

SPAZI DI SOBOLEV

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Richiami sugli spazi di Lebesgue e sui teoremi di Gauß. Definizione di derivata debole. Lo spazio $W^{1,p}$ e le sue proprietà funzionali. Spazi di Sobolev di ordine superiore. Teoremi di estensione. Densità: teorema di Friedrichs. Immersioni continue: disuguaglianza di Sobolev, teorema di Morrey. Immersioni compatte: teorema di Rellich-Kondrachov. Immersioni di $W^{k,p}$. Lo spazio $W_0^{1,p}$: disuguaglianza di Poincaré, duale. Gli spazi H^1 , H_0^1 . Queste note sono un mero supporto didattico, senza alcuna pretesa di completezza, originalità o precisione.

INDICE

1. Richiami sugli spazi di Lebesgue	1
2. Derivate deboli e spazi di Sobolev	7
3. Densità ed estensione	14
4. Immersioni	24
5. Gli spazi $W_0^{1,p}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$	34
Riferimenti bibliografici	39

Versione del 2 giugno 2023

Le vostre debolezze sono salite al cielo delle virtù.

F.W. NIETZSCHE

1. RICHIAMI SUGLI SPAZI DI LEBESGUE

In questa sezione preliminare richiamiamo, per comodità, alcune nozioni relative agli *spazi di Lebesgue*, o *spazi L^p* . Nel seguito assumeremo sempre che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N > 1$) sia un aperto non vuoto dotato della misura di Lebesgue N -dimensionale, e che $p \in (1, \infty)$ sia un numero reale (per gli altri casi, e per le dimostrazioni di alcuni risultati, rimandiamo a [2, Chapter 4] e a [10]).

Definizione 1.1. *Lo spazio $L^p(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili t.c.*

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty^1,$$

definite a meno di un insieme di misura nulla.

L'ultima precisazione della Definizione 1.1 si interpreta come segue: *se $u, v \in L^p(\Omega)$ soddisfano $u(x) = v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$, allora poniamo $u = v$* . A rigore, $L^p(\Omega)$ è definito come un insieme di classi di equivalenza, ma qui eviteremo tale descrizione per semplicità. Per ogni $u \in L^p(\Omega)$ poniamo

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si vede facilmente che $\|\cdot\|_p$ è una norma su $L^p(\Omega)$, che risulta inoltre completo rispetto alla metrica indotta:

¹Negli integrali ometteremo, quando non necessarie, le variabili di integrazione.

Teorema 1.2. (Fischer-Riesz) $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach.

Ricordiamo alcune diseguaglianze elementari. Innanzitutto, per ogni $p \in (1, \infty)$ definiamo l'esponente coniugato $p' \in (1, \infty)$ t.c.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Si ha per ogni $a, b \geq 0$ la diseguaglianza di Young:

$$(1.1) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Per ogni $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ vale la diseguaglianza di Hölder:

$$(1.2) \quad \int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

Abbiamo inoltre le due diseguaglianze di Clarkson: per ogni $u, v \in L^p(\Omega)$

$$(1.3) \quad \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^p \leq \frac{\|u\|_p^p + \|v\|_p^p}{2} \quad (p \geq 2),$$

$$(1.4) \quad \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{\|u\|_p^p + \|v\|_p^p}{2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (p < 2)$$

Ricordiamo infine la diseguaglianza di interpolazione: se $p < q < r$ e $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, allora si ha $u \in L^q(\Omega)$ con

$$(1.5) \quad \|u\|_q \leq \|u\|_p^\tau \|u\|_r^{1-\tau}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\tau}{p} + \frac{1-\tau}{r}.$$

Osservazione 1.3. Nel caso $p = 2$, come già osservato in [6], $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv dx.$$

In tal caso si ha $p' = 2$ e le diseguaglianze (1.2), (1.3), (1.4) sono ricondotte alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e all'identità del parallelogramma.

Da (1.2) segue che, per ogni $v \in L^{p'}(\Omega)$, il funzionale lineare

$$u \mapsto \int_{\Omega} uv dx$$

è continuo in $L^p(\Omega)$. Più interessante è il fatto che tutti i funzionali lineari continui su $L^p(\Omega)$ si possano costruire in questo modo:

Teorema 1.4. (di rappresentazione di Riesz) Sia $\psi \in L^p(\Omega)^*$. Allora esiste un'unica $v \in L^{p'}(\Omega)$ t.c. per ogni $u \in L^p(\Omega)$

$$\psi(u) = \int_{\Omega} uv dx.$$

In virtù del Teorema 1.4 possiamo identificare $L^p(\Omega)^* \sim L^{p'}(\Omega)$ (come faremo tacitamente nel seguito). Usando (1.3) o (1.4), insieme al Teorema di Milman-Pettis [2, Theorem 3.31], si dimostra il seguente risultato:

Proposizione 1.5. $L^p(\Omega)$ è uniformemente convesso, in particolare riflessivo.

Dalle proprietà della misura di Lebesgue segue inoltre:

Proposizione 1.6. $L^p(\Omega)$ è separabile.

Osservazione 1.7. Ricordiamo brevemente i casi estremi $p = 1, \infty$. Lo spazio $L^1(\Omega)$ è definito come nella Definizione 1.1, e similmente la norma $\|\cdot\|_1$, esso è separabile ma non riflessivo. D'altra parte, $L^\infty(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili ed 'essenzialmente limitate', per cui cioè esiste $C > 0$ t.c. $|u(x)| \leq C$ q.o. in Ω , con norma

$$\|u\|_\infty = \inf \{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}.$$

Questo spazio non è separabile né riflessivo. Si ha inoltre, a meno di isometrie lineari,

$$L^1(\Omega)^* = L^\infty(\Omega), \quad L^\infty(\Omega)^* \supset L^1(\Omega).$$

Ricordiamo alcune proprietà della *convoluzione*. Questa è definita come un'operazione \star che a una coppia di funzioni (u, v) misurabili opportune, definite in \mathbb{R}^N , associa una terza funzione $(u \star v) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, definita per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ da

$$(u \star v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y) dy.$$

Teorema 1.8. (Young) *Siano $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Allora $(u \star v) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\|(u \star v)\|_p \leq \|u\|_1 \|v\|_p$$

Dimostrazione. Poniamo per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$F(x, y) = |u(x-y)||v(y)|^p.$$

Per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$ abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, y) dx = \|u\|_1 |v(y)|^p,$$

da cui $F(\cdot, y)$ è integrabile in \mathbb{R}^N , inoltre

$$(1.6) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, y) dx dy = \|u\|_1 \|v\|_p^p.$$

Per il Teorema di Tonelli [2, Theorem 4.4] abbiamo $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, da cui per il Teorema di Fubini [2, Theorem 4.5] $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$. Equivalentemente, per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$y \mapsto |u(x-y)|^{\frac{1}{p}} |v(y)|$$

appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N)$. D'altra parte, la funzione $y \mapsto |u(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ appartiene a $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Applicando (1.2) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)|^{\frac{1}{p'}} |u(x-y)|^{\frac{1}{p}} |v(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_1^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Integrando in x e usando (1.6), abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |(u \star v)(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| dy \right)^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \|u\|_1^{\frac{p}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)|^p dy \right) dx \\ &= \|u\|_1^{p-1} \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} = \|u\|_1^p \|v\|_p^p, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

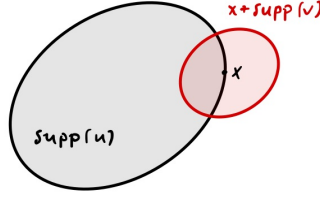


FIGURA 1.

Vediamo adesso alcune proprietà della convoluzione. Per cominciare, per ogni $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo $\bar{u}(x) = u(-x)$:

Lemma 1.9. *Siano $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $w \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u \star v)w \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} \star w)v \, dx.$$

Dimostrazione. Poniamo per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$F(x, y) = u(x - y)v(y)w(x).$$

Per il Teorema 1.8 e (1.2) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |F(x, y)| \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^N} |(u \star v)w| \, dx \leq \|u\|_1 \|v\|_p \|w\|_{p'},$$

da cui $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Quindi, per il Teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x - y)v(y) \, dy \right) w(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} F(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} F(x, y) \, dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x - y)w(x) \, dx \right) v(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(y - x)w(x) \, dx \right) v(y) \, dy, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Ricordiamo che, per ogni $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, il *supporto* di u è l'insieme

$$\text{supp}(u) = \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup \{ \omega \subset \mathbb{R}^N : \omega \text{ aperto, } u = 0 \text{ q.o. in } \omega \} \right).$$

Se $u \in C(\mathbb{R}^N)$, si ha semplicemente $\text{supp}(u) = \overline{\{u \neq 0\}}$. Diremo che $u \in C_c(\mathbb{R}^N)$ se $u \in C(\mathbb{R}^N)$ e $\text{supp}(u)$ è compatto².

Lemma 1.10. *Siano $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\text{supp}(u \star v) \subseteq \overline{\text{supp}(u) + \text{supp}(v)}.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 1.8, per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$(u \star v)(x) = \int_{(x - \text{supp}(u)) \cap \text{supp}(v)} u(x - y)v(y) \, dy.$$

Quindi, se $x \notin \overline{\text{supp}(u) + \text{supp}(v)}$ si ricava $(u \star v)(x) = 0$ (fig. 1). □

²Useremo altre notazioni dello stesso tipo, come $C_c^k(\mathbb{R}^N)$, con ovvio significato.

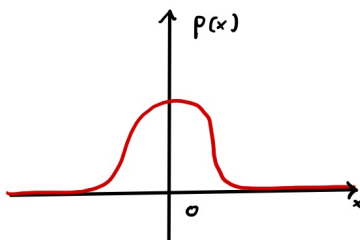


FIGURA 2.

Per il Lemma 1.10, se u e v hanno supporto compatto, anche $\text{supp}(u \star v)$ è compatto. Osserviamo ora la relazione fra convoluzione e derivazione:

Lemma 1.11. *Siano $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora $(u \star v) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\nabla(u \star v) = (\nabla u \star v).$$

Dimostrazione. Fissiamo $i \in \{1, \dots, N\}$ e denotiamo e_i il versore dell'asse \vec{x}_i . Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, ogni $y \in \mathbb{R}^N$ e ogni $t \in (0, 1)$ si ha

$$\left| u(x - y + te_i) - u(x - y) - t \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y) \right| = \left| \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y + \tau e_i) d\tau - t \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y) \right| = \mathbf{o}(t),$$

uniformemente rispetto a y . Ne segue

$$\begin{aligned} & \left| (u \star v)(x + te_i) - (u \star v)(x) - t \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \star v \right)(x) \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| u(x - y + te_i) - u(x - y) - t \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y) \right| |v(y)| dy = \mathbf{o}(t) \|v\|_1. \end{aligned}$$

Si ha pertanto per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u \star v)(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \star v \right)(x),$$

da cui la tesi. □

Le funzioni di $L^p(\Omega)$ possono essere estremamente irregolari, tuttavia è possibile approssimarle mediante successioni di funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Questo procedimento è detto *regolarizzazione* e si basa sull'operazione di convoluzione.

Una successione di *mollificatori* è definita come una successione (ρ_n) di funzioni t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho_n \geq 0$ in \mathbb{R}^N , $\text{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{B}_{1/n}$, e $\|\rho_n\|_1 = 1$.

