Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

L'integrale di Lebesgue

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23

 VE 12 MAG 2023

PREMESSE

1822 FOURIER: « L'AREA DELLA CURVA DA $x=0$ A $x=\pi$ DARÀ IL VALORE ESATTO DEL COEFFICIENTE »

IMPRESSIONI DELLA CLASSE: « COINCIDE » CON L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE. COS'È IL VALORE ESATTO DEL COEFFICIENTE? « L'AREA DELLA CURVA » ?? SARÀ LA LUNGHEZZA ?!

1878 DINI: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f_1(\beta) - f_1(\alpha)$ DOVE $\frac{df_1(x)}{dx} = f(x)$. IMPRESSIONI: « LO ABBIAMO VISTO NEL TEOREMA FONDAMENTALE ».

« LO PRENDEVANO COME UNA DEFINIZIONE »

1854 RIEMANN: PRESA $\mathcal{D} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$

CONSIDERO $S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f\big(x_{k-1} + \varepsilon_k (x_k - x_{k-1})\big)$

CON $\varepsilon_k \in (0,1)$ E GUARDO (SUL PIANO TEORICO) SE AMMETTE LIMITE FINITO ℓ PER $\delta \to 0$ ESSENDO $\delta = \max_k (x_k - x_{k-1})$ (NOTAZIONE ATTUALE) E INDIPENDENTEMENTE DAI VALORI DI ε_k. IN TAL CASO SI DEFINISCE $\int_a^b f(x)\,dx = \ell$.

1875 DARBOUX: $M = S(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k$

DOVE $M_k = \sup_{(x_{k-1}, x_k)} f(x)$ E $\delta_k = x_k - x_{k-1}$

ANALOGAMENTE $m = s(\mathcal{D}, f)$, E PRENDE IL

$\lim_{\delta \to 0} M = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = M_{ab}$ ED IL

$\lim_{\delta \to 0} m = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = m_{ab}$ E OSSERVA

CHE PER CERTE FUNZIONI $M_{ab} = m_{ab}$ E PER ALTRE $M_{ab} > m_{ab}$ (NON INTEGRABILI).

LEGAME FRA LA DEFINIZIONE DI RIEMANN E QUELLA PRECEDENTE (TEOREMA DI VALUTAZIONE): SE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN ED HA UNA PRIMITIVA $f_1 (= F)$ ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx = f_1(b) - f_1(a)$. NOTA 1: ESISTONO FUNZIONI INTEGRABILI CHE NON HANNO PRIMITIVE (7, 8 MARZO).

NOTA 2: ESISTONO FUNZIONI CHE HANNO PRIMITIVE MA NON SONO INTEGRABILI (VOLTERRA 1881)

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'INTEGRABILITÀ:

a) LA CONTINUITÀ SU $[a,b]$;

b) LA MONOTONIA SU $[a,b]$;

c) LA LIMITATEZZA E UN NUMERO FINITO DI PUNTI DI DISCONTINUITÀ;

d) L'ESISTENZA DEI LIMITI $f(x^\pm)$ PER OGNI x $x \in (a,b)$ E DI $f(a^+)$ E $f(b^-)$, SI INTENDE FINITI (DARBOUX PAG. 90)

VE 12 MAG 2023

L'INTEGRALE GENERALIZZATO (1)

SE $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ È INTEGRABILE SU OGNI INTERVALLO $[a+\alpha_1, b]$ CON $\alpha_1\in(0, b-a)$ E SE ESISTE IL LIMITE $\lim\limits_{\alpha_1\to 0^+}\int_{a+\alpha_1}^{b} f(x)\,dx$ SI DEFINISCE $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\alpha_1\to 0^+}\int_{a+\alpha_1}^{b} f(x)\,dx$.

SE IL LIMITE È FINITO, LA f SI DICE « INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO (O GENERALIZZATO) »

ESEMPI: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$ SE $\alpha\in[1,+\infty)$.

INVECE, PER $\alpha\in(0,1)$ SI TROVA $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^1$

$= \frac{1}{1-\alpha}$.

$$\int_0^1 \log x\,dx = \Big(\log x - 1\Big)x\Big]_0^1 = -1$$

LU 15 MAG 2023

L'INTEGRALE GENERALIZZATO (2)

SE $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ È INTEGRABILE SU OGNI INTERVALLO $[a,b]$ CON $b\in(a,+\infty)$ E SE ESISTE IL LIMITE $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ SI DEFINISCE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

SE IL LIMITE È FINITO, LA f SI DICE « INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO (O GENERALIZZATO) »

ESEMPIO: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$ SE $\alpha\in(-\infty, 1]$.

CASI PARTICOLARI: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = +\infty \quad (\alpha=1)$;

$\int_1^{+\infty} dx = +\infty \quad (\alpha=0)$.

ESEMPIO: $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = e^x\Big]_{-\infty}^0 = 1$.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = \operatorname{senc} x = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO SULL'INTERVALLO $[0,+\infty)$: LO SI VERIFICA USANDO LA COMPLETEZZA. SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE CHE $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

ESEMPIO: $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = +\infty$ (ESERCIZIO).

LU 15 MAG 2023

MISURA DI PEANO–JORDAN

SI VUOLE MISURARE L'ESTENSIONE DELLE FIGURE GEOMETRICHE: SEGMENTI SULLA RETTA, FIGURE PIANE, FIGURE SOLIDE. RESTANO ESCLUSE LE SUPERFICI NELLO SPAZIO COME LA SFERA. SI PUÒ FARE UNA TEORIA IN $\mathbb{R}^N$: SI PORTA IN GEOMETRIA ANALITICA L'IDEA DI ARCHIMEDE. AL POSTO DEI POLIGONI REGOLARI (GEOMETRIA SINTETICA) USIAMO I PLURINTERVALLI: UN INTERVALLO N-DIMENSIONALE È IL PRODOTTO CARTESIANO $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$ E LA SUA LUNGHEZZA $(N=1)$, AREA $(N=2)$, VOLUME $(N=3)$, DETTA MISURA, È $|I| = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$.

SI DEFINISCE PLURINTERVALLO $P = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$.

SENZA LEDERE LA GENERALITÀ SI PUÒ SUPPORRE CHE $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_j = \emptyset$ PER $i \neq j$ ESSENDO $\mathring{I}$ L'INTERNO (L'INSIEME DEI PUNTI INTERNI) DI I (L'INTERVALLO APERTO). SOTTO TALE IPOTESI SI DEFINISCE $|P| = \sum_{k=1}^{n} |I_k|$.

DEFINIZIONE: DATO UN SOTTOINSIEME $E \subset \mathbb{R}^N$ PONIAMO $\underline{m}(E) = \sup_{P \subset E} |P|$ SE $\mathring{E} \neq \emptyset$

ALTRIMENTI $\underline{m}(E) = 0$ (MISURA INTERNA).

LEMMA (SUPERADDITIVITÀ DELLA MISURA INTERNA): PRESI $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ DISGIUNTI, SI HA $\underline{m}(E_1 \cup E_2) \geq \underline{m}(E_1) + \underline{m}(E_2)$.

DIMOSTRAZIONE: VOGLIO ESPRIMERE IL PRIMO MEMBRO. PER LA DEFINIZIONE DI $\underline{m}(E_1) = \sup_{P \subset E_1} |P|$ SO CHE SE PRENDO $P_1 \subset E_1$ HO $|P_1| \leq \sup_{P \subset E_1} |P| = \underline{m}(E_1)$. MA SO ANCHE CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ IL NUMERO $\underline{m}(E_1) - \varepsilon$ NON È UN MAGGIORANTE DELL'INSIEME NUMERICO $\{|P| : P \subset E_1\}$ E PERCIÒ ESISTE (ALMENO) UN $P_1 \subset E_1$ TALE CHE $\underline{m}(E_1) - \varepsilon < |P_1|$. SIMILMENTE, ESISTE $P_2 \subset E_2$ TALE CHE $\underline{m}(E_2) - \varepsilon < |P_2|$.

SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO, E SICCOME $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ SI OTTIENE $\underline{m}(E_1) + \underline{m}(E_2) - 2\varepsilon < |P_1| + |P_2| = |P_1 \cup P_2|$ MA SICCOME $P_1 \cup P_2 \subset E_1 \cup E_2$ SI DEDUCE CHE $\underline{m}(E_1) + \underline{m}(E_2) - 2\varepsilon < |P_1 \cup P_2| \leq \underline{m}(E_1 \cup E_2)$ E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε. NOTA: QUESTO RAGIONAMENTO RICHIEDE CHE $\underline{m}(E_1), \underline{m}(E_2) < +\infty$.

SE, INVECE, $\underline{m}(E_1) = +\infty$ ALLORA PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE $P_1 \subset E_1$ CON $|P_1| > M$ MA $P_1 \subset E_1 \subset E_1 \cup E_2$ DUNQUE $\underline{m}(E_1 \cup E_2) > M$ E LA TESI SEGUE ANCORA.

 LU 15 MAG 2023

ESEMPIO: ESISTONO E_1, E_2 TALI CHE

$$\underline{m}(E_1 \cup E_2) > \underline{m}(E_1) + \underline{m}(E_2).$$

PRENDIAMO $E_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ E $E_2 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ (ESERCIZIO: PRENDETE $E_1 = \mathbb{Q}$, $E_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). CHIARAMENTE $|E_1 \cup E_2| = |[0,1]| = 1$. INOLTRE, SICCOME $\mathring{E}_1 = \mathring{E}_2 = \emptyset$, SI HA $\underline{m}(E_1) = \underline{m}(E_2) = 0$ QUINDI $\underline{m}(E_1 \cup E_2) >$

$$> \underline{m}(E_1) + \underline{m}(E_2).$$

PER QUESTO MOTIVO SI CONSIDERA UN SOTTOINSIEME PROPRIO DI $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, QUELLO DEGLI INSIEMI MISURABILI.

