

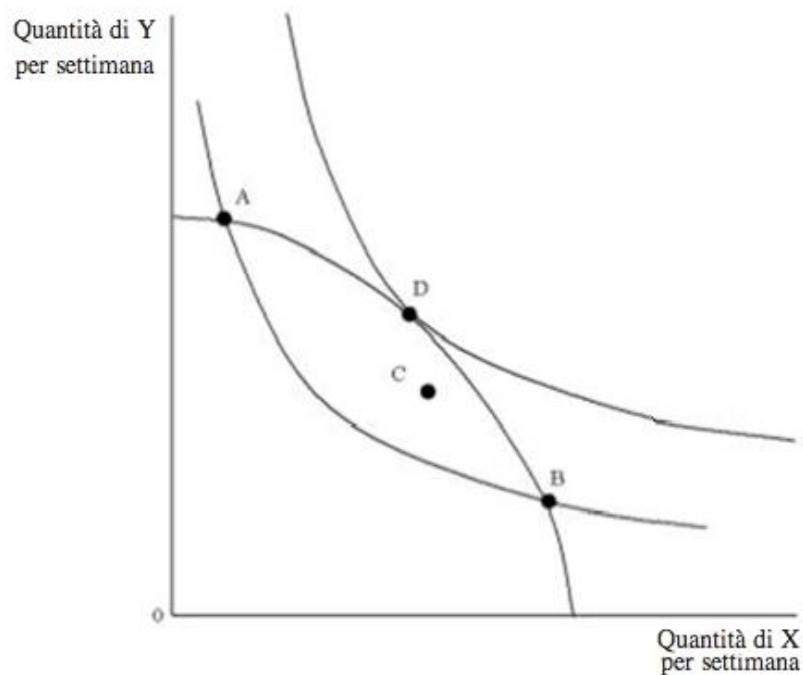
## ESERCITAZIONE 10 (Modulo B)

8 Giugno 2023

### Equilibrio economico generale, esternalità e beni pubblici

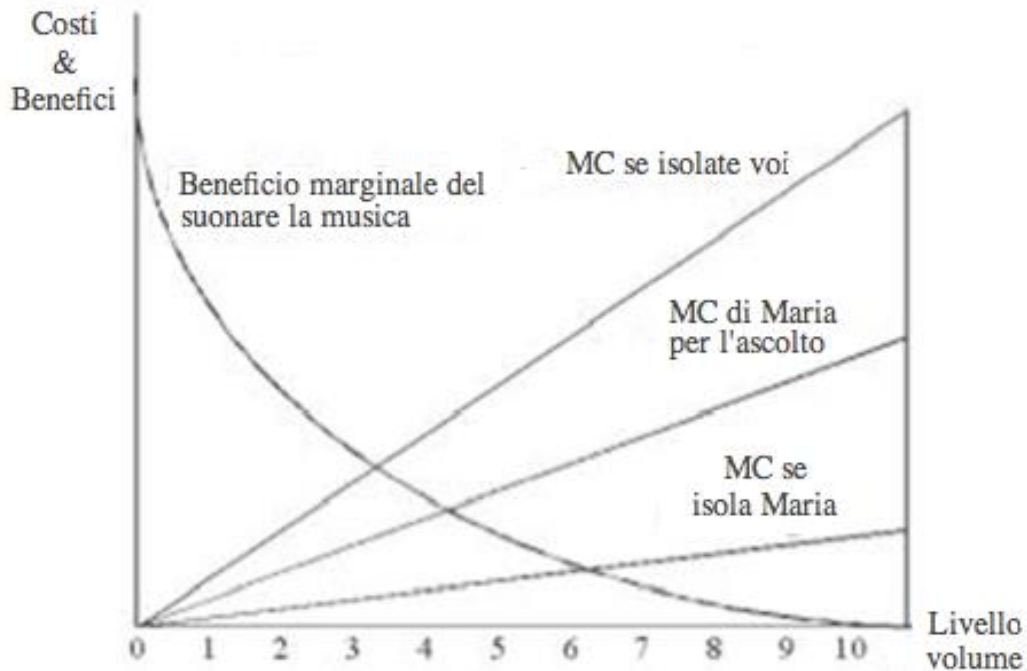
#### 1 TEORIA

DOMANDA 1 Il diagramma riportato sotto mostra il modello di equilibrio generale per una piccola economia. Per questa economia, l'allocazione delle risorse economicamente efficiente avviene nel punto:



