Esercizi primo Parziale di Geometria e Algebra - Parte 2

1) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\overrightarrow{u} = (5, -8, 6k)$ e $\overrightarrow{v} = (-k, -\frac{1}{4}, \frac{k}{2})$ risultino ortogonali.

2) Determinare i vettori $\overrightarrow{v}$ paralleli a $\overrightarrow{u} = (3, \sqrt{5}, 6)$ e tali che $\|\overrightarrow{v}\| = 5$

3) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il prodotto vettoriale tra $\overrightarrow{u} = (\sqrt{3}k, 2, 0)$ e $\overrightarrow{v} = (3, 0, \sqrt{3})$ è tale che $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = 7$.

4) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolare $3A - 2B$.

5) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

6) Dimostrare che il sistema lineare $\begin{cases} x + 4y - 2z = -3 \\ x + 2z = -4 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$ è incompatibile con il teorema di Rouchè Capelli.

7) Discutere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni (se è unica, se non esistono o se esistono ma infinite e al variare di quanti parametri) del sistema lineare $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$.
Posto $k = 2$, risolvere il sistema con l'algoritmo di Gauss Jordan.

8) Verificare se il sistema lineare $\begin{cases} 3x - 3y - z = 3 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ ha un'unica soluzione.
In caso affermativo, utilizzare il metodo di risoluzione di Cramer per trovare la soluzione.

9) Sia r la retta passante per il punto $P_0 = (1, -2)$ e con direzione $\overrightarrow{v} = (1, 1)$. Trovare l'equazione cartesiana che descrive r e determinare se è incidente con la retta s di equazione $x + 2y = 6$; in caso affermativo, trovare il punto di intersezione.

10) Sia r la retta nello spazio $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$. Verificare che sia parallela ma non contenuta nel piano passante per $P_0 = (2, 3, 1)$ e parallelo al piano τ definito dall'equazione $-x + y + z = 13$.

11) Determinare l'equazione del piano π passante per il punto $P_0 = (3, 0, -1)$ e definito dai vettori $\overrightarrow{u} = (1, -2, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (2, -1, 0)$.
Stabilire poi se il piano π ha punti in comune con la retta r di equazioni $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$.