DEFINIZIONE: DATO UN SOTTOINSIEME $E \subset \mathbb{R}^N$ LIMITATO, PONIAMO $\overline{m}(E) = \inf_{E \subset P} |P|$ (MISURA ESTERNA).

OSSERVAZIONE: SE $E \subset \mathbb{R}^N$ È LIMITATO, SI HA $\underline{m}(E) \leq \overline{m}(E)$. INFATTI SE PRENDO UN $P_1 \subset E \subset P_2$ HO CHE $|P_1| \leq |P_2|$. IL NUMERO $|P_2|$ È DUNQUE UN MAGGIORANTE DELL'INSIEME $\{|P| : P \subset E\}$ DUNQUE $\underline{m}(E) = \sup_{P \subset E} |P| \leq$ $\leq |P_2|$. ANALOGAMENTE $\underline{m}(E)$ È UN MINORANTE DI $\{|P| : E \subset P\}$ DUNQUE $\underline{m}(E) \leq$ $\leq \inf_{E \subset P} |P| = \overline{m}(E)$.

ESEMPIO: PRENDIAMO $E_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ (ESERCIZIO: $E_2 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$). CONSIDERIAMO UN PLURINTERVALLO P CON $E_1 \subset P$. SO CHE $[0,1] = \overline{E}_1 \subset \overline{P} = P$ QUINDI $|P| \geq 1$. SE POI PRENDO PROPRIO $P_1 = [0,1]$ HO CHE $|P_1| = 1$ E CONCLUDO CHE $\overline{m}(E_1) = \inf_{E \subset P} |P|$ $= \min_{E \subset P} |P| = |P_1| = 1 > 0 = \underline{m}(E_1)$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, SE E_1, E_2 SONO LIMITATI, ALLORA $\overline{m}(E_1 \cup E_2) \leq \overline{m}(E_1) +$ $+ \overline{m}(E_2)$ (SUBADDITIVITÀ). NE SEGUE CHE, SE PER IPOTESI $\underline{m}(E_i) = \overline{m}(E_i)$ PER $i =$ $= 1, 2$ (INSIEMI MISURABILI) E INOLTRE $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ALLORA IN

$$\underline{m}(E_1) + \underline{m}(E_2) \leq \underline{m}(E_1 \cup E_2) \leq$$
$$\leq \overline{m}(E_1 \cup E_2) \leq \overline{m}(E_1) + \overline{m}(E_2)$$

VALGONO TUTTE LE UGUAGLIANZE: ADDITIVITÀ DELLA MISURA INTERNA, ESTERNA, RISTRETTA AGLI INSIEMI MISURABILI. SI NOTI CHE ABBIAMO ANCHE OTTENUTO LA MISURABILITÀ DI $E_1 \cup E_2$.

 MA 16 MAG 2023

OSSERVAZIONI NOTEVOLI:

1 VEDIAMO SE L'INTERVALLO $[0,1)$ È MISURABILE, E IN TAL CASO TROVIAMO LA MISURA.

OSSERVIAMO CHE IL PLURINTERVALLO $P_n = [0, 1-\frac{1}{n}] \subset E = [0,1)$ PER OGNI n, E CHE $E \subset Q = [0,1]$ QUINDI $|P_n| = 1 - \frac{1}{n} \leq \underline{m}(E) \leq \overline{m}(E) \leq |Q| = 1$.

PER L'ARBITRARIETÀ DI n, SEGUE CHE

$$\underline{m}(E) = \overline{m}(E) = 1.$$

2 VEDIAMO SE IL QUADRATO APERTO $E = (0,1)\times(0,1)$ È MISURABILE. PRENDO $P_n = [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \times [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \subset E$ PER $n \geq 3$ E $Q = \overline{E} = [0,1]\times[0,1]$ E POSSO DIRE CHE

$$|P_n| = \left(1-\frac{2}{n}\right)^2 \leq \underline{m}(E) \leq \overline{m}(E) \leq |Q| = 1.$$

PER L'ARBITRARIETÀ DI n SI DEDUCE CHE

$$\underline{m}(E) = \overline{m}(E) = 1.$$

3. TROVIAMO LA MISURA ESTERNA DELL'INSIEME $E = [a,b] \times \{y_0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ y = y_0\} \subset \mathbb{R}^2$. BASTA PRENDERE $I_\varepsilon = [a,b]\times[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ ED OSSERVARE CHE $\overline{m}(E) \leq |I_\varepsilon| = (b-a)\,2\varepsilon$ PER OGNI ε, DUNQUE $\overline{m}(E) = 0$.

4. TROVIAMO LA MISURA ESTERNA DELL'INSIEME $E = E_1 \times \{y_0\}$ DOVE $E_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

LA MISURA BIDIMENSIONALE SI PUÒ VEDERE COME LA MISURA PRODOTTO DELLE DUE MISURE UNIDIMENSIONALI: SE HO UN $E \subset \mathbb{R}^2$ DATO DA $E = E_1 \times E_2$ CON E_1, E_2 LIMITATI, POSSO DIRE CHE $\overline{m}(E) = \overline{m}(E_1)\cdot\overline{m}(E_2)$.

PER RISPONDERE ALLA DOMANDA 4 BASTA OSSERVARE CHE $E = E_1 \times \{y_0\} \subset [a,b]\times\{y_0\} \subset I_\varepsilon = [0,1]\times[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ QUINDI $\overline{m}(E) \leq 2\varepsilon$ DUNQUE $\overline{m}(E) = 0$ PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

I SOTTOINSIEMI MISURABILI DI $\mathbb{R}^N$ COSTITUISCONO UN ANELLO DI INSIEMI, O ANCHE UN'ALGEBRA DI INSIEMI NEL SENSO CHE SE E_1, E_2 SONO MISURABILI ALLORA ANCHE $E_1 \cup E_2$ E $E_1 \cap E_2$ LO SONO. VERIFICHIAMO LA SECONDA AFFERMAZIONE:

PER OGNI $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTONO $P_1 \subset E_1$ E $P_2 \subset E_2$ TALI CHE $|P_i| \leq \underline{m}(E_i) < |P_i| + \varepsilon$ PER $i = 1,2$

E SIMILMENTE ESISTONO DUE PLURINTERVALLI Q_1, Q_2 TALI CHE $E_i \subset Q_i$, $|Q_i| - \varepsilon < \overline{m}(E_i) \leq |Q_i|$.

OVVIAMENTE $P = P_1 \cap P_2$ E $Q = Q_1 \cap Q_2$ SONO PLURINTERVALLI E $P \subset E_1 \cap E_2 \subset Q$

QUINDI $|P| \leq \underline{m}(E_1 \cap E_2) \leq \overline{m}(E_1 \cap E_2) \leq |Q|$.

STIMO $|P|$ E $|Q|$ MEDIANTE $|Q_i \setminus P_i|$, $i = 1,2$.

OSSERVO CHE $Q \setminus P \subset (Q_1 \setminus P_1) \cup (Q_2 \setminus P_2)$

QUINDI $|Q \setminus P| \leq |Q_1 \setminus P_1| + |Q_2 \setminus P_2|$.

MA $|Q_i| - \varepsilon < \overline{m}(E_i) = \underline{m}(E_i) < |P_i| + \varepsilon$

E OVVIAMENTE $P_i \subset E_i \subset Q_i$ E PERCIÒ

$|Q_i \setminus P_i| = |Q_i| - |P_i| < 2\varepsilon$ DA CUI SEGUE CHE

$|Q \setminus P| < 4\varepsilon$. ESSENDO $P \subset E_1 \cap E_2 \subset Q$

POSSO SCRIVERE $|P| \le \underline{m}(E_1 \cap E_2) \le \overline{m}(E_1 \cap E_2) \le |Q|$ DA CUI OTTENGO CHE

$$\overline{m}(E_1 \cap E_2) - \underline{m}(E_1 \cap E_2) \le |Q| - |P| < 4\varepsilon$$

E PER L'ARBITRARIETÀ DI ε SEGUE CHE $\overline{m}(E_1 \cap E_2) = \underline{m}(E_1 \cap E_2)$ E LA VERIFICA È CONCLUSA.

LEGAME TRA LA MISURA DI PEANO-JORDAN E L'INTEGRALE DI RIEMANN (INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE)

CONSIDERIAMO UNA $f : [a,b] \to [0, M]$

E PONIAMO $G = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [0, f(x))\}$

$F = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\}$ E

$\Gamma = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y = f(x)\}$.

TEOREMA: f È INTEGRABILE SE E SOLO SE F E G SONO MISURABILI. SE f È INTEGRABILE, ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx = |F| = |G|$ E $|\Gamma| = 0$.

IL TEOREMA DISCENDE DAL FATTO CHE $\underline{m}(G) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f)$ E $\overline{m}(F) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$ E DALLE DISUGUAGLIANZE $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{m}(G) \le$

$$\le \begin{matrix} \overline{m}(G) \\ \underline{m}(F) \end{matrix} \le \overline{m}(F) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

E DAL FATTO CHE G È MISURABILE SE E SOLO SE F LO È. VERIFICHIAMO QUEST'ULTIMO ASSERTO. ESSENDO $G \subset F$ SI HA $\underline{m}(G) \le \overline{m}(F)$.

SUPPONIAMO CHE G SIA MISURABILE. SE NE DEDUCE CHE $|G| = \underline{m}(G) \le \underline{m}(F)$. DICO CHE $\overline{m}(F) < \overline{m}(G) + \varepsilon$ PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$.

PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE UN PLURINTERVALLO P_ε TALE CHE $G \subset P_\varepsilon$ E $|P_\varepsilon| < \overline{m}(G) + \varepsilon$.

PRENDO UN QUALUNQUE $x \in [a,b]$ E SO CHE IL SEGMENTO VERTICALE $\{x\} \times [0, f(x)) \subset G \subset P_\varepsilon = \overline{P_\varepsilon}$ QUINDI $\{x\} \times [0, f(x)] \subset P_\varepsilon$. DUNQUE $F \subset P_\varepsilon$ DA CUI $\overline{m}(F) \le |P_\varepsilon| < \overline{m}(G) + \varepsilon$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE. DUNQUE, SE G È MISURABILE, ANCHE F LO È E $|F| = |G|$.