Esempio 1.12. Possiamo facilmente costruire una successione (ρ_n) di mollificatori definendo dapprima una funzione $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mediante

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

(fig. 2) e poi ponendo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\rho_n(x) = \frac{n^N \rho(nx)}{\|\rho\|_1}.$$

Abbiamo il seguente risultato di regolarizzazione:

Teorema 1.13. *Siano $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, (ρ_n) una successione di mollificatori. Allora si ha $(\rho_n \star u) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $(\rho_n \star u) \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Per il Teorema 1.8 abbiamo $(\rho_n \star u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Inoltre $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, quindi applicando ripetutamente il Lemma 1.11 vediamo che $(\rho_n \star u) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Proviamo ora che $(\rho_n \star u) \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$, procedendo per gradi. Il primo passo consiste nell'effettuare una *troncatura* di u , definendo per ogni $k \in \mathbb{N}$ una funzione $u_k \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ponendo per ogni $x \in B_k$

$$u_k(x) = \begin{cases} -k & \text{se } u(x) \leq -k \\ u(x) & \text{se } -k < u(x) < k \\ k & \text{se } u(x) \geq k, \end{cases}$$

e $u_k(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_k$, così che $\text{supp}(u_k) \subseteq \overline{B}_k$. Abbiamo $u_k \rightarrow u$ in \mathbb{R}^N con $|u_k| \leq |u|$ q.o. in \mathbb{R}^N , da cui $u_k \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ (Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata, ved. [2, Theorem 4.2]). Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$(1.7) \quad \|u - u_k\|_p < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Procediamo ora approssimando u_k con una funzione continua. Infatti, per [2, Theorem 4.3] esiste $v \in C_c(\mathbb{R}^N)$ t.c.

$$\|u_k - v\|_1 < \frac{\varepsilon^p}{6^p} (2\|u_k\|_\infty)^{1-p}.$$

Senza perdita di generalità possiamo assumere $\|v\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$. Per (1.2) abbiamo

$$(1.8) \quad \|u_k - v\|_p \leq \|u_k - v\|_1^{\frac{1}{p}} \|u_k - v\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Adesso regolarizziamo v mediante la convoluzione con i mollificatori. Per i Lemmi 1.10, 1.11, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $(\rho_n \star v) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Inoltre, per ogni insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto, $(\rho_n \star v) \rightarrow v$ uniformemente su K . Infatti, per il Teorema di Cantor-Heine v è uniformemente continua in K , quindi si ha uniformemente per ogni $x \in K$

$$\lim_n \max_{|y| \leq \frac{1}{n}} |v(x-y) - v(x)| = 0.$$

Ricordando anche che $\text{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{B}_{1/n}$ e $\|\rho_n\|_1 = 1$, abbiamo allora

$$\begin{aligned} |(\rho_n \star v)(x) - v(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (v(x-y) - v(x)) \rho_n(y) dy \right| \\ &\leq \max_{|y| \leq \frac{1}{n}} |v(x-y) - v(x)|, \end{aligned}$$

e questo tende a 0 uniformemente per ogni $x \in K$. Per concludere, osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ dal Lemma 1.10 segue

$$\text{supp}(\rho_n \star v) \subseteq \overline{B_{1/n} + \text{supp}(v)} \subseteq \overline{B_1 + \text{supp}(v)},$$

essendo l'ultimo un insieme compatto indipendente da n . Si ha pertanto $(\rho_n \star v) \rightarrow v$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande

$$(1.9) \quad \|(\rho_n \star v) - v\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Infine, ritorniamo alla funzione u . Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande affinché valga (1.9) e osserviamo che

$$(\rho_n \star u) = (\rho_n \star (u - v)) + (\rho_n \star v).$$

Da (1.7), (1.8), (1.9) e dal Teorema 1.8 segue allora

$$\begin{aligned} \|(\rho_n \star u) - u\|_p &\leq \|\rho_n \star (u - v)\|_p + \|(\rho_n \star v) - v\|_p + \|v - u\|_p \\ &\leq 2\|u - v\|_p + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq 2(\|u - u_k\|_p + \|u_k - v\|_p) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Per effetto del Teorema 1.13, vediamo che $L^p(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ è un sottospazio *denso* di $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Osservazione 1.14. In effetti si può dimostrare di più: per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $C_c^\infty(\Omega)$ è un sottospazio denso di $L^p(\Omega)$ (ved. [2, Corollary 4.23]). Torneremo su questi problemi di densità nella Sezione 3.

Definiamo per ogni $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ un *operatore di traslazione* $T_h : L^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ ponendo per ogni $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$

$$T_h(u)(x) = u(x + h),$$

così che chiaramente T_h è lineare e continuo (un'isometria lineare in effetti). Poiché $\dim(L^p(\Omega)) = \infty$, un insieme limitato nello spazio $L^p(\mathbb{R}^N)$ non è relativamente compatto (nella topologia forte). Tuttavia, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è limitato, si ha il seguente risultato (per la dimostrazione ved. [2, Theorem 4.26]):

Teorema 1.15. (Kolmogorov-Riesz-Fréchet) *Sia $S \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ un insieme limitato, t.c. uniformemente per ogni $u \in S$*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|T_h(u) - u\|_p = 0.$$

Allora, per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di misura finita, l'insieme

$$S(\Omega) = \{u|_\Omega : u \in S\}$$

è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$.

Il Teorema 1.15 si può vedere come una versione 'integrale' del Teorema di Ascoli-Arzelà. L'ipotesi principale va interpretata come segue: *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $u \in S$, $|h| < \delta$ si ha*

$$\|T_h(u) - u\|_p < \varepsilon.$$

Esercizio 1.16. Dimostrare l'Osservazione 1.7.

Esercizio 1.17. Dimostrare il Lemma 1.11 sotto l'ipotesi $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Esercizio 1.18. Provare che la successione (ρ_n) definita nell'Esempio 1.12 è una successione di mollificatori.

2. DERIVATE DEBOLI E SPAZI DI SOBOLEV

In questa sezione introduciamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, dove $p \in (1, \infty)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N > 1$) è un aperto non vuoto, e le sue proprietà fondamentali. Per i casi $N = 1$, $p = 1, \infty$ rimandiamo a [2, Chapters 8, 9]. Le motivazioni per l'introduzione di questo spazio sono legate allo studio delle equazioni alle derivate parziali, e sono rinviate a [7, 8]. Per una trattazione dettagliata sugli spazi di Sobolev, rimandiamo a [?, 3, 5, 9].

Richiamiamo alcune nozioni di calcolo integrale e differenziale (ved. [5, Appendix B]). Poniamo

$$\begin{aligned} Q &= \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'|, |x_N| < 1\}, \quad Q_+ = \{(x', x_N) \in Q : x_N > 0\}, \\ Q_0 &= \{(x', x_N) \in Q : x_N = 0\}, \quad Q_- = \{(x', x_N) \in Q : x_N < 0\}. \end{aligned}$$

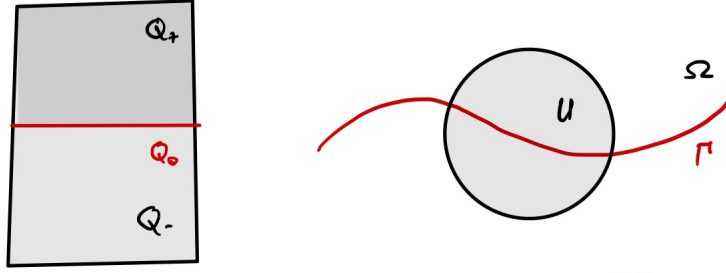


FIGURA 3.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio (aperto connesso) di frontiera $\Gamma = \partial\Omega$, diremo che Ω è di classe C^k ($k \in \mathbb{N}$) se per ogni $x \in \Gamma$ esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^N$ di x e un C^k -diffeomorfismo $H : \bar{Q} \rightarrow \bar{U}^3$ t.c. $H(Q_+) = U \cap \Omega$, $H(Q_0) = U \cap \Gamma$ (fig. 3). I domini di classe C^1 sono anche detti *domini regolari*.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è di classe C^1 , allora per ogni $x \in \Gamma$ è definito univocamente il versore normale uscente $\nu(x) \in \mathbb{R}^N$ rispetto a Γ in x . Richiamiamo la *formula di Gauß-Green*: se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio limitato di classe C^1 , allora per ogni $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ si ha

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Gamma} uv \nu_i d\Gamma, \quad i = 1, \dots, N.$$

Inoltre, applicando (2.1) si ha per ogni $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, e ponendo $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$,

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} \Delta uv dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma.$$

Introduciamo ora il primo *spazio di Sobolev*:

Definizione 2.1. Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ con la seguente proprietà: esistono $g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \quad i = 1, \dots, N.$$

La Definizione 2.1 si può riformulare equivalentemente usando funzioni test $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Osserviamo anche che, per la Definizione 1.1, le funzioni g_1, \dots, g_N sono definite in Ω a meno di un insieme di misura nulla e che in tal senso esse sono *uniche*.

Se Ω è un dominio limitato di classe C^1 e $u \in C^1(\bar{\Omega})$, da (2.1) segue che u verifica la Definizione 2.1 con $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, N$). Per estensione, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ le funzioni g_i sono dette *derivate deboli* di u e denotate $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, N$), inoltre si pone

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

con norma

$$\|\nabla u\|_p = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Osservazione 2.2. Abbiamo visto sopra che, se Ω è limitato e regolare, allora si ha $C^1(\bar{\Omega}) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$. Questa inclusione è *propria*, ovvero esistono funzioni derivabili in senso debole che non sono tali in senso classico. Una caratterizzazione delle funzioni debolmente derivabili si trova in [4, p. 151], ma per i nostri fini è sufficiente la seguente condizione, solo sufficiente: *Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione*

³Con questa espressione intendiamo che $H \in C^k(\bar{Q}, \bar{U})$ e $H^{-1} \in C^k(\bar{U}, \bar{Q})$

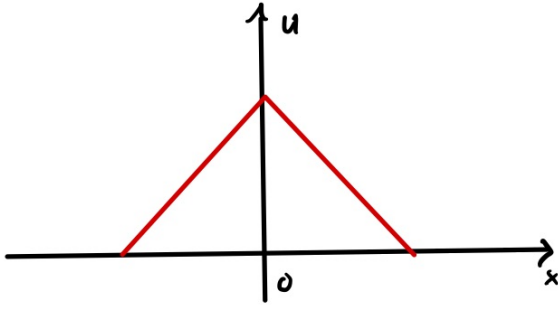


FIGURA 4.

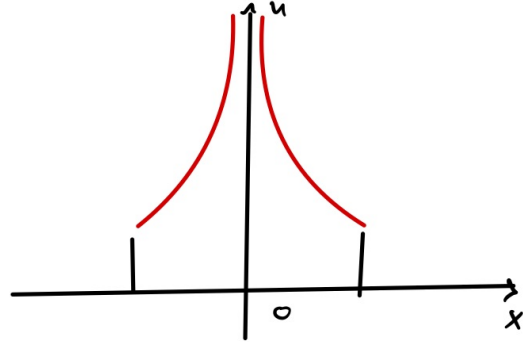


FIGURA 5.

lipschitziana, quindi derivabile q.o. in Ω^4 , e supponiamo che $\partial u / \partial x_i \in L^p(\Omega)$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con derivate deboli coincidenti q.o. con le derivate classiche.

Vediamo alcuni esempi, tutti relativi al dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Esempio 2.3. Poniamo $u(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ per ogni $(x, y) \in \Omega$ (fig. 4). La funzione u non è derivabile in $(0, 0)$, mentre per ogni $(x, y) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Per l'Osservazione 2.2 abbiamo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p \in (1, \infty)$.

Esempio 2.4. Fissiamo $p > 1$ e $\alpha \in (0, 1)$ t.c. $p\alpha < 2$, quindi poniamo per ogni $(x, y) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ (fig. 5)

$$u(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

La funzione u è derivabile in $\Omega \setminus \{(0, 0)\}$ con

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\alpha y}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}.$$

Verifichiamo che $u \in L^p(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |u|^p dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^{1-p\alpha} d\rho d\theta = 2\pi \left[\frac{\rho^{2-p\alpha}}{2-p\alpha} \right]_0^1 < \infty.$$

Verifichiamo che $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dy \leq \int_0^{2\pi} \int_0^1 \alpha^p \rho^{1-p\alpha} d\rho d\theta = 2\pi \alpha^p \left[\frac{\rho^{2-p\alpha}}{2-p\alpha} \right]_0^1 < \infty.$$

Poiché u non è lipschitziana, non possiamo applicare l'Osservazione 2.2, quindi verifichiamo direttamente che le derivate calcolate sopra coincidono con le derivate deboli di u . Per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$ poniamo $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon$. Da (2.1) abbiamo per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = - \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx dy + \int_{\partial B_\varepsilon} u \varphi \nu_1 d\Gamma,$$

⁴Per il Teorema di Rademacher, ved. [10, Theorem 7.18].

