t$$

Quindi

$$W = \{ s v_1 + t v_2 + (-s-t) v_3 + 0 \cdot v_4 : s, t \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ s(v_1 - v_3) + t(v_2 - v_3) : s, t \in \mathbb{R} \}$$
$$= L(v_1 - v_3, v_2 - v_3).$$

Dato che $v_1 - v_3$, $v_2 - v_3$ sono anche linearmente indipendenti, si ha che $\dim W = 2$.

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} kx_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ (1-k)x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 - kx_5 = 1 \\ x_1 + x_4 = k \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 & 1 & -1 \\ 1-k & 1 & k & 1 & -k \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1-k & 1 & k & 1 & -k & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2.$$

Consideriamo l'orlato di tale minore dato da

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 1-k & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è k^2-1. Allora se $k \neq 1$ e $k \neq -1$ $rg(A)=3$.

Se $k=1$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A)=2$ perché $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0$ e $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$

Se $k=-1$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A)=2$ perché $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 \to R_1+R_2}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ e

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

In conclusione, $rg(A)=2$ per $k=1$ o $k=-1$,

$rg(A)=3$ per $k\neq 1$ e $k\neq -1$

Vediamo cosa succede per la matrice completa.

Per $k \neq 1$ e $k \neq -1$ $\quad rg(A|B) = rg(A) = 3.$

Per $k = 1$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & \cancel{0}1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg(A|B) = \cancel{2}3$$

Per $k = -1$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

Di conseguenza,

- Per $k \neq 1$ e $k \neq -1$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni
- Per $k = 1$ il sistema è incompatibile [redacted]

• Per $k=-1$ il sistema è incompatibile.

Troviamo le soluzioni.

$\underline{k \neq 1,\ k \neq -1}$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} k x_2 + x_3 = -s+t \\ (1-k)x_1 + x_2 + k x_3 = 1-s+kt \\ x_1 = k-s \end{cases}$$

$x_4 = s, \quad x_5 = t$

Sostituendo $x_1 = k-s$ si ottiene

$$\begin{cases} k x_2 + x_3 = -s+t \\ x_2 + k x_3 = (1-k)(s-k) \end{cases}$$

da cui
$$x_2 = \frac{1}{k^2-1} \det \begin{pmatrix} -s+t & 1 \\ (1-k)(s-k) & k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k(-s+t) - (1-k)(s-k)}{k^2-1}$$

$$x_3 = \frac{1}{k^2-1} \det \begin{pmatrix} k & -s+t \\ 1 & (1-k)(s-k) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k(1-k)(s-k) + s - t}{k^2-1}$$

ESERCIZIO 3

Intanto si ha che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Infatti

$$\mathbf{0} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$
$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 - \lambda_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 \quad - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \quad = 0 \\ \lambda_1 \quad = 0 \end{cases}$$

La matrice del sistema è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante è $\neq 0$, il sistema ammette come unica soluzione quella nulla.

Quindi $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di V.

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Vi sono due autovalori:

$\lambda = 2$, con molteplicità algebrica 1

$\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2

Cerchiamo gli autospazi.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(2) \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad x_1 = t \qquad \begin{cases} -x_2 + x_3 = -t \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi
$$\begin{aligned} V(2) &= \{ t v_1 + t v_2 + 0 \cdot v_3 : t \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ t(v_1 + v_2) : t \in \mathbb{R} \} \\ &= L(v_1 + v_2) \\ &= L\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è base di } V(2)$$

$\Rightarrow \dim V(2) = m_g(2) = 1$ (cosa che già sapevamo).

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(1) \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 = x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

da cui $x_2 = t, \quad x_1 = x_3 = 0$ e

$$V(1) = \{0 \cdot v_1 + t \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(v_2)$$

$\Rightarrow \dim V(1) = 1$, dato che $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ è base per $V(1)$.

Allora $m_g(1) \neq m_a(1) \Rightarrow f$ non è diagonalizzabile.