- a. A
- b. B
- c. C
- d. D

DOMANDA 2 Supponiamo che il problema sia il volume di un impianto stereo posto nel dormitorio. Nel grafico sotto, sull'asse orizzontale si trovano i numeri della manopola del volume. L'asse verticale misura i costi e i benefici dei vari livelli di musica (rumore). Inoltre, sempre sull'asse verticale, è misurato il costo relativo all'isolamento delle pareti per impedire alle esternalità di penetrarvi.



Se Maria avesse i diritti di proprietà dell'etere e la negoziazione fosse impossibile, quale sarebbe il risultato?

- Voi spegnereste lo stereo
- Voi fareste andare la musica a 3 e isolereste le pareti affinché Maria non senta la musica
- Fareste andare la musica a 6 e Maria isolerebbe le sue pareti
- Fareste andare la musica a 4 e Maria dovrebbe sorbirsi la vostra musica, anche se non le piace

## 2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1 Gli unici due beni a disposizione di Alice (A) e Bruno (B) sono il pane (X) e il latte (Y). Alice dispone inizialmente di solo 100 unità di pane e 50 di latte, mentre Bruno possiede 500 unità di pane e 250 di latte. Le funzioni di utilità dei soggetti sono identiche e sono pari a:

$$U_A(X_A; Y_A) = X_A^{\frac{2}{3}} Y_A^{\frac{1}{3}} \qquad U_B(X_B; Y_B) = X_B^{\frac{2}{3}} Y_B^{\frac{1}{3}}$$

- Rappresentare graficamente lo stato di questa economia con l'ausilio della scatola di Edgeworth.
- Trovate l'espressione analitica del saggio marginale di sostituzione tra pane e latte per Alice e Bruno.
- Ricavare l'espressione analitica della curva dei contratti, determinate se la dotazione iniziale è pareto efficiente e rappresentatela graficamente.

Ipotizzate ora che il Governo decida di intervenire e di ridistribuire le risorse trasferendo 200 chili di pane da Bruno ad Alice senza prevedere alcuna compensazione in termini di litri latte.

- Determinare se il nuovo paniere consumato dai soggetti, ipotizzando non avvengano scambi, è pareto efficiente.

ESERCIZIO 2 Alessandro (A) e Barbara (B) sono gli unici abitanti di un'isola deserta che si sono spartiti a metà. Per il loro sostentamento l'isola offre solo due beni, banane (X) e noci di cocco (Y), in quantità fisse pari a 240 quintali l'anno per le banane e altrettanti per le noci di cocco. Nella sua parte di isola, Alessandro raccoglie ogni anno 160 quintali di banane e 160 di noci di cocco. La sua funzione di utilità è:

$$U_A = X_A^3 Y_A$$

L'altra metà dell'isola consente a Barbara di raccogliere 80 quintali di banane e 80 di noci di cocco. La sua funzione di utilità è:

$$U_B = \ln X_B + \ln Y_B$$

- Verificare che la dotazione iniziale non soddisfa i requisiti di efficienza Paretiana.
- Determinare il prezzo relativo di equilibrio e il paniere corrispondente, nell'ipotesi in cui Alessandro e Barbara intraprendano scambi volontari.
- Verificare che le condizioni di efficienza Paretiana sono rispettate da tale equilibrio.
- Riportate i risultati nella scatola di Edgeworth

ESERCIZIO 3 Un governo deve decidere quale ammontare di bene pubblico fornire. Le curve della disponibilità a pagare di ognuno dei due cittadini di cui è composta questa collettività sono indicate dalle seguenti funzioni:

$$P_A = 2 - \frac{1}{6} Q_A$$

$$P_B = 4 - \frac{1}{3} Q_B$$

La curva del costo marginale del bene pubblico è data da  $MC = \frac{Q}{2}$ , dove  $Q$  è la quantità del bene. Vi è anche un costo fisso di 10 associato alla produzione del bene.

- a. Qual è la quantità ottimale di bene pubblico?
- b. Se entrambi i cittadini sono tassati in modo uguale per finanziare la produzione del bene, il progetto sarà approvato a maggioranza?

