Università degli Studi di Cagliari
CdL in Economia e Gestione Aziendale - Corso 3
Microeconomia
Prof.ssa Silvia Balia

Tutor: dott. Diego Dessì
diego.dessi@unica.it

ESERCITAZIONE 6

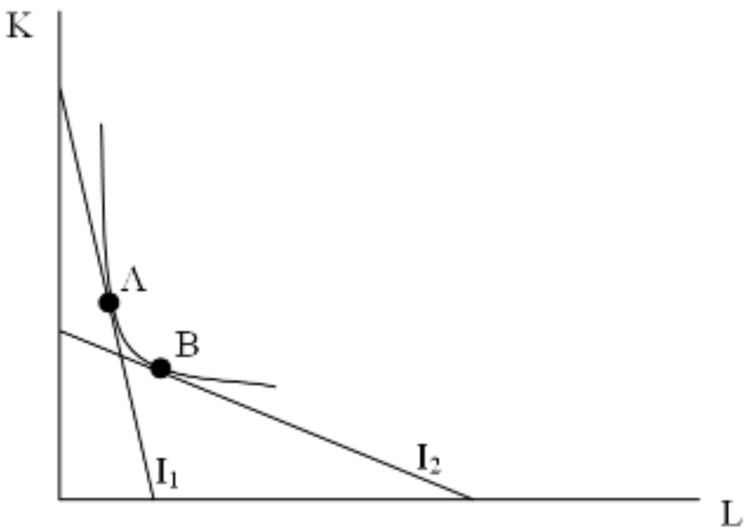
(Modulo B)

11 Maggio 2023

La produzione e i costi

1) TEORIA

DOMANDA 1: Supponiamo che in condizioni iniziali questa impresa si trovi nel punto A e che successivamente si sposti verso il punto B. Quale delle seguenti affermazioni è vera?



1. Il lavoro è diventato più costoso
2. Il capitale è diventato più costoso
3. L'output è aumentato
4. L'output è diminuito

DOMANDA 2: Data la seguente funzione di produzione:

$$Y = log(Z_1) + Z_2$$

Gli isoquanti avranno forma:

1. Concava
2. Lineare
3. Convessa
4. Ad angolo

2) ESERCIZI

ESERCIZIO 1: Data la funzione di produzione:

$$Y = 5LK:$$

a. Con $P_K = 1$ e $P_L = 2$ e un budget pari a 100, determinare la combinazione ottima di fattori che rende massima la produzione.
b. Scrivere e rappresentare graficamente la funzione di isocosto.
c. Dati gli stessi prezzi dei fattori, trovare la combinazione ottima per un livello di produzione pari a 6250.

ESERCIZIO 2: Data la funzione di produzione:

$$Q = 2L + 8K$$

a) Con $r = 4$ e $w = 2$, determinare la combinazione ottima di capitale e lavoro se il budget a disposizione dell'impresa è pari a 80.

b) Scrivere la funzione di isocosto

ESERCIZIO 3: Data la funzione di produzione:

$$Q = \sqrt{KL}$$

a) Con $P_L = 2$ e $P_K = 8$, calcolare le funzioni di costo di breve periodo per una quantità di capitale pari a 400 ($K_0 = 400$).

b) Derivare le funzioni di costo medio (variabile, fisso e totale) e di costo marginale.

ESERCIZIO 4: Calcola i rendimenti di scala delle seguenti funzioni di produzione:

a) $Q = 4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}}$

b) $Q = \frac{1}{3}L^2K$

c) $Q = 5L + \frac{1}{2}K$

d) $\mathrm{Q} = L^{\alpha}L^{\beta}$

Soluzioni

TEORIA:

Domanda 1: Risposta 2

Domanda 2: Risposta 3

ESERCIZI:

Esercizio 1:

- PUNTO A:

  Procedimento: ho bisogno di:

  1) *Funzione di Isocosto:* disegna tutte le combinazioni di fattori che hanno lo stesso costo. Introduce il vincolo nel problema di massimizzazione:

  $$TC = P_L L + P_K K$$

  2) *Condizione di tangenza:* la condizione in cui la quantità ottimale di fattori massimizza la produzione. E' data dall'uguaglianza tra la pendenza dell'isocosto (1) e il MRTS (2)

     1. $\rho = -\frac{P_L}{P_K} = -\frac{2}{1} = -2$
     2. $\text{MRTS} = \frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = -\frac{5K}{5L} = -\frac{K}{L}$. Mi dice la proporzione con cui i fattori L e K possono essere scambiati mantenendo costante il livello di produzione.