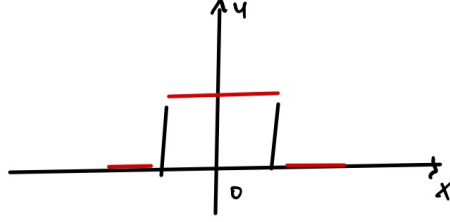


FIGURA 6.

dove $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è il versore normale a ∂B_ε orientato verso l'origine. Osserviamo che

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} u \varphi \nu_1 d\Gamma \right| \leq \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\|\varphi\|_\infty}{\varepsilon^\alpha} d\Gamma \leq C \varepsilon^{1-\alpha},$$

e questa quantità tende a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Pertanto, passando al limite abbiamo

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx dy.$$

Similmente si ricava la relazione analoga per $\frac{\partial u}{\partial y}$. Quindi $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Esempio 2.5. Poniamo infine per ogni $(x, y) \in \Omega$ (fig. 6)

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Allora $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ per qualunque $p \in (1, \infty)$, come dimostriamo per assurdo. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora si avrebbe $\nabla u = 0$ q.o. in Ω (ved. [2, Comment 4, p. 314]). Fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ non costante in $B_{1/2}$. Dalla Definizione 2.1 seguirebbe allora

$$\int_{B_{1/2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx dy = 0,$$

da cui $\partial \varphi / \partial x = 0$ q.o. in $B_{1/2}$. Analoga conclusione per $\partial \varphi / \partial y$, da cui φ sarebbe costante in $B_{1/2}$, assurdo. Per dare un senso alle derivate di funzioni come u occorre riferirsi alla *teoria delle distribuzioni* (ved. [1, p. 18]).

Le derivate deboli si calcolano mediante le stesse formule in uso per le derivate classiche. Cominciamo con la formula più semplice (per altri risultati di questo tipo ved. Sezione 3):

Lemma 2.6. *Siano $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha u + \beta v \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha u + \beta v) = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N;$$

Dimostrazione. Chiaramente $\alpha u + \beta v \in L^p(\Omega)$ e per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega).$$

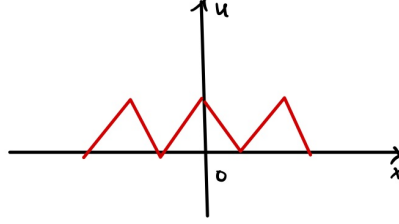


FIGURA 7.

Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha u + \beta v) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \alpha \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \beta \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= -\alpha \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx - \beta \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \varphi dx, \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Per il Lemma 2.6, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale. Su esso definiamo una norma ponendo per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\| = (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Norme equivalenti su $W^{1,p}(\Omega)$ sono le seguenti:

$$\|u\|_p + \|\nabla u\|_p, \quad \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p, \quad \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Come si vede, $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ e $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ in $L^p(\Omega)$ ($i = 1, \dots, N$). Il seguente esempio illustra la topologia di $W^{1,p}(\Omega)$:

Esempio 2.7. Sia ancora

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

e fissiamo $p > 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ ponendo (fig. 7)

$$u_n(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n} - \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{n} \\ \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{n} & \text{se } \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{2}{n} \\ \frac{3}{n} - \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } \frac{2}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{3}{n} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Si vede facilmente che $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre, si ha $u_n \rightarrow 0$ in $L^p(\Omega)$ per $n \rightarrow \infty$ (anzi, u_n converge a 0 uniformemente). Tuttavia, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|\nabla u_n| = 1$ q.o. in Ω , da cui

$$\|\nabla u_n\|_p = \left(\int_{\Omega} 1 dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = \pi^{\frac{1}{p}},$$

dunque la successione (u_n) non converge a 0 in $W^{1,p}(\Omega)$.

Esponiamo adesso le proprietà funzionali dello spazio normato $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|)$:

⁵Denoteremo $\|\cdot\|_p$ la norma di $L^p(\Omega)$, quando non sia necessario specificare il dominio.

Teorema 2.8. $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach riflessivo e separabile.

Dimostrazione. Proviamo che $W^{1,p}(\Omega)$ è completo. Sia (u_n) una successione di Cauchy in $W^{1,p}(\Omega)$. Allora (u_n) , $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})$ ($i = 1, \dots, N$) sono successioni di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Per il Teorema 1.2 si ha $u_n \rightarrow u$, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow g_i$ in $L^p(\Omega)$ ($i = 1, \dots, N$). Per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Poiché $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^{p'}(\Omega)$, possiamo passare al limite per $n \rightarrow \infty$ e otteniamo

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx,$$

quindi $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ ($i = 1, \dots, N$), da cui $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dunque $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach.

Poniamo $X = L^p(\Omega)^{N+1}$, dotato della norma

$$\|(v_0, v_1, \dots, v_N)\|_X = \left(\|v_0\|_p^p + \int_{\Omega} |(v_1, \dots, v_N)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Per il Teorema 1.2 e la Proposizione 1.5, X è uno spazio di Banach riflessivo. Poniamo per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$T(u) = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in X.$$

Si vede immediatamente che $T \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), X)$ è un'isometria lineare, pertanto $T(W^{1,p}(\Omega))$ è un sottospazio di X , completo (per isometria con $W^{1,p}(\Omega)$) e pertanto chiuso. Dunque $T(W^{1,p}(\Omega))$ è riflessivo [2, Proposition 3.20]. Inoltre, per la Proposizione 1.6 X è separabile, quindi $T(W^{1,p}(\Omega))$ è separabile [2, Proposition 3.25].

Lo spazio di Banach $W^{1,p}(\Omega)$, linearmente isometrico a $T(W^{1,p}(\Omega))$, gode delle stesse proprietà. \square

Osservazione 2.9. Per dimostrare la riflessività di $W^{1,p}(\Omega)$ si può procedere anche in modo diverso. Applicando le diseguaglianze (1.3) o (1.4) a u e alle sue derivate deboli, si dimostra che $W^{1,p}(\Omega)$ è uniformemente convesso, quindi riflessivo per il Teorema di Milman-Pettis [2, Theorem 3.31] (questo approccio tuttavia risente della scelta di una delle norme equivalenti su $W^{1,p}(\Omega)$).

Riportiamo una caratterizzazione degli elementi di $W^{1,p}(\Omega)$:

Proposizione 2.10. Sia $u \in L^p(\Omega)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$;
- (ii) esiste $C > 0$ t.c. per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|\varphi\|_{p'}.$$

Dimostrazione. Proviamo che (i) implica (ii). Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora poniamo $C = \|\nabla u\|_p$. Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$, e per la Definizione 2.1 e (1.2) si ha

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| = \left| \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \|\varphi\|_{p'} \leq C \|\varphi\|_{p'}.$$

Proviamo che (ii) implica (i). Fissato $i \in \{1, \dots, N\}$, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ poniamo

$$\psi(\varphi) = \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Per (ii) e per il Teorema di Hahn-Banach [2, Corollary 1.2], esiste $\tilde{\psi} \in L^{p'}(\Omega)^*$ t.c. $\tilde{\psi}(\varphi) = \psi(\varphi)$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $|\tilde{\psi}(v)| \leq C\|v\|_{p'}$ per ogni $v \in L^{p'}(\Omega)$. Per il Teorema 1.4 esiste $g_i \in L^p(\Omega)$ t.c. per ogni $v \in L^{p'}(\Omega)$

$$-\int_{\Omega} g_i v \, dx = \tilde{\psi}(v).$$

Pertanto g_i verifica la Definizione 2.1 e concludiamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$. \square

Concludiamo questa sezione introducendo le *derivate deboli di ordine superiore*. Per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ di altezza $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N = k$, e per ogni funzione $u \in C^k(\Omega)$, adottiamo la notazione

$$D^\alpha u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \quad (D^0 u = u).$$

Lo spazio di Sobolev di ordine k è definito ricorsivamente a partire da $W^{1,p}(\Omega)$ come segue:

Definizione 2.11. Per ogni $k \geq 2$, lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $u \in W^{k-1,p}(\Omega)$ t.c.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Vale la seguente caratterizzazione, analoga alla Proposizione 2.10:

Proposizione 2.12. Siano $u \in L^p(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) $u \in W^{k,p}(\Omega)$;
- (ii) per ogni multi-indice α , $|\alpha| \leq k$ esiste $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi \, dx;$$

- (iii) esiste $C > 0$ t.c. per ogni α , $|\alpha| \leq k$ e ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{p'}.$$

Le funzioni g_α sono dette derivate deboli di ordine $|\alpha|$, e denotate $D^\alpha u$. Esse seguono le medesime regole di calcolo delle derivate classiche. Sullo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ adottiamo la norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

con la quale $W^{k,p}(\Omega)$ risulta essere uno spazio di Banach separabile e riflessivo.

Osservazione 2.13. In effetti, per $k \geq 2$ e Γ limitata e 'abbastanza regolare' si dimostra che

$$\|u\| = \left(\|u\|_p^p + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

è una norma su $W^{k,p}(\Omega)$ equivalente a quella definita sopra [2, p. 271].

Esercizio 2.14. Dimostrare (2.2).

Esercizio 2.15. Dimostrare che se Ω è limitato e di classe C^1 , allora $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$.

Esercizio 2.16. Estendere l'Esempio 2.4 a una dimensione N arbitraria.

Esercizio 2.17. Dimostrare che su $W^{1,p}(\Omega)$ una norma equivalente a quella definita sopra è

$$\|u\| = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p.$$

Esercizio 2.18. Dimostrare l'Osservazione 2.9.

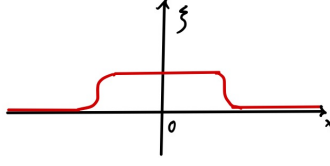


FIGURA 8.

3. DENSITÀ ED ESTENSIONE

Dalla Definizione 2.1 segue ovviamente l'inclusione insiemistica $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$, che sappiamo inoltre essere *propria* (Esempio 2.3). Cercheremo ora di rispondere alla seguente domanda: *è possibile approssimare una funzione di $W^{1,p}(\Omega)$ mediante funzioni regolari?* Un altro modo di formulare questa domanda è: $W^{1,p}(\Omega) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è un sottospazio denso di $W^{1,p}(\Omega)$?

Cominciamo dal caso $\Omega = \mathbb{R}^N$. Riportiamo un utile lemma sulla relazione fra derivate deboli e convoluzione:

Lemma 3.1. *Siano $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora $(\rho \star u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \star u) = \left(\rho \star \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 1.8 abbiamo $(\rho \star u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\left(\rho \star \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Poniamo $\bar{\rho}(x) = \rho(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per i Lemmi 1.9, 1.11 abbiamo per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\rho \star u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\bar{\rho} \star \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \star \varphi) u dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{\rho} \star \varphi) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\rho \star \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \varphi dx, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Abbiamo il seguente risultato di densità:

Teorema 3.2. *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Allora esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. Sia (ρ_n) una successione di mollificatori, definita come nella Sezione 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $v_n = (\rho_n \star u)$, così che $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (Lemma 1.11, Esercizio 1.17) e $v_n \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ (Teorema 1.13).

Introduciamo anche una funzione *cut-off* (fig. 8), ovvero una funzione $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo $\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n})$, quindi $u_n = \zeta_n v_n$. Si ha allora $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}(u_n) \subseteq \overline{B_{2n}}$.

Proviamo che $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Per costruzione si ha $u_n(x) = v_n(x)$ per ogni $x \in B_n$. Inoltre esiste $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ t.c. $|v_n(x)| \leq g(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ e ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - v_n|^p dx &= \int_{B_{2n} \setminus B_n} |u_n - v_n|^p dx + \int_{B_{2n}^c} |v_n|^p dx \\ &= \int_{B_{2n} \setminus B_n} (1 - \zeta_n)^p |v_n|^p dx + \int_{B_{2n}^c} |v_n|^p dx \leq \int_{B_n^c} g^p dx, \end{aligned}$$

e l'ultima quantità tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, da cui $(u_n - v_n) \rightarrow 0$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Abbiamo dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u\|_p \leq \|u_n - v_n\|_p + \|v_n - u\|_p,$$

e questo tende a 0 per $n \rightarrow \infty$.