ESERCIZIO 4 Dieci consumatori identici hanno tutti curve della disponibilità a pagare per un parco di quartiere uguali a  $P_i = 5 - \frac{1}{20} Q_i$  (dove  $P$  è misurato in centinaia di euro e  $Q$  è misurato in ettari).

- a. Costruite e tracciate la curva aggregata delle disponibilità a pagare.
- b. Determinate il massimo che ciascun individuo è disposto a pagare per 50 ettari di parco.
- c. Determinate la dimensione ottimale del parco  $Q^*$  se la curva del costo marginale è pari a  $MC = \frac{1}{2} Q$

## SOLUZIONI

### TEORIA

**Domanda 1:** risposta D

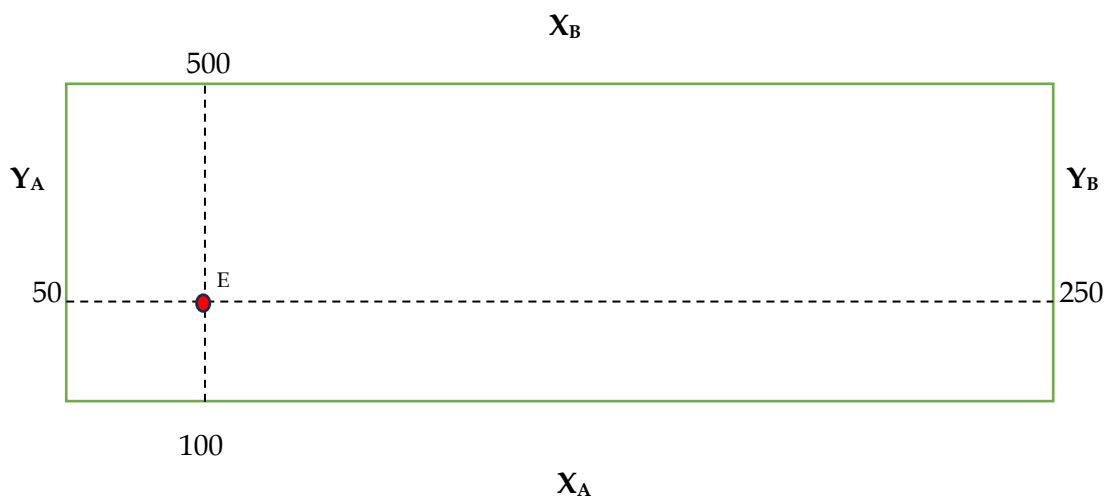
**Domanda 2:** risposta B

### ESERCIZI

#### Esercizio 1:

- PUNTO A:

*La scatola di Edgeworth* è uno strumento grafico per analizzare la distribuzione e lo scambio delle quantità di due beni tra due soggetti economici, e le condizioni di equilibrio in un'economia di puro scambio. Per semplicità il pane di Bruno diventa  $X_B$ , e il latte di Bruno  $Y_B$ . Allo stesso modo, indicheremo il pane e il latte di Alice rispettivamente con le diciture  $X_A$  e  $Y_A$ .



- PUNTO B:

Nel caso di Alice e Bruno, l'espressione analitica dell'SMS tra pane (X) e latte (Y) dalle loro funzioni di utilità.

- o Calcolo il SMS di Alice. Per farlo dovrei derivare le utilità marginali di  $X_A$  e  $Y_A$  e ottenere il saggio marginale di sostituzione tramite il rapporto tra le due utilità marginali ( $SMS_A = \frac{MU_X}{MU_Y}$ ). Tuttavia, date le funzioni di utilità con cui abbiamo a che fare, questo risulterebbe matematicamente scomodo. Adottiamo quindi una scorciatoia possibile quando si ha a che fare con delle funzioni Cobb-Douglas. Data una funzione  $U = X^\alpha Y^\beta$ , abbiamo che  $SMS = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{Y}{X}$ .

$$SMS_A = \frac{\frac{2}{3} Y_A}{\frac{1}{3} X_A} = 2 \frac{Y_A}{X_B}$$

- Le funzioni di utilità sono uguali sia per Alice che per Bruno. Quindi avremo che  $SMS_B = 2 \frac{Y_B}{X_B}$ .