MA, A PRESCINDERE DALLA MISURABILITÀ DI G, SI HA $\overline{m}(G) \le \overline{m}(F) \le \overline{m}(G)$ QUINDI $\overline{m}(G) = \overline{m}(F)$. SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE $\underline{m}(G) = \underline{m}(F)$.

ME 17 MAG 2023

VEDIAMO COME PROCEDERE PER VERIFICARE CHE $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{m}(G) = \underline{m}(F)$. SI VERIFICA CHE $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ge \underline{m}(F)$ E ANCHE

$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underline{m}(F)$. PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE UNA $\mathcal{D}_\varepsilon$ TALE CHE $s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon$. IL VALORE NUMERICO DI

ME 17 MAG 2023

$$s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) = \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$$ È LA MISURA DEL PLURINTERVALLO P_ε DATO DA

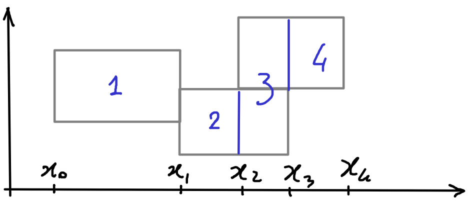
$$P_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{m} [x_{k-1}, x_k] \times \left[0, \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right].$$ DUNQUE:

PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $P_\varepsilon \subset F$ TALE CHE

$\underline{m}(F) \geq |P_\varepsilon| > \underline{\int}_a^b f(x)\,dx - \varepsilon$. PER L'ARBITRARIETÀ DI ε, CONCLUDIAMO CHE

$$\underline{m}(F) \geq \underline{\int}_a^b f(x)\,dx$$

SI PUÒ DIMOSTRARE LA DISUGUAGLIANZA OPPOSTA: PER OGNI $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTE UN PLURINTERVALLO $Q_\varepsilon \subset F$ TALE CHE $|Q_\varepsilon| > \underline{m}(F) - \varepsilon$. POSSIAMO SEMPRE SCRIVERE Q_ε A STRISCE, CIOÈ $Q_\varepsilon = \bigcup_k [x_{k-1}, x_k] \times P_k$ DOVE P_k SONO PLURINTERVALLI SULLA RETTA E $x_{k-1} < x_k$



SICCOME $Q_\varepsilon \subset F$ PER IPOTESI, DEVE RISULTARE $P_k \subset \left[0, \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right]$ QUINDI

$$\left|[x_{k-1}, x_k] \times P_k\right| \leq (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$$

DA CUI $\underline{m}(F) - \varepsilon < |Q_\varepsilon| \leq s(\mathcal{D}, f)$

$\leq \underline{\int}_a^b f(x)\,dx$. ESSENDO ε ARBITRARIO,

SI DEDUCE CHE $\underline{m}(F) \leq \underline{\int}_a^b f(x)\,dx$.

OSSERVAZIONE: SE $E_1, \dots, E_n$ SONO MISURABILI, L'UNIONE $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_n$ È UN INSIEME MISURABILE E SI SA CHE SE $E_i \cap E_j = \emptyset$ PER $i \neq j$ ALLORA $|E| = \sum_{k=1}^{n} |E_k|$.

SE, INVECE, PRENDO UNA SUCCESSIONE DI E_k MISURABILI, L'UNIONE $\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ NON È DETTO CHE SIA MISURABILE. CLASSICO ESEMPIO: PRENDIAMO

$E = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{q \in E} E_q$ DOVE $E_q = \{q\}$ È MISURABILE PER OGNI q MENTRE E NON LO È. VISTO IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DELL'INTEGRALE, QUESTO ESEMPIO EQUIVALE A DIRE CHE, POSTO $f_q = \chi_{E_q}$ CIOÈ $f(x) = \begin{cases} 1, & x = q \\ 0, & x \neq q \end{cases}$

OTTENGO FUNZIONI INTEGRABILI CON $\int_0^1 f_q(x)\,dx = |E_q| = 0$, TUTTAVIA LA SERIE $\sum_{q \in E} f_q(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE A $f = \chi_E$ OVVERO

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0,1] \setminus E \end{cases}$$ CHE NON È INTEGRABILE.

LA PREROGATIVA DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE È DI CONSENTIRE L'INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE SOTTO IPOTESI MENO RESTRITTIVE DELLA CONVERGENZA UNIFORME.

ME 17 MAG 2023

MISURA DI LEBESGUE

DEFINIZIONE: DATO UN SOTTOINSIEME LIMITATO $E \subset \mathbb{R}^N$ SI DEFINISCE LA MISURA ESTERNA DI LEBESGUE $m_e(E) = \inf\limits_{E \subset A \text{ aperto}} \underline{m}(A)$ MISURA DI PEANO-JORDAN E LA MISURA INTERNA $m_i(\emptyset) = 0$ OVVERO $m_i(E) = \sup\limits_{\text{compatto } K \subset E} \overline{m}(K)$ SE $E \neq \emptyset$.

MISURA DI PEANO-JORDAN

OSSERVAZIONI: OGNI APERTO A SI PUÒ ESPRIMERE COME $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$ E QUESTO PERMETTE UNA RISOLUZIONE MAGGIORE RISPETTO AL $P = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$.

SAPPIAMO CHE $\overline{m}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$ PERCHÉ SE $P \supset \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ALLORA $P = \overline{P} \supset [0,1]$.

TROVIAMO ALLORA $m_e(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ SECONDO LEBESGUE!

PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE UN APERTO $A_\varepsilon \supset E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ LA CUI MISURA INTERNA DI PEANO-JORDAN È $\underline{m}(A) \leq \varepsilon$ QUINDI $m_e(E) = 0$ E QUINDI L'INSIEME $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ È MISURABILE ED HA MISURA NULLA. PER INDIVIDUARE UN APERTO ADATTO INDICHIAMO CON (q_k) UNA SUCCESSIONE LA CUI IMMAGINE COINCIDE CON $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ E SCEGLIAMO UNA SERIE CONVERGENTE $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2\right)$ COSICCHÉ $2\varepsilon = \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}$ DA CUI $\varepsilon = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ E PONIAMO

PONIAMO $A_\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left(q - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}},\ q + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right)$

COSICCHÉ LA MISURA INTERNA DI PEANO-JORDAN È $\underline{m}(A_\varepsilon) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}} = \varepsilon$.

CONFRONTO FRA LE DUE MISURE

SE PRENDO UN QUALUNQUE $E \subset \mathbb{R}^N$ HO CHE

$$\underbrace{\underline{m}(E)}_{\text{PEANO-JORDAN}} \leq \underbrace{m_i(E) \leq m_e(E)}_{\text{LEBESGUE}} \leq \underbrace{\overline{m}(E)}_{\text{PEANO-JORDAN}}$$

IMPORTANZA: SE $\underline{m}(E) = \overline{m}(E)$ ALLORA LA MISURA DI PEANO-JORDAN COINCIDE CON QUELLA DI LEBESGUE

VICEVERSA, SE $\underbrace{m_i(E) = m_e(E)}_{\text{LEBESGUE}}$ PUÒ ANCHE ESSERE CHE $\underbrace{\underline{m}(E) \neq \overline{m}(E)}_{\text{PEANO-JORDAN}}$ (ESEMPIO PRECEDENTE).

VE 19 MAG 2023

VERIFICHIAMO CHE $\underbrace{\underline{m}(E)}_{\text{PEANO-JORDAN}} \leq \underbrace{m_i(E)}_{\text{LEBESGUE}}$.

IL MOTIVO È CHE I PLURINTERVALLI SONO COMPATTI (TEOREMA DI HEINE-BOREL). QUINDI $\{|P| : P \subset E\} \subset \{|K| : K \subset E\}$ DA CUI $\underline{m}(E) = \sup\limits_{P \subset E} |P| \leq \sup\limits_{K \subset E} |K| = m_i(E)$.

VERIFICHIAMO CHE $\underbrace{m_i(E) \leq m_e(E)}_{\text{LEBESGUE}}$. IL MOTIVO È CHE SE $K \subset E$ E $E \subset A$ ALLORA $K \subset A$, E INOLTRE $\overline{m}(K) \leq \underline{m}(A)$ IN QUANTO ESISTE UN PLURINTERVALLO P INTERMEDIO NEL SENSO CHE $K \subset P \subset A$. NE SEGUE CHE $\overline{m}(K) \leq |P| \leq \underline{m}(A)$.

VE 19 MAG 2023

DIMOSTRIAMO L'ESISTENZA DI UN PLURINTERVALLO INTERMEDIO: PER OGNI $x \in K \subset A$ ESISTE UN INTERVALLO $I_x \subset A$ TALE CHE $x \in \mathring{I}_x$, QUINDI $K \subset \bigcup_{x \in K} \mathring{I}_x$. ESSENDO K COMPATTO, ESISTONO $x_1, \dots, x_m \in K$ TALI CHE $K \subset \bigcup_{i=1}^m \mathring{I}_{x_i}$ E ALLORA PRENDO $P = \bigcup_{i=1}^m I_{x_i} \subset A$.