Proviamo ora che $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Fissiamo $i \in \{1, \dots, N\}$. Dal Lemma 3.1 segue per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} &= \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} v_n + \zeta_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} (\rho_n \star u) + \zeta_n \left(\rho_n \star \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

e questa funzione appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N)$ (Teorema 1.8). Per costruzione di ζ_n si ha per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{n} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \left(\frac{x}{n} \right).$$

Per le relazioni precedenti abbiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p &\leq \left\| \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} (\rho_n \star u) \right\|_p + \left\| \zeta_n \left(\rho_n \star \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \zeta_n \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p + \left\| \zeta_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \\ &\leq \left\| \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i} \right\|_\infty \|\rho_n \star u\|_p + \|\zeta_n\|_\infty \left\| \left(\rho_n \star \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p + \left\| \zeta_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \\ &\leq \frac{1}{n} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty \|\rho_n\|_1 \|u\|_p + \left\| \left(\rho_n \star \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p + \left\| \zeta_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p. \end{aligned}$$

Il primo termine dell'ultima quantità tende a 0 per $n \rightarrow \infty$. Anche il secondo e il terzo tendono a 0 per il Teorema 1.13. Dunque ricaviamo che per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ in } L^p(\mathbb{R}^N),$$

da cui $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. □

Per un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la convergenza di (u_n) si conserva ma quella di (∇u_n) vale solo *localmente*. Premettiamo al risultato per questo caso un lemma tecnico:

Lemma 3.3. *Siano $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\alpha \in C_c^1(\Omega)$, e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$*

$$w(x) = \begin{cases} \alpha(x)u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Allora $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{in } \Omega^c \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N.$$

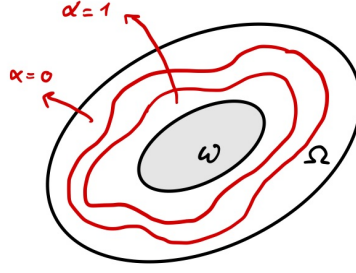


FIGURA 9.

Dimostrazione. Chiaramente $\alpha w \in L^p(\Omega)$ e per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),$$

quindi le rispettive estensioni appartengono a $L^p(\mathbb{R}^N)$. Inoltre, per ogni $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ si ha $\alpha \varphi \in C_c^1(\Omega)$, e per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} \alpha u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha \varphi) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} (\alpha \varphi) dx - \int_{\Omega} u \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi dx, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Il seguente risultato è valido per un generico dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

Teorema 3.4. (Friedrichs) *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c.*

- (i) $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$;
- (ii) per ogni dominio $\omega \Subset \Omega$, $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\omega, \mathbb{R}^N)$ ⁶.

Dimostrazione. Per prima cosa, estendiamo u ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Chiaramente $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Definiamo le successioni (ρ_n) , (ζ_n) come nel Teorema 3.2 e per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $u_n = \zeta_n(\rho_n \star \tilde{u})$.

Proviamo (i). Come nel caso precedente si ha $u_n \rightarrow \tilde{u}$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$, da cui $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$.

Proviamo ora (ii). Sia $\omega \Subset \Omega$. Chiaramente si ha $\tilde{u} \in W^{1,p}(\omega)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande possiamo definire una funzione $\alpha \in C_c^1(\Omega)$ t.c. $\alpha(x) = 1$ per ogni $x \in \bar{\omega} + B_{1/n}$ (fig. 9). Si ha allora per ogni $x \in \omega$

$$(3.1) \quad \rho_n \star (\alpha \tilde{u})(x) = \rho_n \star \tilde{u}(x).$$

⁶Per ogni coppia di aperti $A, B \subset \mathbb{R}^N$ scriviamo $A \Subset B$ se $\bar{A} \subset B$ ed è compatto.

Infatti, dal Lemma 1.10 segue

$$\begin{aligned} \text{supp}(\rho_n \star (\alpha \tilde{u} - \tilde{u})) &\subseteq \overline{\text{supp}(\rho_n) + \text{supp}(\alpha \tilde{u} - \tilde{u})} \\ &\subseteq \overline{B_{1/n} + \text{supp}(\alpha - 1)}. \end{aligned}$$

Per costruzione, per ogni $x \in \omega + B_{1/n}$ abbiamo $x \notin \text{supp}(\alpha - 1)$, da cui

$$\text{supp}(\rho_n \star (\alpha \tilde{u} - \tilde{u})) \subset \omega^c.$$

Questo prova (3.1). Per il Lemma 3.3 abbiamo $\alpha \tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha \tilde{u}) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \tilde{u} + \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}.$$

In particolare, q.o. in ω abbiamo

$$\alpha \tilde{u} = u, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha \tilde{u}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Scegliendo $n \in \mathbb{N}$ ancora più grande se necessario abbiamo $\omega \subset B_n$, da cui per (3.1) segue $u_n = \rho_n \star (\alpha \tilde{u})$ q.o. in ω . Dunque abbiamo

$$\int_{\omega} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx = \int_{\omega} \left| \left(\rho_n \star \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha \tilde{u}) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha \tilde{u}) \right|^p dx,$$

e questo tende a 0 per $n \rightarrow \infty$. □

Applicando il Teorema 3.4, dimostriamo alcune ulteriori proprietà delle derivate deboli (simili al Lemma 2.6):

Lemma 3.5. *Siano $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Allora $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che

$$\int_{\Omega} |uv|^p dx \leq \|u\|_{\infty}^p \|v\|_p^p,$$

e per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \|v\|_{\infty}^p + C \|u\|_{\infty}^p \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p.$$

Dunque le funzioni precedenti appartengono a $L^p(\Omega)$. Inoltre, per il Teorema 3.4 esistono due successioni $(u_n), (v_n)$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c.

$$u_n \rightarrow u, \quad v_n \rightarrow v \text{ in } L^p(\Omega),$$

e per ogni $\omega \Subset \Omega$

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u, \quad \nabla v_n \rightarrow \nabla v \text{ in } L^p(\omega).$$

Esaminando attentamente la dimostrazione del Teorema 3.4, vediamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si può supporre

$$\|u_n\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty}, \quad \|v_n\|_{\infty} \leq \|v\|_{\infty}.$$

Fissiamo allora $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e determiniamo $\omega \Subset \Omega$ t.c. $\text{supp}(\varphi) \subset \omega$. Da (2.1) si ha allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(3.2) \quad \int_{\omega} u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \varphi dx.$$

Dalle relazioni precedenti abbiamo q.o. in ω

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n \varphi \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} v \varphi.$$

Per [2, Theorem 4.9], passando se necessario a una sotto-successione, troviamo $g \in L^p(\omega)$ t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$, q.o. in ω

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right| \leq g,$$

da cui

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n \varphi \right| \leq g \|v\|_\infty \|\varphi\|_\infty.$$

Per il Teorema della convergenza dominata [2, Theorem 4.2]

$$\lim_n \int_\omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n \varphi \, dx = \int_\omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \varphi \, dx.$$

Similmente si tratta il secondo addendo dell'integranda in (3.2). Dunque, passando al limite in (3.2) per $n \rightarrow \infty$, abbiamo

$$\int_\omega uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = - \int_\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \varphi \, dx.$$

Ricordando che $\varphi = 0$ e $\nabla \varphi = 0$ in $\Omega \setminus \omega$, possiamo infine estendere gli integrali sopra a Ω , da cui la tesi. \square

Consideriamo ora il caso di una funzione composta:

Lemma 3.6. *Siano $G \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $G(0) = 0$, $|G'(t)| \leq M$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ ($M > 0$), $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (G \circ u) = G'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$|G(t)| = \left| \int_0^t G'(\tau) \, d\tau \right| \leq M|t|.$$

Si ha allora

$$\int_\Omega |G(u)|^p \, dx \leq M^p \|u\|_p^p,$$

e per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\int_\Omega \left| G'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \, dx \leq M^p \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p.$$

Dunque le funzioni precedenti appartengono a $L^p(\Omega)$. Inoltre, per il Teorema 3.4 esiste una successione (u_n) come nel Lemma 3.5. Fissata $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, determiniamo $\omega \Subset \Omega$ t.c. $\text{supp}(\varphi) \subset \omega$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_\omega G(u_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = - \int_\omega G'(u_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx.$$

Procedendo come nel Lemma 3.5 e passando al limite per $n \rightarrow \infty$, abbiamo

$$\int_\Omega G(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = - \int_\Omega G'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx,$$

da cui la tesi. \square

Infine, consideriamo il caso del cambiamento di variabili:

Lemma 3.7. *Siano $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^N$ domini, $H \in C^1(\bar{\Omega}', \bar{\Omega})$ un C^1 -diffeomorfismo t.c. $|J_H| \leq M$ in Ω' , $|J_{H^{-1}}| \leq M$ in Ω ($M > 0$), $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ e si ha per q.o. $y \in \Omega'$, $x = H(y)$*

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y), \quad j = 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che

$$\int_{\Omega'} |u(H(y))|^p dy \leq \int_{\Omega} |u(x)|^p |\det(J_{H^{-1}}(x))| dx \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Similmente, per ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \right|^p dy &\leq \left\| \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \right\|_{L^\infty(\Omega')}^p \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p |\det(J_{H^{-1}}(x))| dx \\ &\leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Dunque le funzioni precedenti appartengono a $L^p(\Omega')$. Sia ora (u_n) una successione come nel Lemma 3.5. Si ha allora $(u_n \circ H) \rightarrow (u \circ H)$ in $L^p(\Omega')$, e per ogni $\omega' \Subset \Omega'$ e ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \text{ in } L^p(\omega').$$

Fissata $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$, determiniamo $\omega' \Subset \Omega'$ t.c. $\text{supp}(\psi) \subset \omega'$. Si ha allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, N\}$

$$\int_{\omega'} u_n(H(y)) \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy = - \int_{\omega'} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \psi(y) dy.$$

Procedendo come nel Lemma 3.5 e passando al limite per $n \rightarrow \infty$, abbiamo

$$\int_{\omega'} u(H(y)) \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy = - \int_{\omega'} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \psi(y) dy,$$

da cui la tesi. □

La proprietà (ii) del Teorema 3.4 è *locale*, e non vale per il dominio Ω perché, in generale, $\tilde{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Un metodo per approssimare una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mediante funzioni regolari è il seguente:

- (a) estendere u a una funzione $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ t.c. $\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ (con $C > 0$ indipendente da u);
- (b) applicare il Teorema 3.2 trovando una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \rightarrow \tilde{u}$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, così che per restrizione si ha $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Il passo (a) corrisponde al problema dell'*estensione continua* da $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, che come vedremo ammette soluzione solo per alcuni domini Ω . Per ogni dominio, diremo che $E \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ è un *operatore di estensione* se per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e q.o. $x \in \Omega$ si ha $E(u)(x) = u(x)$. In particolare, se esiste un operatore di estensione E , allora esiste $C > 0$ t.c. per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Cominciamo con la tecnica più semplice, l'*estensione per riflessione*. Definiamo Q, Q_+ come nella Sezione 2. Per ogni $x = (x', x_N) \in Q_+$ poniamo $\bar{x} = (x, -x_N) \in Q_-$, quindi per ogni $u : Q_+ \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile definiamo due funzioni misurabili $Ru, Su : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$Ru(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in Q_+ \\ u(\bar{x}) & \text{se } x \in Q_- \end{cases}, \quad Su(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in Q_+ \\ -u(\bar{x}) & \text{se } x \in Q_- \end{cases}$$

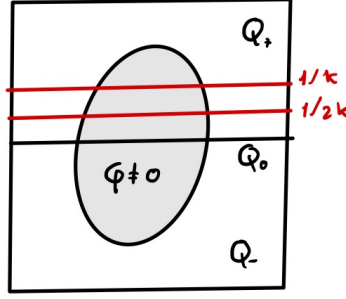


FIGURA 10.

