

Esercizi primo Parziale di Geometria e Algebra

1) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\vec{u} = (3k, 8)$ e $\vec{v} = (2k, -3)$ risultino ortogonali.

Due vettori del piano \mathbb{R}^2 sono ortogonali se il prodotto scalare tra di essi è nullo. Utilizziamo questa condizione per impostare un'equazione nella variabile k :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3k, 8) \cdot (2k, -3) = 3k \cdot 2k + 8 \cdot (-3) = 6k^2 - 24$$

Quindi dobbiamo trovare i valori di k che rendono questa espressione del prodotto scalare uguale a zero:

$$6k^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow 6k^2 = 24 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$$

In definitiva, i vettori \vec{u} e \vec{v} sono ortogonali quando $k = 2$ e $k = -2$

2) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\vec{u} = (-\frac{14}{3}, -5, 4k)$ e $\vec{v} = (\frac{3}{2}k, -1, \frac{k}{2})$ risultino ortogonali.

Per esprimere l'ortogonalità tra due vettori di \mathbb{R}^3 , dobbiamo calcolare il prodotto scalare e controllare quando è uguale a 0. Nel nostro caso, imponiamo che il prodotto scalare tra \vec{u} e \vec{v} sia uguale a 0 e definiamo per quali $k \in \mathbb{R}$ vale questa condizione:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-\frac{14}{3}, -5, 4k) \cdot (\frac{3}{2}k, -1, \frac{k}{2}) = -\frac{14}{3} \cdot \frac{3}{2}k + (-5) \cdot (-1) + 4k \cdot \frac{k}{2} = -7k + 5 + 2k^2$$

Chiedere che questa espressione sia uguale a zero equivale a individuare i valori di k che risolvono l'equazione di secondo grado $2k^2 - 7k + 5 = 0$:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Dunque i valori ricercati sono $k = \frac{5}{2}$ e $k = 1$.

3) Determinare il vettore \vec{v} parallelo a $\vec{u} = (5, \sqrt{2}, 3)$ e tale che $\|\vec{v}\| = 3$. Il vettore \vec{v} è parallelo al vettore \vec{u} se esiste un certo scalare $k \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{v} = k\vec{u}$; più precisamente:

$$\vec{v} = k\vec{u} = k(5, \sqrt{2}, 3) = (5k, \sqrt{2}k, 3k)$$

Dunque un vettore parallelo a \vec{u} è della forma $(5k, \sqrt{2}k, 3k)$; per individuare i valori di k che definiscono il nostro vettore, dobbiamo utilizzare l'altra condizione sul valore della norma di \vec{v} :

$$3 = \|\vec{v}\| = \|(5k, \sqrt{2}k, 3k)\| = \sqrt{(5k)^2 + (\sqrt{2}k)^2 + (3k)^2} = \sqrt{25k^2 + 2k^2 + 9k^2} = \sqrt{36k^2}$$

Per risolvere questa equazione, eleviamo al quadrato primo e ultimo membro della catena di uguaglianze:

$$3 = \sqrt{36k^2} \Leftrightarrow 9 = 36k^2 \Leftrightarrow k^2 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{2}$$

Perciò il vettore \vec{v} ricercato può avere la forma $\vec{v} = (\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2})$ oppure $\vec{v} = (-\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2})$. Il fatto di avere due possibili soluzioni per il vettore \vec{v} non ci deve però sorprendere: infatti $(-\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2})$ è il vettore opposto a $(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2})$, e vettori opposti sono paralleli. Perciò se \vec{v} è parallelo a \vec{u} , lo sarà anche il suo vettore opposto $-\vec{v}$.

4) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il prodotto vettoriale tra $\vec{u} = (1, k, 0)$ e $\vec{v} = (0, -3, 2)$ è tale che $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 4$.

Innanzitutto, ci serve l'espressione del prodotto vettoriale tra i vettori $\vec{u} = (1, k, 0)$ e $\vec{v} = (0, -3, 2)$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & k & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} k & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \\ & \hat{i}(2k) - \hat{j}(2) + \hat{k}(-3) = (2k, -2, -3) \end{aligned}$$

Per definire i valori di k che soddisfano la richiesta dell'esercizio, calcoliamo la norma del vettore ottenuto e imponiamo che sia uguale a 4:

$$3 = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|(2k, -2, -3)\| = \sqrt{(2k)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4k^2 + 4 + 9} = \sqrt{4k^2 + 13}$$

Per risolvere questa equazione con la radice, facciamo il quadrato dei membri che stanno agli estremi della serie di uguaglianze:

$$4 = \sqrt{4k^2 + 13} \Leftrightarrow 16 = 4k^2 + 13 \Leftrightarrow 4k^2 = 3 \Leftrightarrow 4k^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dunque i valori di k cercati sono $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $2A + B$.

6) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $A \cdot B$.

7) Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

8) Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

9) Utilizzare il metodo di Gauss Jordan per risolvere il sistema lineare $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 3z = -2 \end{cases}$

10) Verificare se il sistema lineare $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y - z = -3 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ ha un'unica soluzione.

In caso affermativo, utilizzare il metodo di risoluzione di Cramer per trovare la soluzione.

Dato che il sistema è quadrato (il numero delle incognite, tre, coincide con il numero delle equazioni), per capire se esiste un'unica soluzione basta verificare

che la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango massimo, ovvero 3.