  Metto a sistema le precedenti funzioni, e trovo i valori di L* e K* che soddisfano entrambe le precedenti identità.

  Svolgimento:

$$\begin{cases} TC = P_L L + P_K K \\ \rho = MRTS \end{cases} = \begin{cases} 100 = 2L + K \\ -2 = -\frac{\text{K}}{\text{L}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100 = 2L + K \\ \frac{\text{K}}{\text{L}} = 2 \end{cases} = \begin{cases} 100 = 2L + K \\ K = 2L \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100 = 2L + 2L \\ K = 2L \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4L = 100 \\ K = 2L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L^* = 25 \\ K = 2L \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^* = 25 \\ K^* = 2(25) = 50 \end{cases}$$

Soluzione: L*=25, K*=50

- PUNTO B:

Funzione isocosto:

$$TC = P_L L + P_K K \rightarrow 100 = 2L + K$$

Rappresentazione grafica:

- Trovo le intersezioni con gli assi:

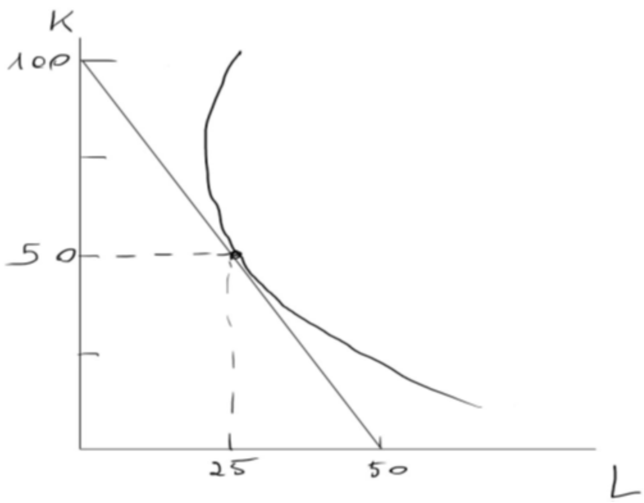
Asse X:

$$\frac{TC}{P_L} = 100/2 = 50$$

Asse Y:

$$\frac{TC}{P_K} = 100/1 = 100$$

- Grafico



- PUNTO C: minimizzazione dei costi.

  Procedimento: trovo i fattori ottimali K*, L* che mi permettono di ottenere un determinato risultato produttivo (Q=6250) al minimo costo. Procedimento simile al punto A. La condizione di equilibrio non cambia, sostituisco il vincolo di costo con la funzione obiettivo.

$$\begin{cases} Y = 5LK \\ -\frac{P_L}{P_K} = -MRTS \end{cases} = \begin{cases} 6250 = 5LK \\ -2 = -\frac{5K}{5L} \end{cases} = \begin{cases} 6250 = 5LK \\ 2 = \frac{K}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6250 = 5LK \\ K = 2L \end{cases} = \begin{cases} 6250 = 5L(2L) \\ K = 2L \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6250 = 10L^2 \\ K = 2L \end{cases} = \begin{cases} 625 = L^2 \\ K = 2L \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{L^2} = \sqrt{625} \\ K = 2L \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^* = 25 \\ K^* = 25(2) = 50 \end{cases}$$

Esercizio 2

- PUNTO A:
  Procedimento: lo imposto come PUNTO A di Esercizio 1:

  Funzione di isocosto (SOLUZIONE PUNTO B):

$$TC = wL + rK$$

$$80 = 2L + 4K$$

  Pendenza isocosto:

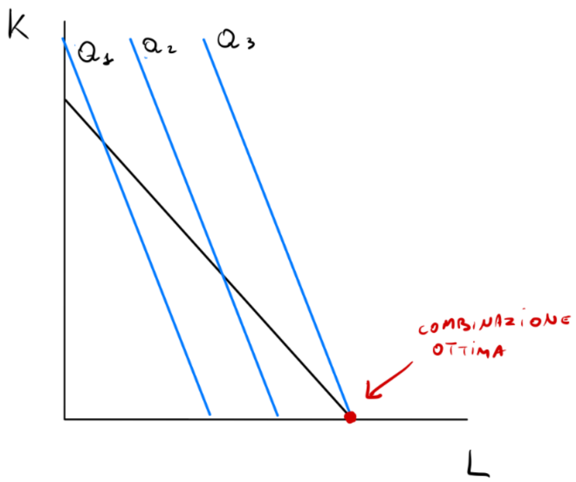
$$\rho = -\frac{w}{r} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