- PUNTO C

La *curva dei contratti* rappresenta tutte le allocazioni Pareto-Efficienti, e quindi tutte le combinazioni dove la condizione di uguaglianza tra gli SMS di Bruno ed Alice è rispettata. Partendo dalla condizione di tangenza, ricaviamo una funzione con una sola coppia di variabili ( $X_A, Y_A$ ).

$$\begin{cases} SMS_A = SMS_B \\ X_A + X_B = X \\ Y_A + Y_B = Y \end{cases} = \begin{cases} 2 \frac{Y_A}{X_A} = 2 \frac{Y_B}{X_B} \\ X_A + X_B = 600 \\ Y_A + Y_B = 300 \end{cases} = \begin{cases} \frac{Y_A}{X_A} = \frac{300 - Y_A}{600 - X_A} \\ X_B = 600 - X_A \\ Y_B = 300 - Y_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Y_A}{X_A} \frac{600 - X_A}{300 - Y_A} = 1 \\ X_B = 600 - X_A \\ Y_B = 300 - Y_A \end{cases} = \begin{cases} \frac{600Y_A - Y_A X_A}{300X_A - X_A Y_A} = 1 \\ X_B = 600 - X_A \\ Y_B = 300 - Y_A \end{cases} = \begin{cases} \frac{600Y_A}{300X_A} = 1 \\ X_B = 600 - X_A \\ Y_B = 300 - Y_A \end{cases} = \begin{cases} \frac{2 Y_A}{1 X_A} = 1 \\ X_B = 600 - X_A \\ Y_B = 300 - Y_A \end{cases} =$$

$$\frac{2Y_A}{X_A} = 1 \rightarrow Y_A = \frac{1}{2} X_A$$

L'equazione  $Y_A = \frac{1}{2} X_A$  rappresenta la curva dei contratti. Per determinare se l'allocazione iniziale è Pareto-Efficiente comparo  $SMS_A$  e  $SMS_B$  e verifico se in corrispondenza del punto E in Figura 1 la condizione  $SMS_A = SMS_B$  è rispettata. Sostituisco quindi  $X_A, X_B, Y_A, Y_B$  con le quantità iniziali.

$$SMS_A = 2 \frac{50}{100} = 1$$

$$SMS_B = 2 \frac{250}{500} = 1$$

**Il punto E è Pareto-Efficiente.**

- PUNTO D

Calcolo  $SMS_A$  e  $SMS_B$  in corrispondenza della nuova allocazione di risorse.

$$SMS_A = 2 \frac{50}{300} = 0.33$$

$$SMS_B = 2 \frac{250}{300} = 1.66$$

No  $SMS_A \neq SMS_B$ , la nuova allocazione non è Pareto-Efficiente

### Esercizio 2:

- PUNTO A

Per verificare se la dotazione iniziale è Pareto-Efficiente derivo SMS per Alessandro e Barbara

$$SMS_A = \frac{UM_{X_A}}{UM_{Y_A}} = \frac{3X_A^2 Y_A}{X^3} = \frac{3Y_A}{X_A}$$

$$SMS_B = \frac{UM_{X_B}}{UM_{Y_B}} = \frac{\frac{1}{X_B}}{\frac{1}{Y_B}} = \frac{Y_B}{X_B}$$

Sostituisco i valori delle dotazioni iniziali dei beni X e Y in entrambi i saggi:

$$SMS_A = \frac{3(160)}{160} = 3$$

$$SMS_B = \frac{80}{80} = 1$$

**L'allocazione di risorse iniziale non è Pareto-Efficiente**

- PUNTO B

È possibile ottenere il prezzo relativo di equilibrio ( $P_x/P_y$ ) partendo da un sistema di scelta ottima per entrambi i soggetti

**Alessandro**

$$\begin{cases} \frac{3Y_A}{X_A} = \frac{P_X}{P_Y} \\ X_A + P_X + Y_A P_Y = 160P_X + 160P_Y \end{cases}$$

**Barbara**

$$\begin{cases} \frac{3Y_B}{X_B} = \frac{P_X}{P_Y} \\ X_B + P_X + Y_B P_Y = 80P_X + 80P_Y \end{cases}$$

Dove in ogni sistema la seconda equazione rappresenta il vincolo.