VERIFICHIAMO CHE $m_e(E) \leq \overline{m}(E)$. IL MOTIVO
LEBESGUE PEANO-JORDAN
È CHE SE $I = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ ALLORA PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE δ_0 TALE CHE PER OGNI $\delta \in (0, \delta_0)$ LA MISURA DELL'APERTO $\mathring{I}_\delta = \prod_{i=1}^m (a_i - \delta, b_i + \delta) \supset I$ È TALE CHE $|I| < |\mathring{I}_\delta| < |I| + \varepsilon$. LA PROPRIETÀ SI ESTENDE AI PLURINTERVALLI: DATO P ESISTE P_δ TALE CHE $|P| < |P_\delta| < |P| + \varepsilon$ E $P \subset \mathring{P}_\delta$. APPLICAZIONE: ESSENDO $\overline{m}(E) = \inf_{E \subset P} |P|$, PER OGNI $\varepsilon > 0$ IL NUMERO $\overline{m}(E) + \varepsilon$ NON È UN MINORANTE DI $\{|P| : E \subset P\}$, DUNQUE ESISTE ALMENO UN PLURINTERVALLO P TALE CHE $E \subset P$ E $|P| < \overline{m}(E) + \varepsilon$, MA ALLORA ESISTE ANCHE UN PLURINTERVALLO P_δ TALE CHE $P \subset \mathring{P}_\delta = A_\delta$ E $|P_\delta| < |P| + \varepsilon < \overline{m}(E) + 2\varepsilon$. DUNQUE $m_e(E) = \inf_{E \subset A} \underline{m}(A) \leq \underline{m}(A_\delta) = |P_\delta| < \overline{m}(E) + 2\varepsilon$

E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

$$\boxed{\text{RELAZIONE TRA APERTI E COMPATTI E TRA MISURA INTERNA E MISURA ESTERNA}}$$

PRESO UN QUALUNQUE COMPATTO $K \subset \mathbb{R}^N$, ESSO È LIMITATO E QUINDI ESISTE UN CUBO APERTO $\Omega = \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)^N$ TALE CHE $K \subset \Omega$. POSTO $A = \Omega \setminus K$, CHE È APERTO, SI HA

$$\overline{m}(K) = \ell^N - \underline{m}(A)$$

VERIFICHIAMO CHE $\overline{m}(K) \geq \ell^N - \underline{m}(A)$: PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE UN PLURINTERVALLO P TALE CHE $K \subset P$ E $|P| < \overline{m}(K) + \varepsilon$. PASSANDO, SE NECESSARIO, DA P A $P \cap \overline{\Omega}$ POSSIAMO SUPPORRE CHE $P \subset \overline{\Omega}$ DAL PRINCIPIO. IL PLURINTERVALLO APERTO $\mathring{Q} = \Omega \setminus P \subset A = \Omega \setminus K$ HA MISURA $|Q| = \ell^N - |P| > \ell^N - \overline{m}(K) - \varepsilon$ E PERCIÒ $\underline{m}(A) \geq |Q| > \ell^N - \overline{m}(K) - \varepsilon$ ED ESSENDO ε ARBITRARIO SI HA LA TESI: $\underline{m}(A) \geq \ell^N - \overline{m}(K)$.

VERIFICHIAMO CHE $\overline{m}(K) \leq \ell^N - \underline{m}(A)$: PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE UN PLURINTERVALLO Q TALE CHE $Q \subset A \subset \Omega$ E $|Q| > \underline{m}(A) - \varepsilon$. POSTO $P = \overline{\Omega \setminus Q} \supset K = \Omega \setminus A$ SI HA $|P| = \ell^N - |Q| < \ell^N - \underline{m}(A) + \varepsilon$ E QUINDI $\overline{m}(K) \leq |P| < \ell^N - \underline{m}(A) + \varepsilon$ ED ESSENDO ε ARBITRARIO SI OTTIENE $\overline{m}(K) \leq \ell^N - \underline{m}(A)$.

ESERCIZIO: PRENDIAMO UN SOTTOINSIEME $E \subset \Omega$, E DEFINIAMO $F = \Omega \setminus E$: SI PUÒ DIRE CHE $m_i(E) = \ell^N - m_e(F)$?

MISURA DEGLI INSIEMI ILLIMITATI

DEFINIZIONE: UN INSIEME ILLIMITATO E SI DICE MISURABILE SE TUTTI GLI INSIEMI TRONCATI $E_k = E \cap \Omega_k$ SONO MISURABILI. IN TAL CASO SI PONE $|E| = \lim_{k \to +\infty} |E \cap \Omega_k|$. SI INTENDE $\Omega_k = \prod_{i=1}^{N} \left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$.

ESERCIZI. 1. SOSTITUENDO Ω_k CON $\overline{\Omega}_k$ SI OTTIENE UNA DEFINIZIONE EQUIVALENTE: PERCHÉ? 2. SOSTITUENDO Ω_k CON $B_k(0) = \{ x \in \mathbb{R}^N : |x| < k \}$ SI OTTIENE UNA DEFINIZIONE EQUIVALENTE: PERCHÉ? 3. PRESO UN INSIEME ILLIMITATO E, E POSTO $m_e(E) = \inf_{E \subset A \text{ aperto}} \underline{m}(A)$, SE $m_e(E) < +\infty$ ALLORA E È MISURABILE (CIOÈ TUTTE LE INTERSEZIONI $E \cap \Omega_k$ SONO MISURABILI) SE E SOLO SE $m_e(E) = m_i(E) = \sup_{K \subset E} \overline{m}(K)$.

OSSERVAZIONE: SE $m_e(E) = m_i(E) = +\infty$, L'INSIEME E PUÒ NON ESSERE MISURABILE! PER FARE UN ESEMPIO, INDICHIAMO CON $X \subset \mathbb{R}^N_- = \{ x \in \mathbb{R}^N : x_1 < 0 \}$ UN INSIEME NON MISURABILE, E PONIAMO $E = X \cup \mathbb{R}^N_+$ ESSENDO $\mathbb{R}^N_+ = \{ x \in \mathbb{R}^N : x_1 > 0 \}$.

VE 19 MAG 2023

ESERCIZIO: 1. L'INSIEME E NON È MISURABILE: PERCHÉ? 2. $m_i(E) = +\infty$: PERCHÉ? 3. $m_e(E) = +\infty$: PERCHÉ?

SVOLGIMENTO. 1. SI VERIFICA SUBITO CHE $X = X = E \cap \mathbb{R}^N_-$. QUINDI, SE E FOSSE MISURABILE, LO DOVREBBE ESSERE ANCHE X.
2. $m_i(E) = \sup_{K \subset E} \overline{m}(K)$. ALLORA PRENDO $K = [1, n]^N$ ED HO $|K| = n^N$ QUINDI $m_i(E) \geq (n-1)^N$ PER OGNI n, DUNQUE $m_i(E) = +\infty$.

ESEMPIO: APPLICANDO LA DEFINIZIONE, SI TROVA CHE L'INSIEME $E = \{x_0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ HA MISURA (BIDIMENSIONALE) NULLA: INFATTI $E_k = E \cap \Omega_k = \{x_0\} \times \left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ E $|E_k| = 0$ PER OGNI k (ESEMPIO 3 DEL 16 MAGGIO).

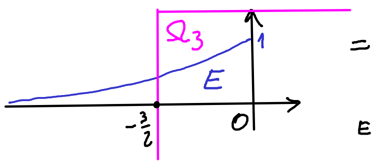
ESEMPIO: ANALOGAMENTE SI TROVA CHE GLI INSIEMI $\mathbb{N} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{Q} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ HANNO MISURA BIDIMENSIONALE NULLA. QUAL È LA MISURA UNIDIMENSIONALE DELLA LORO PROIEZIONE SULL'ASSE x?

CONSIDERIAMO $E = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. IN TAL CASO SI HA $E_k = E \cap \Omega_k = \mathbb{Q} \cap \left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ E $|E_k| = 0$ PER OGNI k (17/05) QUINDI $|\mathbb{Q}| = 0$.

LU 22 MAG 2023

ESEMPIO: TROVIAMO LA MISURA DI LEBESGUE UNIDIMENSIONALE DELL'INSIEME $E = \mathbb{R}$. PER OGNI $k \in \mathbb{Z}^+$ SI HA $E_k = E \cap \Omega_k = \left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ E $|E_k| = k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ QUINDI $|\mathbb{R}| = +\infty$.

ESEMPIO: TROVIAMO LA MISURA DI LEBESGUE BIDIMENSIONALE DELL'INSIEME $E = \{(x,y) : x \in (-\infty, 0],\ y \in [0, e^x]\}$. SI HA $E_k =$



$= E \cap \left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)^2$ E QUINDI $|E_k| =$

$= \int_{-\frac{k}{2}}^{0} e^x \, dx$ PER OGNI $k \geq 2$ PER L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE $(16/05)$, DA CUI SEGUE CHE $\lim_{k\to+\infty} |E_k| = 1$ $(15/05)$.

ESEMPIO: TROVIAMO LA MISURA DI LEBESGUE BIDIMENSIONALE DELL'INSIEME $\tilde{E} = \{(x,y) : x \in (-\infty, 0),\ y \in [0, e^x]\}$. SI HA CHE $E = \tilde{E} \cup S$ DOVE $S = \{0\} \times [0,1]$. ESSENDO $\tilde{E} \cap S = \emptyset$ SI HA $|\tilde{E}| + |S| = |\tilde{E} \cup S| = 1$ E AVENDO GIÀ TROVATO $|S| = 0$ SI CONCLUDE CHE $|\tilde{E}| = 1$.

ESEMPIO: TROVIAMO LA MISURA DI LEBESGUE BIDIMENSIONALE DELL'INSIEME $E = \{(x,y) : x \in (-\infty, +\infty),\ y = mx + q\}$. SICCOME LA FUNZIONE $f(x) = mx + q$ È INTEGRABILE SU OGNI INTERVALLO $\left[-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right]$, PER L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE SI HA $|\Gamma| = |E \cap \Omega_k| = 0$ PER OGNI k DUNQUE $|E|_2 = 0$.

LU 22 MAG 2023

LA NUMERABILE ADDITIVITÀ

DATA UNA SUCCESSIONE DI INSIEMI E_k MISURABILI SECONDO LEBESGUE, L'INSIEME $E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k$ È MISURABILE. INOLTRE SE $E_i \cap E_j = \emptyset$ PER $i \neq j$ ALLORA $\left|\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} |E_k|$.