  MRST:

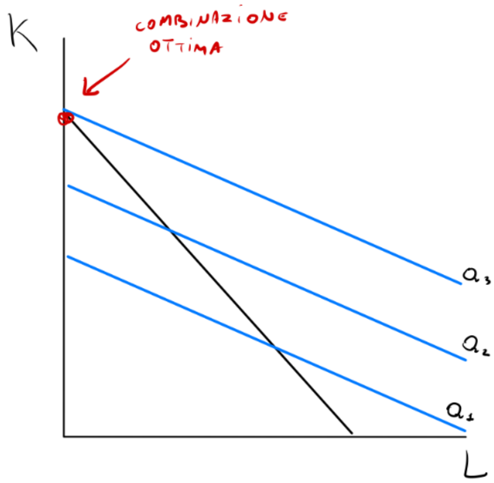
$$\text{MRST} = -\frac{\partial Q/\, \partial L}{\partial Q/\, \partial K} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

  ATTENZIONE! Fattori perfetti sostituti. La soluzione è una soluzione ad angolo in quanto $-\frac{1}{4} \neq -\frac{1}{2}$. La combinazione ottima di fattori prevede il solo utilizzo del fattore K. Vediamo il perché:

Se $|MRST| > |\rho|$

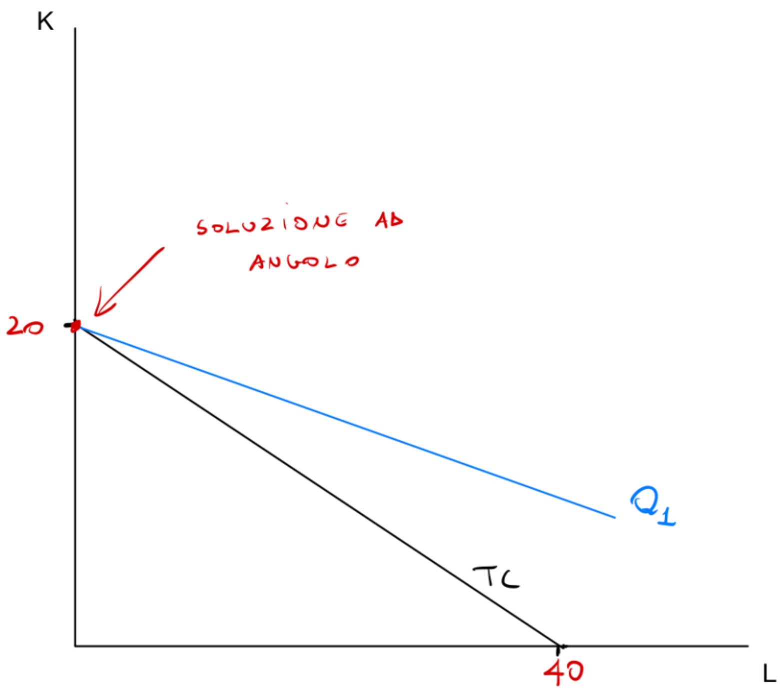


Se $|MRST| < |\rho|$



In questo caso $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, e quindi $|MRST| < |\rho|$. Per trovare la quantità ottimale calcolo le intercette come in punto B Esercizio 1:

- Intercetta asse x = 40
- Intercetta asse y = 20



Soluzione: L*=0, K*=20

Esercizio 3

- PUNTO A

Procedimento: Nel breve periodo si assume che vi siamo costi fissi. Uno tra i costi richiesti dall'esercizio è il costo marginale (MC) ossia il costo di produrre un'unità additiva di prodotto $\left(\frac{dTC}{dQ}\right)$. Questo rende necessario esprimere TC in funzione di Q. In modo tale che $TC = f(Q)$. Inizio così a impostare il problema.