(le funzioni Ru , Su sono definite a meno di un insieme di misura nulla). Si ha in questo caso $E(u) = Ru$. Più precisamente:

Lemma 3.8. *Sia $u \in W^{1,p}(Q_+)$. Allora $Ru \in W^{1,p}(Q)$ ed esiste $C > 0$ indipendente da u t.c.*

- (i) $\|Ru\|_{L^p(Q)} \leq C\|u\|_{L^p(Q_+)}$;
- (ii) $\|\nabla(Ru)\|_{L^p(Q)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(Q_+)}$.

Dimostrazione. Osserviamo che $Ru \in L^p(Q)$ con

$$\int_Q |Ru|^p dx = \int_{Q_+} |u|^p dx + \int_{Q_-} |u(\bar{x})|^p dx = 2 \int_{Q_+} |u|^p dx,$$

il che prova (i). Similmente $Su \in L^p(Q)$ con analogo controllo sulla norma.

Proviamo ora (ii). Per cominciare, fissato $i \in \{1, \dots, N-1\}$, proviamo che

$$(3.3) \quad \frac{\partial Ru}{\partial x_i} = R\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Infatti, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(Q)$ definiamo $\psi \in C^\infty(Q_+)$ ponendo per ogni $x \in Q_+$

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi(\bar{x}).$$

Introduciamo un diverso tipo di funzione *cut-off* (fig. 10). Sia $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c. per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ poniamo $\eta_k(t) = \eta(kt)$, così che $\eta_k \rightarrow 1$ in Q_+ . Poniamo inoltre per ogni $x \in Q_+$

$$\xi_k(x) = \eta_k(x_N)\psi(x),$$

così che $\xi_k \in C_c^\infty(Q_+)$. Osserviamo che $\xi_k \rightarrow \psi$ in Q_+ per $k \rightarrow \infty$, con $|\xi_k| \leq \psi$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \xi_k dx.$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, per il Teorema della convergenza dominata [2, Theorem 4.2] si ha

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi dx.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
 \int_Q Ru \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{Q_-} u(x', -x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) dx \\
 &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx \\
 &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi dx \\
 &= - \int_Q R \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi dx.
 \end{aligned}$$

Inoltre, ragionando come in (i) si vede che

$$R \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in L^p(Q),$$

da cui (3.3). Per $i = N$, ragionando analogamente abbiamo

$$(3.4) \quad \frac{\partial Ru}{\partial x_N} = S \left(\frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in L^p(Q).$$

Applicando (3.3), (3.4) e quindi (i), ricaviamo per un opportuno $C > 0$ (indipendente da (u))

$$\begin{aligned}
 \int_Q |\nabla Ru|^p dx &\leq C \left(\sum_{i=1}^{N-1} \int_Q \left| R \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right|^p dx + \int_Q \left| S \left(\frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \right|^p dx \right) \\
 &= C \sum_{i=1}^N \int_{Q_+} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \\
 &\leq C \int_{Q_+} |\nabla u|^p dx,
 \end{aligned}$$

da cui segue infine (ii). □

Osservazione 3.9. Il Lemma 3.8 vale anche per il dominio illimitato

$$\mathbb{R}_+^N = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\},$$

con la medesima dimostrazione. Notiamo anche che il valore ottimale per la costante $C > 0$ si determina facilmente per (i) ($C = 2^{\frac{1}{p}}$) ma non per (ii).

Esistono operatori di estensione per ogni dominio regolare Ω (Sezione 2) con frontiera Γ *limitata*. Questa condizione, valida per esempio se Ω è limitato o se Ω^c è limitato, è comunemente usata nella teoria degli spazi di Sobolev e delle equazioni alle derivate parziali (ved. [7]). A differenza dal caso esaminato sopra, qui non disponiamo di una rappresentazione esplicita di $E(u)$:

Teorema 3.10. (di estensione per domini regolari) *Sia Ω un dominio regolare t.c. Γ è limitata. Allora esiste un operatore di estensione $E \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$.*

Dimostrazione. L'insieme $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ è compatto. Introduciamo un *ricoprimento* di $\bar{\Omega}$ definito come segue (fig. 11). Per il Lemma di partizione dell'unità [2, Lemma 9.3], esistono $m \in \mathbb{N}$, $U_1, \dots, U_m \subset \mathbb{R}^N$ aperti limitati t.c.

$$\Gamma \subset \bigcup_{k=1}^m U_k,$$

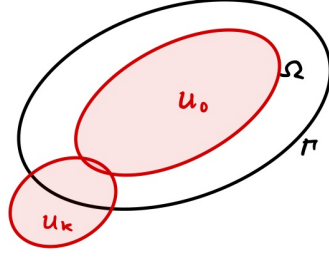


FIGURA 11.

e $\theta_1, \dots, \theta_m \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $0 \leq \theta_k \leq 1$ in \mathbb{R}^N , $\text{supp}(\theta_k) \subset U_k$ ($k = 1, \dots, m$) e per ogni $x \in \Gamma$

$$\sum_{k=1}^m \theta_k(x) = 1.$$

Inoltre, poiché Γ è di classe C^1 , scegliendo gli insiemi U_k più piccoli se necessario, per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$ possiamo definire un C^1 -diffeomorfismo $H_k : \bar{Q} \rightarrow \bar{U}_k$ t.c.

$$H_k(Q_+) = U_k \cap \Omega, \quad H_k(Q_0) = U_k \cap \Gamma.$$

A questi elementi aggiungiamo un aperto $U_0 \subset \Omega$ t.c.

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^m U_k$$

e una funzione $\theta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $0 \leq \theta_0 \leq 1$ in \mathbb{R}^N , $\text{supp}(\theta_0) \subset U_0$, e per ogni $x \in \bar{\Omega}$

$$(3.5) \quad \sum_{k=0}^m \theta_k(x) = 1.$$

Fissiamo ora $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Per ogni $k \in \{0, \dots, m\}$ poniamo $u_k = \theta_k u \in W^{1,p}(U_k)$, quindi estendiamo le funzioni u_k a \mathbb{R}^N :

(a) Poniamo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{se } x \in U_0 \\ 0 & \text{se } x \in U_0^c. \end{cases}$$

Per il Lemma 3.3 abbiamo $\tilde{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e in U_0

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_i} = \frac{\partial \theta_0}{\partial x_i} u + \theta_0 \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Chiaramente si ha

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Inoltre, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$ si ha⁷

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \left\| \frac{\partial \theta_0}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

⁷La costante $C > 0$, il cui valore cambia di volta in volta, dipende solo da N e da p .

Dunque

$$(3.6) \quad \|\tilde{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(b) Ora fissiamo $k \in \{1, \dots, m\}$ e poniamo $v_k = u \circ H_k$. Per il Lemma 3.7 abbiamo $v_k \in W^{1,p}(Q_+)$ con

$$\|v_k\|_{W^{1,p}(Q_+)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Quindi applichiamo il Lemma 3.8 e otteniamo $Rv_k \in W^{1,p}(Q)$ con

$$\|Rv_k\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C\|v_k\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

Infine torniamo al dominio originario ponendo $w_k = Rv_k \circ H_k^{-1} \in W^{1,p}(U_k)$, così che $w_k = u$ in $U_k \cap \Omega$ e ancora per il Lemma 3.7

$$\|w_k\|_{W^{1,p}(U_k)} \leq C\|Rv_k\|_{W^{1,p}(Q)}.$$

Concatenando le precedenti diseguaglianze abbiamo

$$\|w_k\|_{W^{1,p}(U_k)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Procediamo adesso come sopra, ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\tilde{u}_k(x) = \begin{cases} \theta_k(x)w_k(x) & \text{se } x \in U_k \\ 0 & \text{se } x \in U_k^c. \end{cases}$$

Come nella dimostrazione di (3.6) vediamo che $\tilde{u}_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con

$$(3.7) \quad \|\tilde{u}_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Osserviamo che $\tilde{u}_k(x) = u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e ogni $k \in \{0, \dots, m\}$. Infine poniamo

$$E(u) = \sum_{k=0}^m \tilde{u}_k.$$

Chiaramente $E : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ è un operatore lineare. Inoltre, per (3.6), (3.7) abbiamo

$$\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Infine, da (3.5) segue per q.o. $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} E(u)(x) &= \theta_0(x)u(x) + \sum_{k=1}^m \theta_k(x)w_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^m \theta_k(x)u(x) = u(x), \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 3.11. Rileggendo la dimostrazione del Teorema 3.10, notiamo che si ha anche

$$\|E(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)},$$

con $C > 0$ indipendente da u . Invece, diversamente dal Lemma 3.8, non possiamo controllare la norma del gradiente di $E(u)$ per mezzo della sola norma del gradiente di u . Ricordiamo infine che l'ipotesi di regolarità della frontiera si può alleggerire, come nel Teorema di Caldéron [1, Theorem 5.28].

Il Teorema 3.10 permette di migliorare il Teorema 3.4, sotto ipotesi più restrittive circa il dominio:

Teorema 3.12. *Siano Ω un dominio regolare t.c. Γ è limitata, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 3.10 esiste $E(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ che estende u . Per il Teorema 3.2 esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \rightarrow E(u)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, da cui $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. \square

Osservazione 3.13. In effetti, la tesi del Corollario 3.12 vale anche se Ω è un dominio regolare con Γ regolare a pezzi. Osserviamo inoltre che, in generale, le funzioni approssimanti u_n non appartengono a $C_c^\infty(\Omega)$. Infine ricordiamo che la tecnica qui esposta per 'regolarizzare' le funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ non è l'unica: in alternativa, si può approssimare una funzione attraverso le sue *medie locali*.

Esercizio 3.14. Dimostrare l'Osservazione 3.9.

Esercizio 3.15. Dimostrare l'Osservazione 3.11.

Esercizio 3.16. Dimostrare il Lemma 3.6 nel caso in cui $G \in C(\mathbb{R})$ è lipschitziana, non necessariamente derivabile.

Esercizio 3.17. Definire una specifica funzione η come richiesto nel Lemma 3.8.

Esercizio 3.18. Dimostrare (3.4).

4. IMMERSIONI

Una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è integrabile con esponente p (Definizione 2.1), ma l'esistenza delle derivate deboli permette di aumentare tale esponente fino a un valore di soglia $p^* \in (p, \infty]$ detto *esponente critico*, che dipende solo da p e N :

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{se } p < N \\ \infty & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$

Formalmente, per ogni $q \in [p, p^*]$ (o $q \in [p, p^*)$ secondo i casi) esiste un operatore lineare continuo iniettivo $I \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L^q(\Omega))$, detto *immersione*, che proietta $W^{1,p}(\Omega)$ in una 'copia', sottospazio di $L^q(\Omega)$ (in alcuni casi, I è anche compatto, ved. [6]). Ogni elemento $u \in W^{1,p}(\Omega)$ viene pertanto identificato con $I(u) \in L^q(\Omega)$. In generale, se fra due spazi di Banach X, Y esiste un'immersione continua scriveremo $X \hookrightarrow Y$, e se l'immersione è compatta scriveremo $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Il primo caso che consideriamo è $\Omega = \mathbb{R}^N$, $p < N$. Premettiamo ad esso un lemma tecnico (per la dimostrazione ved. [2, Lemma 9.4]):

Lemma 4.1. (Gagliardo) *Siano $N \geq 2$, $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, N\}$ poniamo $\tilde{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, e definiamo*

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^N \varphi(\tilde{x}_i).$$

Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \|\varphi_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Ora possiamo dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione:

Teorema 4.2. (Diseguaglianza di Sobolev, $p < N$) *Sia $p \in (1, N)$. Allora esiste $C > 0$ t.c. per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si ha $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sia

$$m = \frac{N-1}{N} p^* > 1.$$

Poniamo $v = |u|^{m-1}u$, così che $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ con

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = m|u|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, N).$$