ESEMPIO: L'INSIEME $E = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{q \in E} E_q$, $E_q = \{q\}$ VISTO IL 17/05 HA MISURA $|E| = \sum_{q \in E} |E_q| = 0$.

L'IMPORTANZA STA NELLE APPLICAZIONI AL PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE.

FORMULAZIONE EQUIVALENTE (CONTINUITÀ DELLA MISURA): SE $E_k \subset E_{k+1}$ PER OGNI k, ALLORA

$$\left|\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right| = \lim_{k \to +\infty} |E_k|.$$

SE, INVECE, $E_{k+1} \subset E_k$ PER OGNI k, E RISULTA $|E_{k_0}| < +\infty$ PER ALMENO UN k_0, ALLORA ($|E_k| \leq |E_{k_0}| < +\infty$ PER OGNI $k \geq k_0$ E)

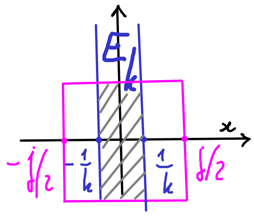
$$\left|\bigcap_{k=0}^{+\infty} E_k\right| = \lim_{k \to +\infty} |E_k|.$$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO $E_k = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \times \mathbb{R}$: SI HA $E_{k+1} \subset E_k$ E $|E_k| = +\infty$ IN QUANTO

$$E_k \cap \left(-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \times \left(-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right)$$

PER OGNI $j \geq 2$, QUINDI $\left|E_k \cap \left(-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right)^2\right| = \frac{2}{k} j \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$

DA CUI SEGUE $|E_k| = +\infty$ PER OGNI k. SI HA, INOLTRE, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k = \{0\} \times \mathbb{R}$ QUINDI $0 = \left|\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right| \neq \lim_{k \to +\infty} |E_k| = +\infty$.



PER DIMOSTRARE L'EQUIVALENZA FRA LA NUMERABILE ADDITIVITÀ E LA CONTINUITÀ DELLA MISURA SI PROCEDE COME SEGUE: SUPPONIAMO $E_k \subset E_{k+1}$ PER OGNI k E PONIAMO $F_0 = E_0$, $F_{k+1} = E_{k+1} \setminus E_k$ PER $k \geq 0$. ALLORA $\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k$ E SICCOME $F_j \cap F_i = \emptyset$ PER $i \neq j$ POSSO SCRIVERE

$$\left|\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right| = \left|\bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} |F_k| = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} |F_k|$$

MA $\sum_{k=0}^{n} |F_k| = \left|\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right| = |E_n|$ E LA CONTINUITÀ SEGUE DALLA NUMERABILE ADDITIVITÀ. IL VICEVERSA SI DIMOSTRA ANALOGAMENTE (ESERCIZIO).

LU 22 MAG 2023

DIMOSTRIAMO LA NUMERABILE ADDITIVITÀ. PER L'ADDITIVITÀ DELLA MISURA SI HA $\left|\bigcup_{k=0}^{m} E_k\right| = \sum_{k=0}^{m} |E_k|$, E PER LA MONOTONIA RISPETTO ALL'UNIONE SI HA

$$\sum_{k=0}^{m} |E_k| = \left|\bigcup_{k=0}^{m} E_k\right| = m_i\left(\bigcup_{k=0}^{m} E_k\right) \leq m_i(E)$$

QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty} |E_k| \leq m_i(E)$.

PER CONCLUDERE È SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE $m_e(E) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |E_k|$. SUPPONIAMO, INIZIALMENTE, CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} |E_k| < +\infty$. SE LA SERIE DIVERGE SI APPLICA IL RISULTATO ALLE INTERSEZIONI $E \cap \left(-\frac{j}{2}, \frac{j}{2}\right)^N$. NEL NOSTRO CASO, PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$, SCRIVIAMO $\varepsilon = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ E PER OGNI k ESISTE UN APERTO $A_k \supset E_k$ TALE CHE $|A_k| < |E_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. MA ALLORA $E \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k =: A$ QUINDI $m_e(E) \leq |A| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |A_k| < \sum_{k=0}^{+\infty} |E_k| + \varepsilon$ E PER L'ARBITRARIETÀ DI ε SI OTTIENE $m_e(E) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |E_k|$ C.V.D.

MA 23 MAG 2023

DUE INSIEMI NOTEVOLI: L'INSIEME DI CANTOR E L'ESEMPIO DI VITALI

1) L'INSIEME DI CANTOR HA MISURA DI PEANO-JORDAN UNIDIMENSIONALE NULLA E HA LA CARDINALITÀ, O POTENZA, DEL CONTINUO.

DEFINIZIONE: L'INSIEME DI CANTOR $\mathcal{C}$ È L'INTERSEZIONE $\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} P_k$ DEI PLURINTERVALLI $P_k \subset \mathbb{R}$ DEFINITI PER RICORRENZA PONENDO $P_0 = [0,1]$ E, SE $P_k = \bigcup_{i=0}^{n_k} [a_i^k, b_i^k]$ CON $[a_i^k, b_i^k] \cap [a_j^k, b_j^k] = \emptyset$ PER $i \neq j$

ALLORA $P_{k+1} = \bigcup_{i=0}^{n_k} \left(\left[a_i^k, a_i^k + \frac{\ell_i^k}{3}\right] \cup \left[b_i^k - \frac{\ell_i^k}{3}, b_i^k\right] \right)$

ESSENDO $\ell_i^k = b_i^k - a_i^k$.

TROVIAMO P_1 A PARTIRE DA $P_0 = \bigcup_{i=0}^{0} [a_i^0, b_i^0]$ DOVE $a_0^0 = 0$ E $b_0^0 = 1$: APPLICANDO LA DEFINIZIONE, SI OTTIENE $P_1 = \bigcup_{i=0}^{0} \left(\left[a_i^0, a_i^0 + \frac{\ell_i^0}{3}\right] \cup \left[b_i^0 - \frac{\ell_i^0}{3}, b_i^0\right] \right)$ CON $\ell_0^0 = b_0^0 - a_0^0 = 1$ DUNQUE $P_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \bigcup_{i=0}^{1} [a_i^1, b_i^1]$ CON $a_0^1 = 0$, $b_0^1 = \frac{1}{3}$, $a_1^1 = \frac{2}{3}$, $b_1^1 = 1$.

TROVIAMO $P_2 = \bigcup_{i=0}^{1} \left(\left[a_i^1, a_i^1 + \frac{\ell_i^1}{3}\right] \cup \left[b_i^1 - \frac{\ell_i^1}{3}, b_i^1\right] \right)$

CON $\ell_0^1 = \ell_1^1 = \frac{1}{3}$, DUNQUE $P_2 = \left(\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \right) \cup \left(\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \right)$

MA 23 MAG 2023

SI VERIFICA PER INDUZIONE CHE $\ell_i^k = \frac{1}{3^k}$ PER OGNI $i = 0, \dots, n_k = 2^k - 1$ PER OGNI $k \in \mathbb{N}$.

$|P_k|$ SI RICAVA DAL FATTO CHE $|P_0| = 1$ E $|P_{k+1}| = |P_k| \cdot \frac{2}{3}$, QUINDI $|P_k| = \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

LA MISURA DI PEANO-JORDAN DELL'INSIEME DI CANTOR, PER DEFINIZIONE, SODDISFA LA DISUGUAGLIANZA $\overline{m}(\mathcal{C}) \leq |P_k| = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ PER OGNI k PERCHÉ $\mathcal{C} \subset P_k$ PER OGNI k, DUNQUE $\overline{m}(\mathcal{C}) = 0$.

PER VERIFICARE CHE $\mathcal{C}$ HA LA POTENZA, O CARDINALITÀ, DEL CONTINUO, SI RAPPRESENTANO I NUMERI REALI IN BASE 3: SE $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ ALLORA $x = [0,0\dots]_3$ MENTRE SE $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ SI HA $x = [0,1\dots]_3$ INFINE SE $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ ALLORA $x = [0,2\dots]_3$ DUNQUE $\mathcal{C}$ SI PONE IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON L'INSIEME $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ DELLE SUCCESSIONI A VALORI IN $\{0,2\}$ CHE HA LA CARDINALITÀ DEL CONTINUO.

2) GIUSEPPE VITALI NEL 1905, TRE ANNI DOPO LA TESI DI LEBESGUE (1902) COSTRUISCE UN ESEMPIO DI INSIEME NON MISURABILE PRENDENDO NELL'INTERVALLO $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ UNO E UN SOLO RAPPRESENTANTE x_0 DELLA CLASSE DI TUTTI GLI $x \in \mathbb{R}$ TALI CHE $x - x_0 \in \mathbb{Q}$. CHIAMIAMO G_0 L'INSIEME DI TALI RAPPRESENTANTI. SUPPONENDO CHE G_0 SIA MISURABILE, E USANDO LA NUMERABILE ADDITIVITÀ, SI GIUNGE AD UN ASSURDO.

OSSERVAZIONE: I TRASLATI $G_0 + q = \{x : x - q \in G_0\}$ CORRISPONDENTI A $p, q \in \mathbb{Q}$ DISTINTI SONO DISGIUNTI: QUALUNQUE SIA $x \in \mathbb{R}$, LA DIFFERENZA TRA $x - p$ E $x - q$ È $q - p \in \mathbb{Q}$ QUINDI $x - p \sim x - q$ E, PER DEFINIZIONE DI G_0, SOLO UNO DI ESSI PUÒ APPARTENERE A G_0. DUNQUE SE $x \in (G_0 + q) \cap (G_0 + p)$ ALLORA $p = q$.

ALLORA $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|G_0 + \frac{1}{n}\right| = \left|\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(G_0 + \frac{1}{n}\right)\right|$

MA $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(G_0 + \frac{1}{n}\right) \subset \left(0, \frac{3}{2}\right)$ QUINDI $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|G_0 + \frac{1}{n}\right| \leq \frac{3}{2}$. ESSENDO $\left|G_0 + \frac{1}{n}\right| = \left|G_0 + \frac{1}{k}\right|$ SE NE DEDUCE $\left|G_0 + \frac{1}{n}\right| = 0$ PER OGNI n DUNQUE $|G_0| = 0$.