Risolviamo il primo sistema (Alessandro), con l'obiettivo di esplicitare  $X_A$  e  $Y_A$ .

$$\begin{cases} X_A = \frac{3Y_A P_Y}{P_X} \\ \frac{3Y_A P_Y}{P_X} P_X + Y_A P_Y = 160P_X + 160P_Y \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} X_A = \frac{3Y_A P_Y}{P_X} \\ 4Y_A P_Y = 160P_X + 160P_Y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_A = \frac{3Y_A P_Y}{P_X} \\ Y_A = \frac{160P_X + 160P_Y}{4P_Y} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} X_A = \frac{3Y_A P_Y}{P_X} \\ Y_A = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_A = \frac{3 \left( 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \right) P_Y}{P_X} \\ Y_A = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} X_A = 120 + 120 \frac{P_Y}{P_X} \\ Y_A = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \end{cases}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per Barbara

$$\begin{cases} Y_B = \frac{X_B P_X}{P_Y} \\ X_B P_X \cdot \frac{X_B P_X}{P_Y} \cdot P_Y = 80P_X + 80P_Y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_B = \frac{X_B P_X}{P_Y} \\ 2X_B P_X = 80P_X + 80P_Y \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} Y_B = \frac{X_B P_X}{P_Y} \\ X_B = 40 + 40 \frac{P_Y}{P_X} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_B = \frac{\left( 40 + 40 \frac{P_Y}{P_X} \right) P_X}{P_Y} \\ X_B = 40 + 40 \frac{P_Y}{P_X} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} Y_B = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \\ X_B = 40 + 40 \frac{P_Y}{P_X} \end{cases}$$

Sapendo che  $Y_A + Y_B = 240$ , possiamo costruire un ulteriore sistema per ottenere  $\frac{P_X}{P_Y}$ .

$$\begin{cases} Y_A + Y_B = 240 \\ Y_A = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \\ Y_B = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 + 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 = 240 \\ Y_A = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \\ Y_B = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 80 \frac{P_X}{P_Y} \\ Y_A = 40 \\ Y_B = 40 \end{cases}$$

E quindi  $\frac{3Y_A}{X_A} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{160}{80}$ . Trovo infine i valori di d'equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{P_X}{P_Y} = \frac{160}{80} = 2 \\ Y_A = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \\ Y_B = 40 \frac{P_X}{P_Y} + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{P_X}{P_Y} = \frac{160}{80} = 2 \\ Y_A^* = 40 + 40(2) = 120 \\ Y_B^* = 40 + 40(2) = 120 \end{cases}$$

Otteniamo ora  $\frac{P_Y}{P_X}$  e i valori d'equilibrio di X.

$$\begin{cases} X_A + X_B = 240 \\ X_A = 120 \frac{P_Y}{P_X} + 120 \\ X_B = 40 \frac{P_Y}{P_X} + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 120 \frac{P_Y}{P_X} + 120 + 40 \frac{P_Y}{P_X} + 40 = 240 \\ X_A = 120 \frac{P_Y}{P_X} + 120 \\ X_B = 40 \frac{P_Y}{P_X} + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{P_Y}{P_X} = \frac{80}{160} \\ X_A = 120 \frac{P_Y}{P_X} + 120 \\ X_B = 40 \frac{P_Y}{P_X} + 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P_Y}{P_X} = \frac{1}{2} \\ X_A = 120 \frac{1}{2} + 120 \\ X_B = 40 \frac{1}{2} + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{P_Y}{P_X} = \frac{1}{2} \\ X_A^* = 180 \\ X_B^* = 60 \end{cases}$$