Proviamo che

$$(4.1) \quad \|v\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, N\}$ definiamo $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^{N-1}$ come nel Lemma 4.1 e poniamo

$$f_i(\tilde{x}_i) = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N) \right| dt.$$

L'integrale sopra converge perché la funzione integranda ha supporto compatto in \mathbb{R} . Inoltre si ha $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{N-1})$, con

$$\begin{aligned} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right| dx = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Allora si ha per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} |v(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N) \right| dt = f_i(\tilde{x}_i). \end{aligned}$$

Moltiplicando ed elevando all'esponente $\frac{1}{N-1}$, otteniamo

$$|v(x)|^{\frac{1}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^N f_i(\tilde{x}_i)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Poniamo adesso per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\varphi_i(\tilde{x}_i) = f_i(\tilde{x}_i)^{\frac{1}{N-1}},$$

così che $\varphi_i \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Per il Lemma 4.1 si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{N}{N-1}} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N f_i(\tilde{x}_i)^{\frac{1}{N-1}} dx \\ &\leq \prod_{i=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_i(\tilde{x}_i) d\tilde{x}_i \right]^{\frac{1}{N-1}} = \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}, \end{aligned}$$

da cui (4.1). Adesso torniamo a u . Per (4.1) e per le formule delle derivate di v , usando alla fine (1.2), abbiamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{mN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}^m &= \|v\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \\ &= \prod_{i=1}^N \left\| m|u|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \\ &\leq m \|u\|_{L^{(m-1)p'}(\mathbb{R}^N)}^{m-1} \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}. \end{aligned}$$

Dalla definizione di m segue

$$\frac{mN}{N-1} = (m-1)p' = p^*.$$

Dunque, nella disuguaglianza precedente possiamo semplificare $\|u\|_{p^*}^{m-1}$ e quindi maggiorare le norme delle derivate di u con quelle di ∇u , e ottenere

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq m \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \leq m \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Sia ora $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Per il Teorema 3.2 esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Per quanto sopra, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq m \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Per il Lemma di Fatou [2, Lemma 4.1] abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \leq m \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx,$$

da cui $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq m \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 4.3. Riguardando la dimostrazione del Teorema 4.2, notiamo diversi particolari. In primo luogo, la disuguaglianza (4.1) implica

$$\|v\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

conducendo (per densità) a un risultato analogo per $p = 1$ e l'esponente critico $1^* = \frac{N}{N-1}$. Inoltre, abbiamo una costante esplicita

$$C = \frac{N-1}{N} p^*,$$

che dipende solo da N e p , ma essa non è ottimale (per la costante ottimale ved. [4, p. 151]).

Osservazione 4.4. L'esponente p^* è l'unico per il quale vale il Teorema 4.2, come prova il seguente argomento. Siano $q > 1$, $C > 0$ t.c. per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ si abbia

$$(4.2) \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Fissiamo $\lambda > 0$ e poniamo $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$. Chiaramente si ha $u_\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, inoltre

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{-\frac{N}{q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \quad \|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Infatti, usando il cambiamento di variabile $y = \lambda x$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda(x)|^q dx = \lambda^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^q dy,$$

e similmente

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda(x)|^p dx = \lambda^{p-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^p dy.$$

Applicando (4.2) a u_λ abbiamo per ogni $\lambda > 0$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \lambda^{1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

per ogni $\lambda > 0$. Consideriamo dunque due casi:

(a) se

$$1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q} > 0,$$

allora il secondo membro tende a 0 per $\lambda \rightarrow 0^+$, da cui $u = 0$, assurdo;

(b) se

$$1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q} < 0,$$

allora il secondo membro tende a 0 per $\lambda \rightarrow \infty$, parimenti assurdo.

Quindi deduciamo che

$$1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q} = 0,$$

ovvero $q = p^*$.

Esaminiamo ora il caso limite $p = N$, in cui l'esponente critico è ∞ , ma non viene raggiunto:

Teorema 4.5. (Diseguaglianza di Sobolev, $p = N$) Per ogni $q \in [N, \infty)$ esiste $C_q > 0$ t.c. per ogni $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ si ha $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_q (\|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}).$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Per ogni $m \geq 1$, ragionando come nel Teorema 4.2 e poi applicando la diseguaglianza di Young (1.1), otteniamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{mN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} &\leq m^{\frac{1}{m}} \|u\|_{L^{\frac{(m-1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{m-1}{m}} \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{m}} \\ &\leq m^{\frac{1}{m}} \left(\frac{m-1}{m} \|u\|_{L^{\frac{(m-1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{m} \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right). \end{aligned}$$

Osserviamo che la funzione $m \mapsto m^{\frac{1}{m}}$ è limitata in $[1, \infty)$ e che $\frac{m-1}{m}, \frac{1}{m} \leq 1$. Dunque esiste $C > 0$, indipendente da m , t.c. per ogni $m \geq 1$ si ha la seguente relazione ricorsiva:

$$(4.3) \quad \|u\|_{L^{\frac{mN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left(\|u\|_{L^{\frac{(m-1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right).$$

Applichiamo ora un metodo di auto-miglioramento della proprietà (4.3) detto *bootstrap*⁸ Poniamo $m = N$, allora per (4.3)

$$\|u\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left(\|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right).$$

⁸Derivato dall'espressione americana 'Sollevarsi aggrappandosi ai lacci delle proprie scarpe'.

Ora poniamo $m = N + 1$, così che per (4.3) e la relazione precedente

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{(N+1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} &\leq C \left(\|u\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right) \\ &\leq C^2 \|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + C(C+1) \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Così continuando, otteniamo le seguenti stime delle norme di u : per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$q_k = \frac{(N+k)N}{N-1},$$

allora $u \in L^{q_k}(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $C_k > 0$ t.c.

$$\|u\|_{L^{q_k}(\mathbb{R}^N)} \leq C_k \left(\|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right).$$

Chiaramente $q_k \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$. Dunque, per ogni $q \geq N$ esiste $k \in \mathbb{N}$ t.c. $q \in [q_k, q_{k+1}]$, da cui esiste $\tau \in [0, 1]$ t.c.

$$\frac{1}{q} = \frac{\tau}{q_k} + \frac{1-\tau}{q_{k+1}}.$$

Per la diseguaglianza di interpolazione (1.5) e le stime precedenti, abbiamo allora $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \|u\|_{L^{q_k}(\mathbb{R}^N)}^\tau \|u\|_{L^{q_{k+1}}(\mathbb{R}^N)}^{1-\tau} \\ &\leq C_{q_k}^\tau C_{q_{k+1}}^{1-\tau} \left(\|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right), \end{aligned}$$

da cui la tesi con la costante (indipendente da u)

$$C_q = C_{q_k}^\tau C_{q_{k+1}}^{1-\tau}.$$

Consideriamo ora $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Per densità, ragionando come nel Teorema 4.2, si conclude. \square

Nel Teorema 4.5, non si può 'passare al limite' per $q \rightarrow \infty$, perché $C_q \rightarrow \infty$. Invece, se $p > N$, si dimostra che le funzioni di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ sono limitate. Inoltre, tali funzioni sono continue, più precisamente hölderiane. Ricordiamo che una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *hölderiana* con esponente $\alpha \in (0, 1)$ se esiste $C > 0$ t.c. per ogni $x, y \in \Omega$

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

In tal caso si scrive $u \in C^\alpha(\Omega)$ (chiaramente $C^\alpha(\Omega) \subset C(\Omega)$, ved. [1]). Abbiamo il seguente risultato di immersione per lo spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($p > N$):

Teorema 4.6. (Morrey) *Sia $p > N$. Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*

- (i) $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, con $\alpha \in (0, 1)$ indipendente da u ;
- (ii) $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, inoltre esiste $C > 0$ indipendente da u t.c.

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right).$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\alpha = \frac{p-N}{p} \in (0, 1).$$

Proviamo che esiste $C > 0$ t.c. per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(4.4) \quad |u(x) - u(y)| \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x - y|^\alpha.$$

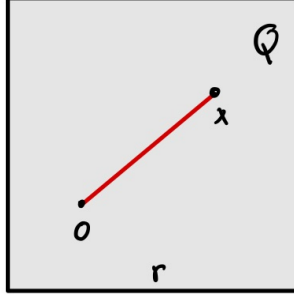


FIGURA 12.

Supponiamo dapprima $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sia $Q_r \subset \mathbb{R}^N$ un cubo N -dimensionale di lato $r > 0$ t.c. $0 \in Q_r$ (fig. 12), e osserviamo che per ogni $x \in Q_r$

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| |x_i| dt \\ &\leq r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt. \end{aligned}$$

Definiamo la media integrale di u in Q_r :

$$\bar{u}(Q_r) = \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} u dx$$

Applichiamo, nell'ordine, la disuguaglianza precedente, la disuguaglianza di Hölder (1.2), il cambiamento di variabili $y = tx$, quindi le inclusioni $tQ_r \subset Q_r \subset \mathbb{R}^N$ e la definizione di α :

$$\begin{aligned} |\bar{u}(Q_r) - u(0)| &\leq \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |u(x) - u(0)| dx \\ &\leq \frac{r}{|Q_r|} \int_{Q_r} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt dx \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^N \int_{Q_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dx dt \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^N \int_{tQ_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| \frac{dy}{t^N} dt \\ &\leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^N \left(\int_{Q_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} |tQ_r|^{\frac{1}{p'}} \frac{dt}{t^N} \\ &\leq Nr^{\frac{N}{p'} - N + 1} \|\nabla u\|_{L^p(Q_r)} \int_0^1 t^{\frac{N}{p'} - N} dt \\ &= \frac{Nr^\alpha}{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Per traslazione, per ogni cubo Q_r di lato $r > 0$ e ogni $x \in Q_r$ si ha

$$|\bar{u}(Q_r) - u(x)| \leq \frac{Nr^\alpha}{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Siano ora $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x \neq y$. Poniamo $r = 2|x - y| > 0$, così che esiste un cubo Q_r di lato r t.c. $x, y \in Q_r$. Si ha allora

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - \bar{u}(Q_r)| + |\bar{u}(Q_r) - u(y)| \\ &\leq \frac{2Nr^\alpha}{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{2^{\alpha+1}N}{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x - y|^\alpha, \end{aligned}$$

da cui (4.4) con $C = \frac{2^{\alpha+1}N}{\alpha}$ indipendente da u . Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, per il Teorema 3.2 esiste una successione (u_n) in $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ (in particolare $u_n \rightarrow u$ q.o. in \mathbb{R}^N), $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^N$, da (4.4) applicata a u_n segue

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq C \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x - y|^\alpha.$$

Per $n \rightarrow \infty$, per q.o. $x, y \in \mathbb{R}^N$ possiamo passare al limite nella diseuguaglianza precedente, ricordando che $\|\nabla u_n\|_p \rightarrow \|\nabla u\|_p$, e otteniamo (4.4). Ricordando infine che u è definita a meno di un insieme di misura nulla, (4.4) vale per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$. Così abbiamo provato (i).

Proviamo ora (ii), ovvero l'immersione continua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per ogni $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ fissiamo un cubo $Q_1 \subset \mathbb{R}^N$ di lato 1 t.c. $x \in Q_1$. Come sopra, e ancora per (1.2), si ha

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |\bar{u}(Q_1)| + C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u\|_{L^1(Q_1)} + C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(Q_1)} + C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C (\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}), \end{aligned}$$

con $C > 0$ indipendente da u , da cui

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C (\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}).$$

Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, concludiamo usando il Teorema 3.2. \square

Osservazione 4.7. In effetti la dimostrazione del Teorema 4.6 indica che $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Questa inclusione vale a meno della scelta di una *rappresentante* di $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (a rigore definita come una classe di equivalenza tra funzioni).

Sia Ω un dominio regolare con frontiera limitata. I risultati precedenti valgono anche per lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$, come vedremo usando i teoremi di estensione della Sezione 3. Enunciamo questa volta i risultati sotto forma di *teoremi di immersione*:

Teorema 4.8. *Siano Ω un dominio regolare t.c. Γ è limitata, $p > 1$. Allora:*

- (i) se $p < N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, p^*]$;
- (ii) se $p = N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, \infty)$;
- (iii) se $p > N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ ed esiste $\alpha \in (0, 1)$ t.c. $W^{1,p}(\Omega) \subset C^\alpha(\bar{\Omega})$.