Calcolo la funzione di produzione di breve periodo

$$Q = \sqrt{400L} = 20\sqrt{L}$$

Trovo il modo di risolvere per L

$$Q = 20\sqrt{L} \rightarrow \frac{Q}{20} = \sqrt{L}$$

Mi sbarazzo della radice

$$\left(\frac{Q}{20}\right)^2 = \left(\sqrt{L}\right)^2$$

$$\frac{Q^2}{400} = L$$

E Sostituisco L nella funzione TC:

$$TC = P_L L + P_K K = 2L + 8(400) \rightarrow TC = 2\frac{Q^2}{400} + 3200 = \frac{Q^2}{200} + 3200$$

Ora posso risolvere tutti i punti del problema. In quanto i costi di breve periodo sono:

1) Costo Totale (TC)

$$STC = 2\frac{Q^2}{400} + 3200 = \frac{Q^2}{200} + 3200$$

Dato che:

$$TC = VC + FC:$$

Allora:

2) Costo Variabile:

$$VC = \frac{Q^2}{200}$$

3) Costo Fisso: $FC = 3200$

- PUNTO B: derivo i costi variabili

4) ATC: costo totale unitario:

$$ATC = \frac{TC}{Q} = \frac{Q}{200} + \frac{3200}{Q}$$

5) AVC: costo variabile per unità di output

$$AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{Q}{200}$$

6) AFC: costo fisso per unità di output

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{3200}{Q}$$

E il costo marginale:

$$MC = \frac{\mathrm{d}TC}{\mathrm{d}Q} = \frac{Q}{100}$$

Esercizio 4

Rendimenti di scala: descrivono il comportamento dell'output all'aumentare della quantità utilizzata di entrambi i fattori produttivi.

Procedimento: aumento tutti i fattori produttivi moltiplicandoli per una costante $\tau > 1$. Se aumentando tutti gli input con il fattore moltiplicativo τ la produzione aumenta in maniera più che proporzionale, avrò *rendimenti di scala crescenti*. Qualora l'aumento della produzione sia meno che proporzionale, avremo dei *rendimenti di scala decrescenti.* Se l'aumentare di tutti gli input dovuto al fattore moltiplicativo τ genera un aumento proporzionale della produzione, avrò dei *rendimenti di scala costanti*.

Compariamo quindi due funzioni, la prima è la funzione di produzione moltiplicata per intera per τ. La seconda è una funzione di produzione in cui moltiplichiamo tutti i fattori produttivi per la stessa costante τ :

- Se $\tau Q(L,K) = Q(\tau L, \tau K)$ → *rendimenti di scala costanti*
- Se $\tau Q(L,K) > Q(\tau L, \tau K)$ → *rendimenti di scala crescenti*
- Se $\tau Q(L,K) < Q(\tau L, \tau K)$ → *rendimenti di scala crescenti*

1) $Q = 4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}}$:

$$\tau Q \lesseqgtr 4(\tau L)^{\frac{1}{3}}(\tau K)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau Q \lesseqgtr 4\tau^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau Q > \tau^{\frac{5}{6}}L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau > \tau^{\frac{5}{6}}$$

Per questa tipologia di funzioni posso determinare i ritorni di scala semplicemente sommando gli esponenti. Se la somma è < 1 avremo dei rendimenti decrescenti (vedi esempio n°4 per spiegazione).

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} < 1$$

Rendimenti decrescenti

2) $Q = \frac{1}{3}L^2K$

$$\frac{1}{3}(\tau L)^2(\tau K) \lesseqgtr \tau Q$$

$$\frac{1}{3}\tau^2 L^2(\tau K) \lesseqgtr \tau Q$$

$$\frac{1}{3}\tau^3 L^2 K > \tau Q$$

$$\tau^3 > \tau$$

Rendimenti crescenti

3) $Q = 5L + \frac{1}{2}K$

$$5(\tau L) + \frac{1}{2}(\tau K) \lesseqgtr \tau Q$$

$$\tau\left(5L + \frac{1}{2}K\right) = \tau Q$$

$$\tau = \tau$$

Rendimenti costanti

4) $Q = L^{\alpha}K^{\beta}$

La soluzione dipende dai valori assunti da α e β. In una Cobb-Douglas Posso determinare i rendimenti semplicemente sommando gli esponenti.

- Se $\alpha + \beta = 1$. I rendimenti sono costanti.
- Se $\alpha + \beta > 1$. I rendimenti sono crescenti.
- *Se* $\alpha + \beta < 1$. I rendimenti sono costanti