- PUNTO C

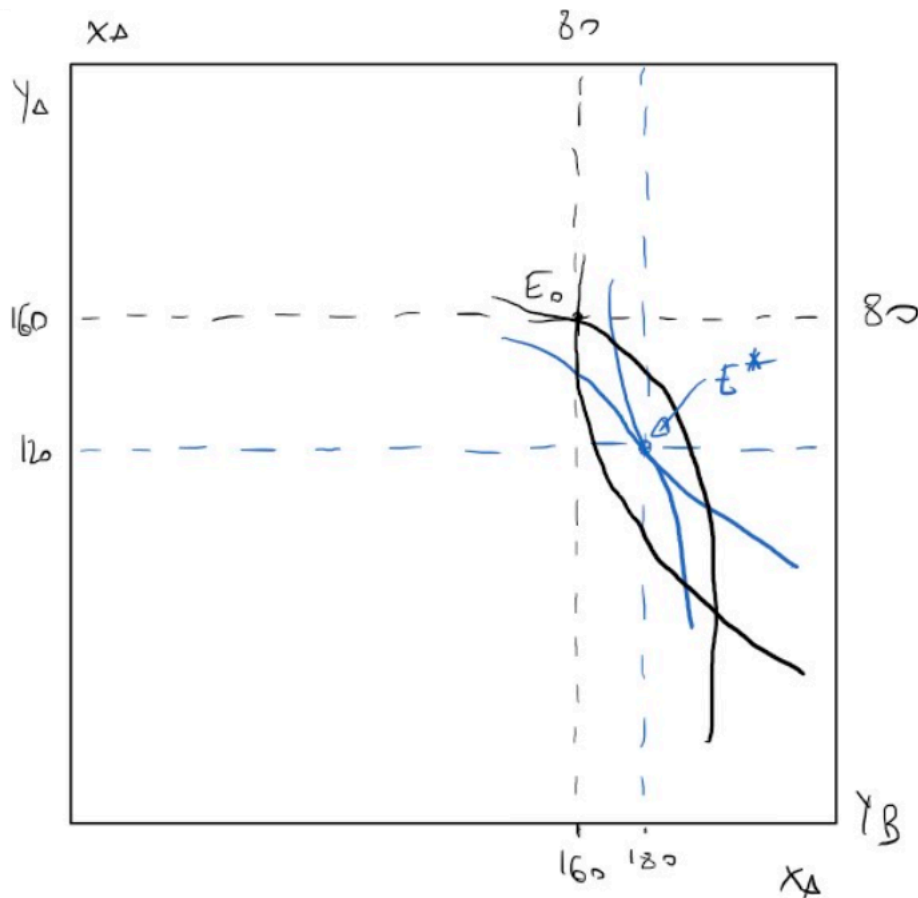
$$SMS_A = \frac{3Y_A}{X_A} = \frac{3 \cdot 120}{180} = 2$$

$$SMS_B = \frac{Y_B}{X_B} = \frac{120}{60} = 2$$

$$SMS_A = SMS_B$$

Le condizioni d'efficienza paretiana sono rispettate

- PUNTO D



### Esercizio 3

- PUNTO A

I beni pubblici sono beni non rivali. Per trovare la quantità ottimale di bene pubblico da erogare sommo le singole funzioni di disponibilità a pagare  $P_A$  e  $P_B$  per ottenere la funzione di disponibilità aggregata  $P$ .

$$P = P_A + P_B = \left(2 - \frac{1}{6}Q_A\right) + \left(4 - \frac{1}{3}Q_B\right) = 6 - \frac{9}{18}Q$$

$$P = 6 - \frac{1}{2}Q$$

Soluzione ottimale  $P = MC$ . Trovo il valore di  $Q$  per cui l'uguaglianza è vera.

$$6 - \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}Q$$

$$-\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q = -6 \rightarrow Q^* = 6$$

- PUNTO B

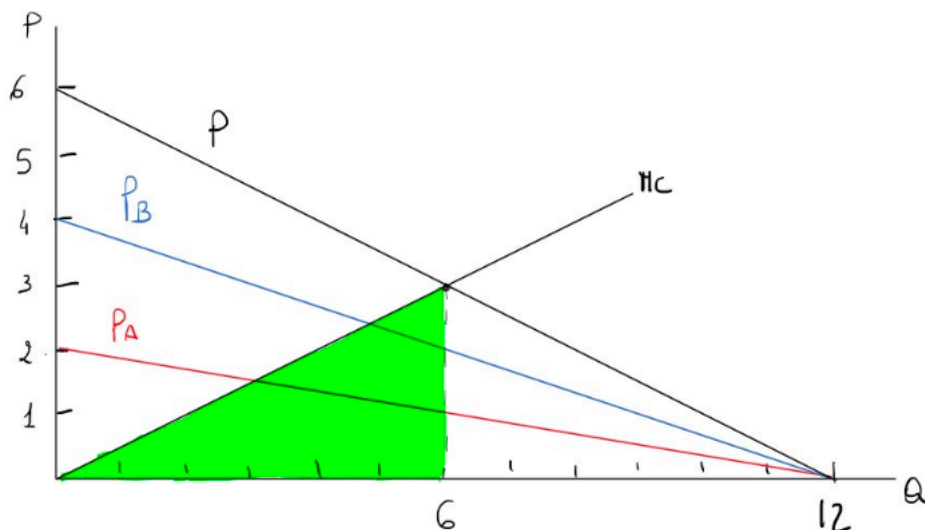
L'esercizio assume l'esistenza di due soli cittadini, quindi il progetto può essere approvato solo all'unanimità. Il progetto verrà approvato se il gettito fiscale proveniente da A e B sarà superiore ai costi totali. Dato che non posso far pagare a B quello che non è disposto a pagare A, il gettito sarà pari al doppio della disponibilità a pagare dell'individuo con la disponibilità a pagare più bassa (A in questo caso).