Dimostrazione. Proviamo (i). Per il Teorema 3.10 esiste un operatore di estensione $E \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$. Dunque, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ poniamo $\tilde{u} = E(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, così che esiste $C > 0$ indipendente da u t.c.

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Per il Teorema 4.2 abbiamo $\tilde{u} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ con

$$\|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Fissiamo ora $q \in [p, p^*]$, allora esiste $\tau \in [0, 1]$ t.c.

$$\frac{1}{q} = \frac{\tau}{p} + \frac{1-\tau}{p^*}.$$

Per la diseguaglianza di interpolazione (1.5) si ha $\tilde{u} \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\tau \|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{1-\tau}.$$

Concatenando tutte queste relazioni abbiamo $u \in L^q(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\tau \|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{1-\tau} \\ &\leq C \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

con $C > 0$ indipendente da u .

Similmente si provano (ii), (iii). In particolare, in (iii) ricordiamo che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha $\tilde{u} \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, da cui ovviamente $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$. \square

Consideriamo ora il caso in cui Ω (e non solo la sua frontiera) è *limitato*. Sotto tale ipotesi, le immersioni del Teorema 4.8 diventano compatte (per una dimostrazione alternativa ved. [3]):

Teorema 4.9. (Rellich-Kondrachov) *Siano Ω un dominio regolare limitato, $p > 1$. Allora:*

- (i) se $p < N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [1, p^*]$;
- (ii) se $p = N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [1, \infty)$;
- (iii) se $p > N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Proviamo (i). Supponiamo dapprima $q \in [p, p^*]$, e determiniamo $\tau \in (0, 1]$ t.c.

$$\frac{1}{q} = \frac{\tau}{p} + \frac{1-\tau}{p^*}.$$

Poniamo inoltre

$$B = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 1\}.$$

Si ha in particolare che Γ è limitata, quindi per il Teorema 3.10 esiste un operatore di estensione $E \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$. Per ogni $h \in \mathbb{R}^N$ spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ definiamo un operatore di traslazione $T_h \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ come nella Sezione 1, e proviamo che per ogni $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$(4.5) \quad \|T_h(v) - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |h| \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Supponiamo $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, allora si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v(x+h) - v(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_0^1 (\nabla v(x+th) \cdot h) dt \right|^p dx \\ &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |\nabla v(x+th)|^p dt dx \\ &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx, \end{aligned}$$

da cui (4.5). Usando il Teorema 3.12, estendiamo facilmente (4.5) a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

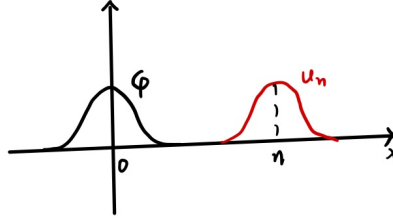


FIGURA 13.

Fissiamo ora $u \in B$ e poniamo $\tilde{u} = E(u)$. Applicando (1.5), (4.5) con $v = \tilde{u}$, il Teorema 4.2, e la continuità di E , otteniamo

$$\begin{aligned} \|T_h(\tilde{u}) - \tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \|T_h(\tilde{u}) - \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\tau \|T_h(\tilde{u}) - \tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{1-\tau} \\ &\leq |h|^\tau \|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} (2\|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)})^{1-\tau} \\ &\leq C|h|^\tau \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C|h|^\tau \end{aligned}$$

Poiché $\tau > 0$, abbiamo uniformemente per ogni $u \in B$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T_h(E(u)) - E(u)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Per il Teorema 1.15, l'insieme $E(B)$ è relativamente compatto in $L^q(\mathbb{R}^N)$, quindi B è relativamente compatto in $L^q(\Omega)$. Dunque $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Sia ora $q \in [1, p)$. Allora, poiché Ω è limitato, da (1.2) abbiamo per ogni $v \in L^p(\Omega)$

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{p-q}{pq}} \|v\|_{L^p(\Omega)},$$

ovvero $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Per composizione si ha $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, il che prova (i)

Le dimostrazioni di (ii), (iii) sono analoghe. \square

Il Teorema 4.9 (i) vale anche se Ω è illimitato ma $|\Omega| < \infty$. Notiamo inoltre che in (i) occorre richiedere $q < p^*$, per avere $\tau > 0$. Questa limitazione non è tecnica, infatti se Ω è illimitato, o se $q = p^*$, allora l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ non è compatta, come provano i seguenti esempi:

Esempio 4.10. Fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^N$ (fig. 13)

$$u_n(x) = \varphi(x_1 + n, x_2, \dots, x_N).$$

La successione (u_n) dimora in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ed è limitata in quanto $\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande si ha $u_n(x) = 0$. Fissiamo $q \geq 1$, allora (u_n) non ha sotto-successioni convergenti in $L^q(\mathbb{R}^N)$. Infatti, se $u_n \rightarrow u$ in $L^q(\mathbb{R}^N)$, si ha in particolare $u_n(x) \rightarrow u(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} > 0,$$

assurdo.

Esempio 4.11. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ una palla aperta, $p \in (1, N)$. Proviamo che l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ non è compatta, per assurdo. Sia $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ (estesa con il valore 0 in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$) e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$ poniamo

$$u_n(x) = n^{\frac{N-p}{p}} \varphi(nx).$$

Proviamo che (u_n) è una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\Omega_n = \{nx : x \in \Omega\},$$

così che $\Omega \subset \Omega_n$, e con il cambiamento di variabili $y = nx$ calcoliamo

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p &= n^{N-p} \int_{\Omega} |\varphi(nx)|^p dx \\ &= n^{-p} \int_{\Omega_n} |\varphi(y)|^p dy = n^{-p} \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Dunque $u_n \rightarrow 0$ in $L^p(\Omega)$. Similmente

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p &= n^N \int_{\Omega} |\nabla \varphi(nx)|^p dx \\ &= \int_{\Omega_n} |\nabla \varphi(y)|^p dy = \|\nabla \varphi\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Dunque (u_n) è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Per immersione compatta, passando a una sotto-successione abbiamo $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$. Poiché Ω è limitato, $u_n \rightarrow u$ anche in $L^p(\Omega)$, da cui $u = 0$. D'altra parte, come sopra si ottiene

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} > 0,$$

da cui passando al limite $u \neq 0$, assurdo.

Per gli spazi di Sobolev di ordine superiore valgono analoghi risultati di immersione, che riassumiamo nei seguenti enunciati (per le dimostrazioni ved. [2, Corollary 9.13]):

Teorema 4.12. *Siano $k \geq 2$ un numero naturale, $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regolare t.c. Γ è limitata. Allora:*

- (i) se $kp < N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in \left[p, \frac{Np}{N-kp} \right]$;
- (ii) se $kp = N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, \infty)$;
- (iii) se $kp > N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, inoltre, per ogni $h \in \mathbb{N}$ t.c. $h < k - N/p$ si ha $W^{k,p}(\Omega) \subset C^h(\overline{\Omega})$.

Dal Teorema 4.12 (iii) vediamo che, se una funzione ammette derivate deboli di ordine abbastanza grande, alcune di esse diventano di fatto derivate classiche. Per esempio, se $u \in W^{k,2}(\mathbb{R}^N)$ con $k > 1 + \frac{N}{2}$, allora si ha in particolare $2 > \frac{N}{k}$ e si può porre $h = 1$ in (iii), ottenendo $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$: così l'esistenza delle derivate seconde deboli implica quella delle derivate prime classiche. Questa relazione è alla base della *teoria della regolarità* per le equazioni alle derivate parziali lineari (che svilupperemo in [7, 8]).

In particolare:

Corollario 4.13. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regolare t.c. Γ è limitata, $p > 1$, u una funzione misurabile t.c. $u \in W^{k,p}(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

La generalizzazione del Teorema 4.9 si ottiene combinando il Teorema 4.12 con i risultati precedenti:

Teorema 4.14. *Siano $k \geq 2$ un numero naturale, $p > 1$, Ω un dominio regolare limitato. Allora*

- (i) se $kp < N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in \left[1, \frac{Np}{N-kp} \right]$;
- (ii) se $kp = N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [1, \infty)$;
- (iii) se $kp > N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Esercizio 4.15. Dimostrare il Lemma 4.1.

Esercizio 4.16. Completare la dimostrazione del Teorema 4.8.

Esercizio 4.17. Siano Ω un dominio regolare limitato, $p \in (1, N)$, $q \in [1, p^*]$. Dimostrare che

$$\|u\| = \|u\|_q + \|\nabla u\|_p$$

è una norma su $W^{1,p}(\Omega)$ equivalente a quella usuale.

Esercizio 4.18. Dimostrare che, per ogni $p \in (1, N)$ e $q \in [p, p^*]$, l'immersione $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}_+^N)$ è continua.

Esercizio 4.19. Quali, tra i risultati di questa sezione, valgono per il dominio $\Omega = \mathbb{R}_+^N$?

5. GLI SPAZI $W_0^{1,p}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$

In quest'ultima sezione esaminiamo alcuni speciali spazi di Sobolev che saranno impiegati nello studio delle equazioni alle derivate parziali (ved. [7, 8]).

Sappiamo dal Teorema 3.2 che $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è un sottospazio *denso* di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Invece, per un generico dominio Ω si ha che $C_c^\infty(\Omega)$ non è denso in $W^{1,p}(\Omega)$ (Osservazione 3.13). Introduciamo pertanto un nuovo spazio, definito come la *chiusura* di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$:

Definizione 5.1. Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per cui esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\Omega)$ t.c. $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Nella Definizione 5.1 si può sostituire $C_c^\infty(\Omega)$ con $C_c^1(\Omega)$. Osserviamo che $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Invece, per un generico dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega)$, pertanto uno spazio di Banach separabile e uniformemente convesso (in particolare riflessivo), che eredita le proprietà di immersione dei Teoremi 4.8, 4.9⁹.

Per quanto riguarda l'operatore di estensione $E \in \mathcal{L}(W_0^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$, esso esiste indipendentemente dalla regolarità di Γ ed è definito semplicemente ponendo

$$(5.1) \quad E(u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^c \end{cases}$$

(osserviamo che in questo caso E è un'isometria lineare). Presentiamo alcune condizioni per individuare le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$. Cominciamo con una condizione sufficiente:

Proposizione 5.2. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ t.c. $\text{supp}(u) \Subset \Omega$. Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Esistono $\omega \Subset \Omega$ t.c. $\text{supp}(u) \subset \omega$ e una funzione $\xi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ t.c.

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \text{supp}(u) \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \omega. \end{cases}$$

Per il Teorema 3.4 esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$, $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\omega, \mathbb{R}^N)$. Poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{u}_n = \xi u_n,$$

così che $\tilde{u}_n \in C_c^1(\Omega)$ e si ha $\tilde{u}_n \rightarrow u$, $\nabla \tilde{u}_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\Omega)$, ovvero $\tilde{u}_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dunque $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. \square

Tuttavia, $W_0^{1,p}(\Omega)$ contiene anche funzioni il cui supporto 'tocca' Γ . Per caratterizzare tali funzioni, almeno in un caso particolare, occorre premettere il seguente lemma tecnico:

Lemma 5.3. Sia $v \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q}_+)$. Allora, per ogni $(x', 0) \in Q_0$ si ha $v(x', 0) = 0$.

⁹Alcuni autori preferiscono definire $W^{1,p}(\Omega)$ come il *completamento* secondo Cauchy di $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma indotta da $W^{1,p}(\Omega)$, ved. [1]

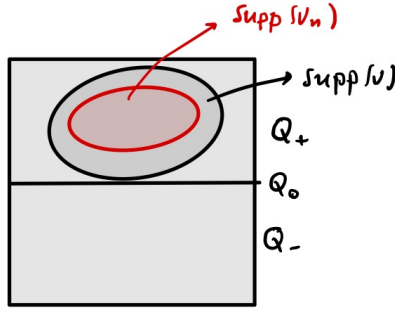


FIGURA 14.