D'ALTRO CANTO $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (G_0 + q)$ E PERCIÒ

$$+\infty = |\mathbb{R}| = \sum_{q \in \mathbb{Q}} |G_0 + q| = \sum_{q \in \mathbb{Q}} 0 = 0$$

IL CHE È ASSURDO.

 MA 23 MAG 2023

CENNI ALLA MISURA DI HAUSDORFF

Come anticipato il 15/05 la misura di Lebesgue N-dimensionale non è adatta a misurare l'estensione degli insiemi k-dimensionali con $k<N$ (curve nel piano, curve e superfici nello spazio). Si usa a tal proposito la misura di Hausdorff: vedere Evans, Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions. La misura di Hausdorff in $\mathbb{R}^N$ dipende dalla dimensione $k \le n$ e si denota con $\mathcal{H}^k$.

Accenniamo, per semplicità, alla cosiddetta « misura sferica » $\mathcal{S}^k$ che ha una definizione simile.

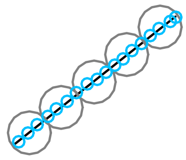
Dato $E \subset \mathbb{R}^N$ e fissata la grana δ, si definisce

$$\mathcal{S}^k_\delta(E) = \inf\left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} \omega_k r_i^k : E \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} B(x_i, r_i),\ r_i < \delta \right\}$$

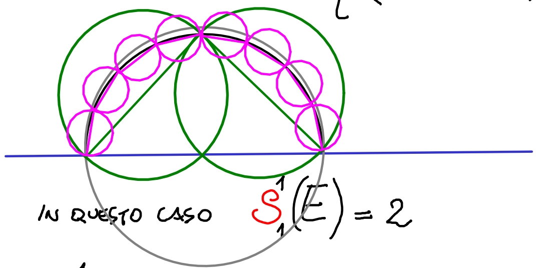
dove ω_k è la misura di Peano-Jordan della palla unitaria k-dimensionale, e $B(x_i, r_i)$ sono palle N-dimensionali. Dalla definizione segue che $\mathcal{S}^k_{\delta_1}(E) \geq \mathcal{S}^k_{\delta_2}(E)$ se $\delta_1 < \delta_2$. La misura sferica k-dimensionale di E si definisce

$$\mathcal{S}^k(E) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{S}^k_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{S}^k_\delta(E).$$

Esempio: se $S = \{(x_0 + t v_x,\ y_0 + t v_y) : t \in [0, \ell]\}$ con $v_x^2 + v_y^2 = 1$ allora $\mathcal{S}^1_\delta(S) = \ell$ qualunque sia δ. Notare che $\omega_1 = |(-1,1)| = 2$. Quindi $\mathcal{S}^1(S) = \ell$.



Poniamo adesso $E = \{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\}$



In questo caso $\mathcal{S}^1_1(E) = 2$

$$\mathcal{S}^1_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(E) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{S}^1_\delta(E) = \pi.$$

 ME 24 MAG 2023

LA MISURABILITÀ DELLE FUNZIONI

NELLA TESI DI LEBESGUE (1902) SI DEFINISCE «SOMMABILE» (OGGI SI DICE «MISURABILE») UNA FUNZIONE f TALE CHE, PER OGNI $a, b \in \mathbb{R}$, L'INSIEME $\{x : a < f(x) < b\}$ CHE INDICHEREMO CON $f^{-1}((a,b))$, È MISURABILE.

PER DEFINIRE L'INTEGRALE SI PRENDE UNA PARTIZIONE $\Delta = \{\dots, m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1, m_2, \dots\}$ SULL'ASSE DELLE ORDINATE E SI DEFINISCONO LA SOMMA INFERIORE

$$\sigma = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} m_i \cdot |f^{-1}(\mathcal{J}_i)|, \quad \text{DOVE } \mathcal{J}_i = [m_i, m_{i+1})$$

E LA SOMMA SUPERIORE $\Sigma = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} m_{i+1} \cdot |f^{-1}(\mathcal{J}_i)|$

E SI DEFINISCE L'INTEGRALE COME IL LORO COMUNE LIMITE. SERVE CHE $f^{-1}(\mathcal{J}_i)$ SIA MISURABILE.

PROPOSIZIONE. SIA $f : E \to \mathbb{R}$ CON $E \subset \mathbb{R}^N$ MISURABILE. LE SEGUENTI PROPRIETÀ SONO EQUIVALENTI.

1) L'INSIEME $f^{-1}((a,b))$ È MISURABILE QUALUNQUE SIANO $a, b \in \mathbb{R}$;
2) L'INSIEME $f^{-1}((a,b])$ È MISURABILE QUALUNQUE SIANO $a, b \in \mathbb{R}$;
3) L'INSIEME $f^{-1}([a,b))$ È MISURABILE QUALUNQUE SIANO $a, b \in \mathbb{R}$;
4) L'INSIEME $f^{-1}([a,b])$ È MISURABILE QUALUNQUE SIANO $a, b \in \mathbb{R}$;
5) L'INSIEME $f^{-1}((t,+\infty))$ È MISURABILE QUALUNQUE SIA $t \in \mathbb{R}$;
6) L'INSIEME $f^{-1}([t,+\infty))$ È MISURABILE QUALUNQUE SIA $t \in \mathbb{R}$;
7) L'INSIEME $f^{-1}((-\infty,t))$ È MISURABILE QUALUNQUE SIA $t \in \mathbb{R}$;
8) L'INSIEME $f^{-1}((-\infty,t])$ È MISURABILE QUALUNQUE SIA $t \in \mathbb{R}$;
9) L'INSIEME $f^{-1}(A)$ È MISURABILE QUALUNQUE SIA L'APERTO $A \subset \mathbb{R}$;
10) L'INSIEME $f^{-1}(B)$ È MISURABILE QUALUNQUE SIA IL BORELIANO $B \subset \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE: UNA σ-ALGEBRA DI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^N$ È UN SOTTOINSIEME $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ CHE CONTIENE $\emptyset$, $\mathbb{R}^N$, E CHIUSO RISPETTO ALL'UNIONE NUMERABILE (ALL'INTERSEZIONE NUMERABILE) E ALLA COMPLEMENTAZIONE.

DEFINIZIONE: LA σ-ALGEBRA DEI BORELIANI È LA PIÙ PICCOLA σ-ALGEBRA (L'INTERSEZIONE DI TUTTE LE σ-ALGEBRE) CHE CONTIENE $\mathcal{U}$ L'INSIEME DEGLI APERTI.

LA DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE È UN ESERCIZIO. FACCIAMO VEDERE, A TITOLO DI ESEMPIO, CHE $1 \Rightarrow 2$. PRESO $(a,b]$, SI HA $f^{-1}((a,b]) =$

$$= f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(a, b+\tfrac{1}{n}\right)\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(\left(a, b+\tfrac{1}{n}\right)\right)$$

E LA TESI SEGUE. IN GENERALE SI USANO LE PROPRIE-

TÀ $f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(E_n)$

$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(E_n)$

AD ESEMPIO: $f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \left\{x \in E : f(x) \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left\{x \in E : f(x) \in E_n\right\}$

DIMOSTRIAMO CHE $1 \Rightarrow 5$: PRENDO $(t,+\infty)$ E SCRIVO $f^{-1}((t,+\infty)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(t, t+n)\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}((t,t+n))$ E LA TESI SEGUE.

ESEMPI: SE $f: E \to \mathbb{R}$ HA LA PROPRIETÀ CHE PER OGNI APERTO $V \subset \mathbb{R}$ L'INSIEME $f^{-1}(V)$ È UN APERTO RELATIVO DI E (f È CONTINUA) ALLORA, AVENDO L'APERTO RELATIVO LA FORMA $E \cap A$ CON A APERTO DI $\mathbb{R}^N$, ESSO È MISURABILE PERCHÉ INTERSEZIONE DI DUE MISURABILI: LE FUNZIONI CONTINUE SONO MISURABILI.

LE FUNZIONI SEMPLICI: $s: E \to \mathbb{R}$ ASSUMONO UN NUMERO FINITO DI VALORI $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ E GLI INSIEMI DI LIVELLO $s^{-1}(\lambda_i)$ SONO MISURABILI.

ESEMPI: $s(x) = \operatorname{sgn} x$, $s(x) = H(x)$ GRADINO DI HEAVISIDE, $s(x) = \chi_{(a,b)}(x) = \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$ FUNZIONE CARATTERISTICA DI (a,b).

ESERCIZIO: STABILIRE SE LA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DATA DA $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0,+\infty) \\ -e^x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ È MISURABILE.

ME 24 MAG 2023

LEMMA: SE $f, g: E \to \mathbb{R}$ SONO MISURABILI, ALLORA λf È MISURABILE QUALUNQUE SIA $\lambda \in \mathbb{R}$; $f \pm g$ È MISURABILE; $(f(x))^2 = f(x) \cdot f(x)$ È MISURABILE; $f(x)\,g(x)$ È MISURABILE; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ HA PER DOMINIO L'INSIEME MISURABILE $E_0 = \{x \in E : g(x) \neq 0\}$ ED È UNA FUNZIONE MISURABILE.

DIMOSTRAZIONE: SE $\lambda = 0$ ALLORA $\lambda f(x) \equiv 0$ ED È MISURABILE. SE $\lambda \neq 0$ SI HA

$(\lambda f)^{-1}((t,+\infty)) = \{x \in E : \lambda f(x) > t\} = \begin{cases} f^{-1}\left(\left(\frac{t}{\lambda}, +\infty\right)\right) & \text{SE } \lambda > 0 \\ f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{t}{\lambda}\right)\right) & \text{SE } \lambda < 0 \end{cases}$ E LA TESI SEGUE.