Per prima cosa trovo i TC. Ho due opzioni: 1) calcolo l'integrale rispetto la funzione MC, 2) uso un approccio grafico. Optiamo per la seconda:

- Per poter risolvere il problema devo calcolare il valore del MC per  $Q=10$

$$MC = \frac{6}{2} = 3$$

- Per una quantità prodotta=0, il MC è 0. Traccio il grafico trovando tutti i punti d'intersezione come fatto negli esercizi delle unità precedenti



Dato che  $TC = VC + FC$  e  $MC = \frac{\partial TC}{\partial Q}$ , allora avremo che  $TC = MC + FC$ . L'area verde 0-3-6 corrisponde quindi ai VC per una quantità prodotta = 6. Calcoliamo l'area del triangolo e aggiungiamo FC

$$TC = \frac{b \times h}{2} + FC = \frac{6(6-3)}{2} + 10 = 19$$

- Soluzione con integrale:

$$\int \frac{1}{2} Q dQ = \frac{1}{4} Q^2 + c$$

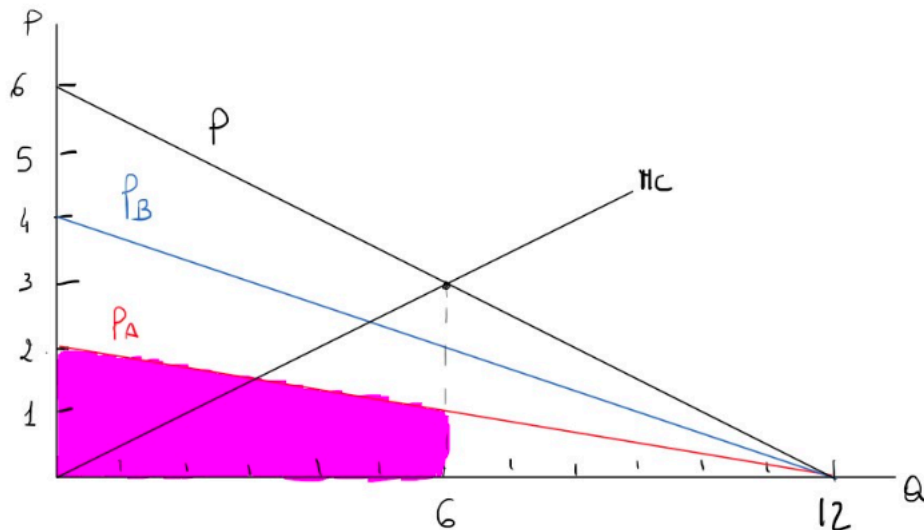
Sostituendo i costi fissi con  $c$ , e  $Q=Q^*$ ; abbiamo di nuovo:

$$\frac{1}{4}(6)^2 + 10 = 19$$

La disponibilità a pagare totale sarà data dalla somma delle disponibilità a pagare di A e B. Tuttavia, visto che entrambi i componenti della società vengono tassati in egual misura, nessuno dei due componenti della società potrà pagare di più dell'altro. La condizione per cui entrambi gli individui saranno d'accordo vuole che i TC non superino il doppio della disponibilità a pagare più bassa.

L'individuo A è chiaramente quello meno disposto a pagare per il bene pubblico. Per il singolo consumatore, la disponibilità a pagare sarà data dall'area colorata sotto la curva  $P_A$ .