Dimostrazione. Per la Definizione 5.1, esiste una successione (v_n) in $C_c^1(Q_+)$ t.c. $v_n \rightarrow v$ in $W^{1,p}(Q_+)$ (fig. 14). Per ogni $(x', x_N) \in Q_+$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|v_n(x', x_N)| \leq \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial v_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt.$$

Poniamo dunque

$$F_n(x', x_N) = \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial v_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt,$$

così che $F_n \in C^1(Q_+)$ e uniformemente su $\overline{Q_+}$

$$\lim_n F_n(x', x_N) = \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', t) \right| dt.$$

La funzione $F_n(x', \cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è non-decrescente, da cui per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon F_n(x', x_N) dx_N \leq F_n(x', \varepsilon).$$

Per le relazioni precedenti, abbiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{|x'| < 1\}} \int_0^\varepsilon |v_n(x', x_N)| dx_N dx' &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{|x'| < 1\}} \int_0^\varepsilon F_n(x', x_N) dx_N dx' \\ &\leq \int_{\{|x'| < 1\}} F_n(x', \varepsilon) dx'. \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\{|x'| < 1\}} \int_0^\varepsilon |v(x', x_N)| dx_N dx' \leq \int_{\{|x'| < 1\}} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right| dx_N dx'.$$

Passando ancora al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\int_{\{|x'| < 1\}} |v(x', 0)| dx' \leq 0,$$

da cui $v(x', 0) = 0$ per ogni $(x', 0) \in Q_0$. □

La seguente caratterizzazione vale per un dominio regolare e per funzioni *continue*:

Proposizione 5.4. *Siano Ω un dominio regolare, $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$;

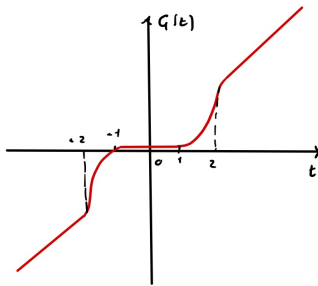


FIGURA 15.

(ii) $u(x) = 0$ per ogni $x \in \Gamma$.

Dimostrazione. Proviamo che (i) implica (ii). Consideriamo una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Poiché Ω è regolare, come nella dimostrazione del Teorema 3.10 introduciamo un ricoprimento di Γ costituito da una successione $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di aperti limitati¹⁰ t.c.

$$\Gamma \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un C^1 -diffeomorfismo $H_k : \bar{Q} \rightarrow \bar{U}_k$ t.c.

$$H_k(Q_+) = U_k \cap \Omega, \quad H_k(Q_0) = U_k \cap \Gamma.$$

Inoltre, per [2, Lemma 9.3] esiste una partizione dell'unità $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ subordinata a (U_k) e *localmente finita*, ovvero per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\theta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}(\theta_k) \subset U_k$, $0 \leq \theta_k \leq 1$ in \mathbb{R}^N , e per ogni $x \in \Gamma$ esiste $K \subset \mathbb{N}$ finito t.c. $\theta_k(x) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus K$ e

$$\sum_{k \in K} \theta_k(x) = 1.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $y \in Q_+$ poniamo

$$v_k(y) = \theta_k(H_k(y))u(H_k(y)).$$

Per i Lemmi 3.5, 3.7 abbiamo $v_k \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap C(\bar{Q}_+)$. Per il Lemma 5.3 abbiamo $v_k = 0$ su Q_0 . Dunque, fissato $x \in \Gamma$, determiniamo $K \subset \mathbb{N}$ finito come sopra, e per ogni $k \in K$ troviamo l'unico $y_k \in Q_0$ t.c. $H_k(y_k) = x$. Dunque

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k \in K} \theta_k(x)u(x) \\ &= \sum_{k \in K} v_k(y_k) = 0. \end{aligned}$$

Proviamo ora che (ii) implica (i). Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ t.c. $u = 0$ su Γ . Distinguiamo due casi:

(a) Supponiamo dapprima che $\text{supp}(u) \subseteq \bar{\Omega}$ sia limitato. Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ (fig. 15) t.c. per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \leq 1 \\ t & \text{se } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Poniamo per ogni $x \in \Omega$

$$u_n(x) = \frac{1}{n}G(nu(x)),$$

¹⁰In questo caso Γ non è limitata, quindi può essere necessario ricorrere a un ricoprimento infinito.

così che $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ (Lemma 3.6) e per ogni $x \in \Omega$

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |u(x)| \leq \frac{1}{n} \\ u(x) & \text{se } |u(x)| \geq \frac{2}{n}. \end{cases}$$

Si ha allora $\text{supp}(u_n) \Subset \Omega$, da cui per il Lemma 5.2 segue $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Inoltre, $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, da cui $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(b) Se invece $\text{supp}(u)$ è illimitato, allora introduciamo una funzione cut-off $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c.

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $u_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ponendo per ogni $x \in \bar{\Omega}$

$$u_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right)u(x),$$

così che $u_n = 0$ su Γ e $\text{supp}(u_n) \subset \bar{\Omega}$ è compatto. Per il caso precedente abbiamo $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, dunque $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

In ogni caso abbiamo (i). □

Esempio 5.5. Sia ancora

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

e poniamo per ogni $(x, y) \in \Omega$

$$u(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$

Per la Proposizione 5.4, si ha $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p > 1$.

Osservazione 5.6. In generale, una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ non è continua su $\bar{\Omega}$, quindi non ha senso definire la restrizione $u|_\Gamma$. Una risposta parziale a questo problema è fornita dalla *teoria delle tracce* (ved. [2, p. 315]), che permette di 'proiettare' una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ su una funzione appartenente a $L^p(\Gamma)$ (dove Γ è dotato della misura di Hasudorff $(N-1)$ -dimensionale). Nel contesto di tale teoria, $W_0^{1,p}(\Omega)$ viene identificato con il sottospazio di $W^{1,p}(\Omega)$ formato dalle funzioni 'di traccia nulla'.

La proprietà più importante di $W_0^{1,p}(\Omega)$ è la seguente:

Teorema 5.7. (Diseguaglianza di Poincaré) *Sia Ω limitato. Allora esiste $C > 0$ t.c. per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Supponiamo $p < N$. Definiamo E come in (5.1). Per il Teorema 4.2, esiste $C > 0$ t.c. per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} &= \|E(u)\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C \|\nabla E(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Inoltre, per la diseguaglianza di Hölder (1.2)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{N}} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)},$$

da cui la tesi. I casi $p \geq N$ si trattano similmente. □

La costante ottimale per la disuguaglianza di Poincaré è collegata al problema degli *autovalori* di un operatore differenziale, che approfondiremo in [7]. In virtù del Teorema 5.7, se Ω è limitato, su $W_0^{1,p}(\Omega)$ possiamo definire una norma equivalente ponendo

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

rispetto alla quale $W_0^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile e uniformemente convesso (quindi riflessivo). Il *duale* di tale spazio è denotato $W^{-1,p'}(\Omega)$, e descritto dal seguente risultato di rappresentazione:

Proposizione 5.8. *Sia $\psi \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Allora esistono $f_0, \dots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ t.c.*

(i) *per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\psi(u) = \int_{\Omega} f_0 u \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx;$$

(ii) *Esiste $C > 0$ indipendente da ψ t.c.*

$$\|\psi\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)};$$

(iii) *se Ω è limitato, si può scegliere $f_0 = 0$;*

Dimostrazione. Proviamo (i). Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ poniamo

$$T(u) = (u, \nabla u),$$

così che $T \in \mathcal{L}(W_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{N+1})$ è un operatore iniettivo. Poniamo anche $X = T(W_0^{1,p}(\Omega))$, e definiamo $S = T^{-1} \in \mathcal{L}(X, W_0^{1,p}(\Omega))$ (Teorema della mappa aperta, [2, Theorem 2.6]). Consideriamo il funzionale lineare

$$\psi \circ S \in X^*.$$

Per il Teorema di Hahn-Banach (ved. [2, Corollary 1.2]), esso si estende a un funzionale $\tilde{\psi} \in (L^p(\Omega)^{N+1})^*$. Per il Teorema 1.4 esistono $f_0, \dots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ t.c. per ogni $(v_0, \dots, v_N) \in L^p(\Omega)^{N+1}$

$$\tilde{\psi}(v_0, \dots, v_N) = \sum_{i=0}^N \int_{\Omega} f_i v_i \, dx.$$

In particolare, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\psi(u) = \tilde{\psi}(u, \nabla u) = \int_{\Omega} f_0 u \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx.$$

Proviamo (ii). Dalla costruzione sopra e dalla disuguaglianza di Hölder (1.2) si ha per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} |\psi(u)| &\leq \|f_0\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Infine, proviamo (iii). Se Ω è limitato, per il Teorema 5.7 la costruzione precedente si può semplificare ponendo per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $T(u) = \nabla u$, quindi si ottiene $f_0 = 0$. \square

È importante osservare che la rappresentazione della Proposizione 5.8 non è unica, in generale. Concludiamo questa sezione soffermandoci sul caso $p = 2$. Si adotta in questo caso la notazione

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad (k \in \mathbb{N}), \quad H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega), \quad H^{-1}(\Omega) = W^{-1,2}(\Omega).$$

Su $H^1(\Omega)$ si definisce un prodotto scalare ponendo

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx,$$

mentre su $H_0^1(\Omega)$ si pone (grazie al Teorema 5.7)

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Proposizione 5.9. *Gli spazi $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ sono spazi di Hilbert separabili.*

Dimostrazione. I prodotti scalari definiti sopra inducono le norme di $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ rispettivamente. La completezza e la separabilità seguono dalla Proposizione 2.8. \square

Chiaramente, tutti i risultati visti finora valgono anche per il caso $p = 2$, al quale in più si applica la teoria sviluppata in [6].

Osservazione 5.10. Sia $\psi \in H^{-1}(\Omega)$. Per la Proposizione 5.8 esistono $f_0, \dots, f_N \in L^2(\Omega)$ t.c. per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\psi(u) = \int_{\Omega} f_0 u \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx.$$

D'altra parte, per il Teorema di rappresentazione di Riesz sugli spazi di Hilbert (ved. [6]) esiste $v \in H_0^1(\Omega)$ t.c.

$$\psi(u) = \int_{\Omega} (vu + \nabla v \cdot \nabla u) \, dx.$$

Tuttavia, non si ha in generale $f_0 = v$, $f_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, N$) perché la prima rappresentazione non è unica. Per esempio, se Ω è limitato e $\psi \neq 0$, per la Proposizione 5.8 (iii) si può porre $f_0 = 0$ ma esiste $i \in \{1, \dots, N\}$ t.c. $f_i \neq 0$.

Esercizio 5.11. Dimostrare che l'operatore E introdotto in (5.1) è ben definito.

Esercizio 5.12. Dimostrare il Teorema 5.7 nei casi $p \geq N$.

Esercizio 5.13. Dimostrare che $(\|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$ è una norma equivalente su $H^2(\Omega)$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] R.A. ADAMS, J.J.F. FOURNIER, Sobolev spaces, Academic Press (2003)
- [2] H. BREZIS, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer (2011)
- [3] W. CHEN, C. LI, Methods on nonlinear elliptic equations, American Institute of Mathematical Sciences (2010)
- [4] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of second order, Springer (1998)
- [5] L.C. EVANS, Partial differential equations, American Mathematical Society (1998)
- [6] A. IANNIZZOTTO, Spazi di Hilbert e operatori lineari (2021)
- [7] A. IANNIZZOTTO, Equazioni alle derivate parziali lineari/1: Problemi stazionari (2021)
- [8] A. IANNIZZOTTO, Equazioni alle derivate parziali lineari/2: Problemi evolutivi (2021)
- [9] G. LEONI, A first course in Sobolev spaces, American Mathematical Society (2009)
- [10] W. RUDIN, Real and complex analysis, McGraw Hill (1987)

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY
Email address: `antonio.iannizzotto@unica.it`