CONSIDERIAMO $f+g$. SI HA CHE $(f+g)^{-1}((t,+\infty))$

$= \{x \in E : f(x) > t - g(x)\} =$

$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f(x) > q > t - g(x)\} =$

$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in E : f(x) > q\} \cap \{x \in E : q > t - g(x)\}\right)$

$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\underbrace{f^{-1}((q,+\infty))}_{\text{MISURABILE PERCHÉ } f \text{ LO È}} \cap \underbrace{\{x \in E : g(x) > t - q\}}_{\text{MISURABILE PERCHÉ } g \text{ LO È}}\Big)$

ME 24 MAG 2023

CONSIDERIAMO $f(x)\cdot f(x)=f^2(x)$. SI HA CHE $\{x\in E: f^2(x)>t\}=E$ SE $t<0$, MENTRE RISULTA

$$=\{x\in E: f(x)>\sqrt{t}\}\cup\{x\in E: f(x)<-\sqrt{t}\}$$

$$=f^{-1}((\sqrt{t},+\infty))\cup f^{-1}((-\infty,-\sqrt{t}))\text{ SE } t\geq 0.$$

LA TESI SEGUE. VEDIAMO $f(x)\cdot g(x)=$

$$=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)\right)^2-\frac{1}{2}f^2(x)-\frac{1}{2}g^2(x)$$ E LA TESI SEGUE. ESERCIZIO: $f(x)/g(x)$ È MISURABILE.

TEOREMA: SIA E UN INSIEME MISURABILE, E CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE DI $f_n: E\to\mathbb{R}$ MISURABILI CONVERGENTI PUNTUALMENTE A f. ALLORA f È MISURABILE.

DIMOSTRAZIONE: PRENDIAMO $\mu_n: E\to\mathbb{R}$ MISURABILI E TALI CHE $\mu_n(x)\leq\mu_{n+1}(x)$ CONVERGENTI AD UNA $\mu(x)$. ALLORA μ È MISURABILE. INFATTI

$$\mu^{-1}((t,+\infty))=\{x\in E: \mu(x)>t\}=$$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x\in E: \mu_n(x)>t\}.$$ IL CASO GENERALE SI OTTIENE APPLICANDO TALE OSSERVAZIONE ALLE FUNZIONI $\mu_n(x)=\inf_{k\geq n} f_k(x)\longrightarrow f(x)$ PERCHÉ

$$f(x)-\varepsilon<f_k(x)<f(x)+\varepsilon \text{ PER OGNI } k\geq k_0$$

MA ALLORA SE $n\geq k_0$ RISULTA $\mu_n(x)=\inf_{k\geq n} f_k(x)$

$$\in\left[f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon\right).$$

COROLLARIO: SE $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ È DERIVABILE IN (a,b) ALLORA g È CONTINUA E g' È MISURABILE.

DIMOSTRAZIONE: ESSENDO g MISURABILE, ANCHE $g\left(x+\frac{1}{n}\right)$ LO È PER OGNI n, COME PURE LO È

$$f_n(x)=\frac{g\left(x+\frac{1}{n}\right)-g(x)}{\frac{1}{n}}\longrightarrow g'(x)$$

E LA TESI SEGUE DAL TEOREMA PRECEDENTE.

ESERCIZIO: DATE $f_n: E\to\mathbb{R}$ MISURABILI, VERIFICARE CHE $\mu_n(x)=\inf_{k\geq n} f_k(x)$ È MISURABILE.

VE 26 MAG 2023

NEL TESTO ADOTTATO SI RIDEFINISCE L'INTEGRALE DI LEBESGUE PROCEDENDO COME SEGUE.

1. DATO E MISURABILE E $s: E\to[0,+\infty)$ FUNZIONE SEMPLICE, SI DEFINISCE

$$\int_E s(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|s^{-1}(\lambda_i)\right|$$ DOVE

$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ SONO I VALORI POSITIVI DI $s(x)$.

È AMMESSO CHE $\left|s^{-1}(\lambda_i)\right|=+\infty$.

ESEMPI: $E=\mathbb{R}$, $s(x)=H(x)$, $\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\,dx$

$$=\left|H^{-1}(1)\right|=\left|(0,+\infty)\right|=+\infty.$$

$E=\mathbb{R}$, $s(x)=\operatorname{sgn} x$ HA VALORI NEGATIVI QUINDI LA DEFINIZIONE NON SI APPLICA.

$E=[0,3]$, $s(x)=\chi_{[2,7]}(x)$, $\int_0^3 s(x)\,dx=$

$$=\left|s_{|E}^{-1}(1)\right|=\left|[2,7]\cap[0,3]\right|=1.$$

VE 26 MAG 2023

② DATO E MISURABILE E $f: E \to [0,+\infty)$ MISURABILE, SI DEFINISCE $\int_E f(x)dx = \sup_{0 \le s \le f} \int_E s(x)\,dx$.

<u>LEGAME CON LA DEFINIZIONE ORIGINALE:</u> DATA UNA PARTIZIONE $\Delta = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n\}$ SE $f: E \to [0, \lambda_n)$ LA SOMMA INFERIORE $\sigma = \sum_{i=2}^{n} \lambda_{i-1} \left| f^{-1}([\lambda_{i-1}, \lambda_i)) \right|$ È L'INTEGRALE DELLA FUNZIONE $s(x) \le f(x)$ CHE ASSUME IL VALORE λ_{i-1} SULL'INSIEME MISURABILE $f^{-1}([\lambda_{i-1}, \lambda_i))$. QUINDI $\sup_{0 \le s \le f} \int_E s(x)\,dx$ È L'INTEGRALE INFERIORE DI f NEL SENSO DI LEBESGUE.

<u>INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:</u> $\int_E s(x)dx = |G|_{N+1} = |F|_{N+1}$ ESSENDO $G = \bigcup_{i=1}^{n} s^{-1}(\lambda_i) \times [0, \lambda_i)$ E $F = \bigcup_{i=1}^{n} s^{-1}(\lambda_i) \times [0, \lambda_i] \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

SE NE DEDUCE CHE $\int_E f(x)\,dx = |G| = |F|$ DOVE $G = \{(x,t) : x \in E,\ t \in [0, f(x))\}$ E $F = \{(x,t) : x \in E,\ t \in [0, f(x)]\}$.

DUE IMPORTANTI CONSEGUENZE DELL'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA.

$\boxed{A}$ SE $f: I \longrightarrow [0,+\infty)$ È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN, ALLORA LO È ANCHE SECONDO LEBESGUE E I DUE INTEGRALI HANNO LO STESSO VALORE (17/05 CONFRONTO FRA LE DUE MISURE).

$\boxed{B}$ TEOREMA DI BEPPO LEVI, ANCHE DETTO TEOREMA DELLA CONVERGENZA MONOTONA:

DATO UN INSIEME MISURABILE E E UNA SUCCESSIONE DI $f_m : E \to [0,+\infty)$ MISURABILI TALI CHE $f_m(x) \le f_{m+1}(x)$ PER OGNI n ED OGNI x (TRANNE EVENTUALMENTE UN SOTTOINSIEME E_0 DI MISURA NULLA) CONVERGENTI AD $f(x)$ ALLORA $\int_E f(x)\,dx = \lim_{m \to +\infty} \int_E f_m(x)\,dx$.

<u>DIMOSTRAZIONE:</u> $\int_E f(x)\,dx = |G|$ E $\int_E f_m(x)\,dx = |G_m|$ DOVE $G_m = \{(x,t) : x \in E,\ t \in [0, f_m(x))\}$ E LA TESI SEGUE DALL'UGUAGLIANZA $G = \bigcup_{m=1}^{+\infty} G_m$ PER LA CONTINUITÀ DELLA MISURA.

VE 26 MAG 2023

APPLICAZIONI: CALCOLIAMO $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ NEL SENSO DI LEBESGUE. PONIAMO $f_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[1,n]}(x)$

COSICCHÉ $\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^n f_n(x)\,dx =$

$= \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log n$. INOLTRE $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) =$

$= \frac{1}{x} = f(x)$ E $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ PER OGNI n

ED OGNI x, QUINDI $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{dx}{x}$

PER IL TEOREMA DI BEPPO LEVI, E IN CONCLUSIONE

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = +\infty.$$

CALCOLIAMO $\int_0^1 -\log x\,dx$ NEL SENSO DI LEBESGUE. PONIAMO $f_n(x) = -\log x\,\chi_{[\frac{1}{n},1]}(x)$

COSICCHÉ $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 -\log x\,dx =$

$$= \Big(1-\log x\Big)x\Big]_{\frac{1}{n}}^1 = 1-\left(1-\log\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

INOLTRE $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ PER OGNI n E PER OGNI x. ESSENDO $f_n(x) \longrightarrow f(x) = -\log x$,

PER IL TEOREMA DI BEPPO LEVI POSSIAMO SCRIVERE

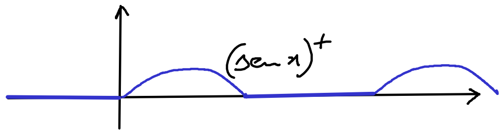
$$\int_0^1 -\log x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1.$$

③ DATO E MISURABILE E $f: E \to \mathbb{R}$ MISURABILE, CONSIDERIAMO $f^{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$

$$= \frac{|f(x)| \pm f(x)}{2}.$$

ESEMPIO: SE $f(x) = \operatorname{sen} x$

ALLORA $f^+(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{SE } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ 0, & \text{SE } x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi) \end{cases}$



OSSERVAZIONE: $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$

$f^+(x) - f^-(x) = f(x)$

DEFINIZIONE: ESCLUSO IL CASO $\int_E f^+(x)\,dx = \int_E f^-(x)\,dx = +\infty$, SI DEFINISCE

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx.$$

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO, DETTO ANCHE GENERALIZZATO, SULL'INTERVALLO $(0,+\infty)$ (E L'INTEGRALE VALE $\frac{\pi}{2}$) MA NON È INTEGRABILE SECONDO LEBESGUE PERCHÉ $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^+ dx$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^- dx = +\infty.$$

VE 26 MAG 2023

OSSERVAZIONE: SE $f : I \to [-\varepsilon, \varepsilon]$ CON $\varepsilon > 0$ ALLORA $f^{\pm} : I \to [0, \varepsilon]$ QUINDI $\int_I f^{\pm}(x)\,dx \leq \varepsilon \cdot |I|$ E RESTA DEFINITO

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f^+(x)\,dx - \int_I f^-(x)\,dx.$$

TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA:

DATO $E \subset \mathbb{R}^N$ MISURABILE E UNA SUCCESSIONE DI $f_n : E \to \mathbb{R}$ MISURABILI CONVERGENTI AD $f(x)$ PER OGNI $x \in E$ (ESCLUSO EVENTUALMENTE UN SOTTOINSIEME E_0 DI MISURA NULLA), SE ESISTE UNA MAGGIORANTE SOMMABILE, CIOÈ UNA $g : E \to [0, +\infty)$ MISURABILE E TALE CHE

$|f_n(x)| \leq g(x)$ PER OGNI x, $\int_E g(x)\,dx < +\infty$

ALLORA $|f(x)| \leq g(x)$ E $\int_E f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$

ESERCIZIO: SE $E = I$ E f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A $f \in C^0(I)$ ALLORA ESISTE UNA MAGGIORANTE SOMMABILE: TROVARLA.