Posso anche qua calcolare l'integrale o l'area in figura.



$$WP_A = \frac{(2+1)6}{2} = 9$$

Dato che A non è disposto a pagare + di 9, e che non è possibile un ricarico maggiore dei costi su B, la mozione non passerà (in quanto  $9 + 9 < TC \rightarrow 18 < 19$ )

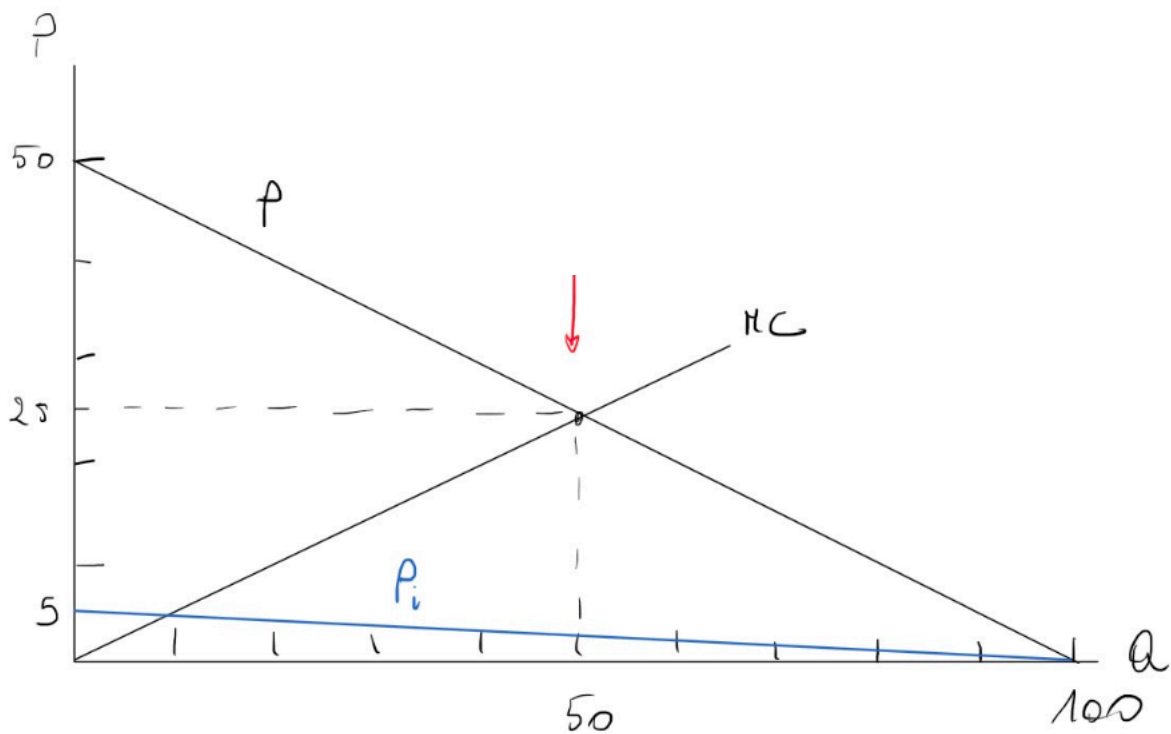
#### Esercizio 4

- PUNTO A

Le funzioni di disponibilità a pagare dei singoli cittadini sono tutte uguali; quindi, posso determinare la funzione aggregata di disponibilità a pagare semplicemente così:

$$P = P_i \cdot 10 = \left(5 - \frac{1}{20}Q\right) 10 \rightarrow 50 - \frac{1}{2}Q$$

Traccio la curva trovando i punti d'intersezione con gli assi



- PUNTO B

Per determinare la disponibilità a pagare di ciascun individuo per 50 ettari di parco trovo prima il punto d'equilibrio

$$P = 50 - \frac{1}{2}(50) = 25$$

La disponibilità a pagare aggregata sarà

$$WP = \frac{(50 + 25)50}{(2)} = 1875$$

Per determinare la disponibilità a pagare di ogni individuo, divido per n

$$WP_i = 1875/10 = 187.5$$

- *PUNTO C*

Trovo  $Q^*$  partendo dalla condizione  $MC = P$ :

$$50 - \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}Q \rightarrow \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q = 50$$

$$\mathbf{Q^* = 50}$$