Per comprendere quindi se ha rango massimo, calcoliamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Sommo alla terza colonna la seconda colonna} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Sviluppo sulla terza colonna}$$

Dato che il determinante è diverso da zero, allora il rango di A è 3, dunque il suo rango è massimo.

Dopo aver scoperto che questo sistema ha un'unica soluzione, andiamo a ricavare i valori di x , y e z che risolvono il sistema attraverso il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{Sommo alla terza colonna la seconda colonna} \Rightarrow \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-6} \Rightarrow$$

$$\text{Sviluppo sulla terza colonna} \Rightarrow \frac{-2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-2(6-3)}{-6} = \frac{-2 \cdot 3}{-6} = 1;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{Sviluppo sulla terza riga} \Rightarrow \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-6} =$$

$$\frac{-6 - (-3) - (-3 - 2 \cdot 6)}{-6} = \frac{-6 + 3 - (-3 - 12)}{-6} = \frac{-3 + 15}{-6} = \frac{12}{-6} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -0 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{Sommo alla prima colonna la seconda colonna} \Rightarrow \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} \Rightarrow$$

$$\text{Sviluppo sulla prima colonna} \Rightarrow \frac{-3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3(0 - (-6))}{-6} = \frac{-3 \cdot 6}{-6} = 3;$$

Dunque l'unica soluzione del sistema è $(1, -2, 3)$.

11) Dimostrare che il sistema lineare $\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 5y - 4z = 2 \end{cases}$ è incompatibile con

il teorema di Rouchè Capelli.

Il teorema di Rouchè Capelli afferma che se il rango della matrice dei coefficienti del sistema lineare non coincide con quello della matrice completa, il sistema è incompatibile. Nel nostro caso, la matrice completa è $(A|b) =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

Verifichiamo prima qual è il rango di A . Dato che al suo interno la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ha determinante $-2 - (-1) = -1 \neq 0$, quantomeno il rango di A . Per verificare se ha rango 3, calcoliamo il suo determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Sommo alla prima riga la terza riga} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{Sviluppo nella terza colonna} \Rightarrow -4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \cdot (3 \cdot (-2) - (-6)) = -4 \cdot (-6 + 6) = 0$$

Dato che il determinante si annulla, il rango non può essere 3; dunque la matrice A ha rango 2.

Non ci resta che verificare che il rango della matrice completa è 3: cerchiamo una sottomatrice di ordine 3 che abbiamo determinante diverso da zero. Controlliamo la sottomatrice formata dalle prime due colonne e dall'ultima:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Sottraggo alla prima colonna la terza colonna} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{Sviluppo sulla prima colonna} \Rightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - (-5) = -4 + 5 = 1 \neq 0$$

Abbiamo così trovato una sottomatrice della matrice $(A|b)$ con determinante diverso da zero: quindi la matrice completa ha rango 3.

Dal teorema di Rouchè Capelli possiamo allora affermare che il sistema è incompatibile, avendo la matrice A e $(A|b)$ ranghi diversi.

12) Discutere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\text{lineare } \begin{cases} kx + y - z = 0 \\ x + ky - z = 2 \\ (k+1)x + 3y - 2z = 2 \end{cases} . \text{ Posto } k = 0, \text{ risolvere il sistema.}$$

13) Sia r la retta passante per i punti $A = (3, 4)$ e $B = (2, 2)$. Determinare se è incidente con la retta s di equazione $4x + y = 3$ e, in caso affermativo, trovare il punto di intersezione.

14) Sia r la retta passante per $P_0 = (1, 2)$ e parallela a una retta di equazione $3x - y = 5$. Trovare l'equazione cartesiana della retta r .

Discutere al variare del parametro k l'intersezione tra la retta r e la retta s di equazione $6x - 2y = k$.

Se la retta r è parallela a un'altra retta, vuol dire che non solo condividono la stessa direzione, ma hanno la stessa direzione normale; per trovare la direzione normale della retta $3x - y = 5$, bisogna prendere seguendo l'ordine i coefficienti delle variabili all'interno dell'equazione: dunque avremmo come direzione perpendicolare $\vec{n} = (3, -1)$.

Perciò \vec{n} risulta essere anche la direzione perpendicolare alla retta r ; conoscendo anche un suo punto, ovvero $P_0 = (1, 2)$, possiamo ricavarci l'equazione cartesiana della retta:

$$\vec{n} \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (3, -1) \cdot (x - 1, y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 - y + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - y = 1$$

Notiamo che l'equazione cartesiana della retta r ha gli stessi coefficienti nelle variabili x e y come l'equazione della retta parallela: ciò non ci deve sorprendere, dato che se due rette parallele condividono la stessa direzione, hanno la stessa direzione ortogonale.

15) Sia π il piano passante per il punto $P_0 = (0, 1, 1)$ e definita dai vettori $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 3, 1)$. Determinare l'equazione cartesiana di π .

Verificare che π e il piano τ di equazione $4x + 2y - 10z = 1$ sono paralleli ma non coincidenti.

16) Sia r la retta nello spazio di equazioni $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$. Verificare che

la retta r non ha punti in comune con il piano passante per $P_0 = (3, 2, -1)$ e con direzione normale $\vec{n} = (2, 1, 5)$.