ESERCIZIO: SUPPONIAMO CHE LE $f_n : I \to [-\varepsilon, \varepsilon]$ SIANO MISURABILI E CONVERGENTI PUNTUALMENTE A f. DIMOSTRARE CHE f È MISURABILE, INTEGRABILE, E $\int_I f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$

(TEOREMA DELLA CONVERGENZA LIMITATA).

LU 29 MAG 2023

APPLICAZIONE: VEDIAMO SE LA FUNZIONE $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\,dx$ È CONTINUA IN OGNI PUNTO $t_0 \in (0, +\infty)$. LA FUNZIONE $\Gamma(t)$ È BEN DEFINITA PER OGNI $t \in (0, +\infty)$: DAL FATTO CHE $e^{-\frac{x}{2}} x^{t-1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ SEGUE $e^{-\frac{x}{2}} x^{t-1} < 1$ PER $x \geq x_0$ OPPORTUNO, QUINDI $\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\,dx < \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx.$

INOLTRE SI DIMOSTRA PER INDUZIONE CHE $\Gamma(n+1) = n!$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$. BASE DELL'INDUZIONE: $n = 0$. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$. PASSO INDUTTIVO: SE $\Gamma(n) = (n-1)!$ PER UN $n \geq 1$ ALLORA

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n\,dx = \left. -e^{-x} x^n \right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1}\,dx = n\,\Gamma(n) = n!$$

VERIFICHIAMO CHE $\Gamma(t)$ È CONTINUA PER SUCCESSIONI NEL PUNTO $t = t_0 \in (0, +\infty)$: PRENDO UNA SUCCESSIONE $t_n \to t_0$ E VEDO SE $\Gamma(t_n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t_n - 1}\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t_0 - 1}\,dx.$

POSSIAMO RISPONDERE AFFERMATIVAMENTE SE TROVIAMO UNA MAGGIORANTE SOMMABILE. PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE SI HA $\frac{t_0}{2} < t_n < 2t_0$ PER $n \geq n_0$ QUINDI $f_n(x) = e^{-x} x^{t_n - 1} \leq g(x) =$

$$= \begin{cases} e^{-x} x^{\frac{t_0}{2}-1}, & \text{SE } x \in (0,1) \\ e^{-x} x^{2t_0 - 1}, & \text{SE } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

INOLTRE $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x} x^{\frac{t_0}{2}-1} dx +$

$$+ \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{2t_0-1} dx \leq \int_0^1 x^{\frac{t_0}{2}-1} dx +$$

$$+ \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{2t_0-1} dx \leq \left[\frac{2}{t_0} x^{\frac{t_0}{2}}\right]_0^1 +$$

+ UN INTEGRALE CONVERGENTE PERCHÉ $e^{-\frac{x}{2}} x^{2t_0-1}$ TENDE A ZERO PER $x \to +\infty$, QUINDI g È SOMMABILE E LA TESI SEGUE.

CON UN PROCEDIMENTO SIMILE SI PUÒ DERIVARE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE, CIOÈ SCRIVERE

$$\frac{d}{dt} \int_E f(x,t)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt.$$

SUPPONIAMO CHE ESISTA $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ E CALCOLIAMO LA DERIVATA AL PRIMO MEMBRO CON LA DEFINIZIONE SUCCESSIONALE DI LIMITE: PRESA UNA SUCCESSIONE $t_n \to t_0$ STUDIAMO IL LIMITE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n - t_0}\left(\int_E f(x,t_n)\,dx - \int_E f(x,t_0)\,dx\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\,dx$$

LU 29 MAG 2023

VOGLIAMO VERIFICARE CHE

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx$$

PER IPOTESI, $\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$,

QUINDI LA TESI SEGUE SE TROVIAMO UNA MAGGIORANTE SOMMABILE. SE ESISTE $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ PER $(x,t) \in R = E \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI LAGRANGE E SCRIVERE $\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n)$

CON UN OPPORTUNO $\xi_n \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. PERCIÒ BASTA TROVARE $g(x)$ SOMMABILE SU E E TALE CHE $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ PER OGNI $(x,t) \in R$.

ESEMPIO: IN $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ SI HA

$$f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} \quad \text{E} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = e^{-x} x^{t-1} \log x$$

QUINDI $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \begin{cases} -x^{\frac{t_0}{2}-1} \log x & \text{IN } (0,1) \\ e^{-x} x^{2t_0-1} \log x, & x \geq 1 \end{cases}$

ESERCIZI: 1) VERIFICARE CHE IL SECONDO MEMBRO È SOMMABILE; 2) TROVARE IL LIMITE

$$\lim_{t\to 0} \Gamma(t) = \lim_{t\to 0} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \quad \text{CON}$$

IL TEOREMA DI BEPPO LEVI.

RIDUZIONE DI UN INTEGRALE DOPPIO A DUE INTEGRALI SEMPLICI

TEOREMA DI TONELLI: DATI DUE INSIEMI MISURABILI $E \subset \mathbb{R}^N$ ED $F \subset \mathbb{R}^k$ ED UNA FUNZIONE $f : E \times F \to [0, +\infty)$ MISURABILE E NON NEGATIVA, ALLORA PER QUASI OGNI $x \in E$ LA FUNZIONE $F \ni y \mapsto f(x,y)$ È MISURABILE, E PER QUASI OGNI $y \in F$ LA FUNZIONE $E \ni x \mapsto f(x,y)$ È MISURABILE, E SUSSISTE L'UGUAGLIANZA

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,dx\,dy = \int_E \left(\int_F f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_F \left(\int_E f(x,y)\,dx \right) dy$$

INDIPENDENTEMENTE DAL FATTO CHE GLI INTEGRALI ABBIANO UN VALORE FINITO O INFINITO. È INTERESSANTE ANCHE IL CASO IN CUI $f \equiv 1$: LA TESI DIVENTA $|E \times F| = \int_E |F|\,dx$ E SE $|F| = \text{COST.} < +\infty$ SI PUÒ SCRIVERE

$$|E\times F| = |F| \int_E dx = |E| \cdot |F| \quad (\text{CFR. } 16/05).$$

OSSERVAZIONE: NELL'ENUNCIATO DI ENTRAMBI I TEOREMI SI AFFERMA CHE LA FUNZIONE CHE AD $x \in E$ ASSOCIA $f(x,y)$ È MISURABILE (SOMMABILE NEL SECONDO TEOREMA) PER QUASI OGNI VALORE DEL PARAMETRO $y \in F$: SIGNIFICA CHE I VALORI DEL PARAMETRO $y \in F$ IN CORRISPONDENZA DEI QUALI LA FUNZIONE $x \mapsto f(x,y)$ NON È MISURABILE COSTITUISCONO UN SOTTOINSIEME $F_0 \subset F$ DI MISURA k-DIMENSIONALE NULLA.

LU 29 MAG 2023

TEOREMA DI FUBINI: DATI DUE INSIEMI MISURABILI $E \subset \mathbb{R}^N$ ED $F \subset \mathbb{R}^k$ ED UNA FUNZIONE $f : E \times F \to \mathbb{R}$ MISURABILE E TALE CHE

$$\int_{E\times F} f^{\pm}(x,y)\,dx\,dy < +\infty$$

ALLORA PER QUASI OGNI $x \in E$ LA FUNZIONE $F \ni y \mapsto f(x,y)$ È SOMMABILE, E PER QUASI OGNI $y \in F$ LA FUNZIONE $E \ni x \mapsto f(x,y)$ È SOMMABILE, E SUSSISTE L'UGUAGLIANZA

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,dx\,dy = \int_E \left(\int_F f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_F \left(\int_E f(x,y)\,dx \right) dy$$

CHE SEGUE DAL TEOREMA DI TONELLI APPLICATO A $f^{\pm}$.

COME STABILIRE SE $\int_{E\times F} f^{\pm}(x,y)\,dx\,dy < +\infty$?

OSSERVIAMO CHE, ESSENDO $f^+ + f^- = |f|$ QUESTA IPOTESI EQUIVALE A

$$\int_{E\times F} |f(x,y)|\,dx\,dy < +\infty$$

E PUÒ ESSERE VERIFICATA IN QUANTO $\int_{E\times F} |f(x,y)|\,dx\,dy$

$$= \int_E \left(\int_F |f(x,y)|\,dy \right) dx \quad (\text{TONELLI}):$$

SE UNO DEI DUE INTEGRALI ITERATI CONVERGE ASSOLUTAMENTE, SI PUÒ SCAMBIARE L'ORDINE DI INTEGRAZIONE.