

Rette e piani

1) Determinare la retta r passante per il punto $A = (1, 0)$ e ortogonale alla retta s di equazione $3x - 2y = 6$.

Per individuare le equazioni di r , dobbiamo studiare come è fatta la retta s : la sua equazione è $3x - 2y = 6$, per cui i coefficienti delle variabili formeranno le coordinate della direzione perpendicolare rispetto ad s : la direzione sarà allora $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = (3, -2)$. A questo punto abbiamo due strade:

- dato che r è ortogonale a s , allora la sua direzione sarà proprio $\vec{n} = (3, -2)$. Possiamo allora scrivere le equazioni parametriche della retta:

$$\begin{cases} x = x_A + t\vec{n}_1 = 1 + 3t \\ y = y_A + t\vec{n}_2 = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \text{ Per ricavare la cartesiana dalle equazioni}$$

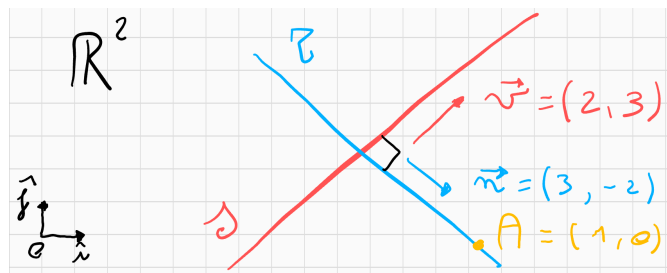
parametriche, si può esprimere il parametro t in funzione di una delle due variabili; in questo caso, conviene esprimere t in funzione di y :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \Rightarrow t = -\frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \left(-\frac{y}{2}\right) \\ t = -\frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{2}y$$

- dato che r e s sono ortogonali, vuol dire che le loro direzioni sono ortogonali; in particolare, la direzione di s rappresenta la direzione normale di r . Come trovare allora la direzione di s ? In generale, sul piano cartesiano \mathbb{R}^2 , se abbiamo una direzione di coordinate (l, m) , per ottenere una direzione ortogonale basta scambiare l'ordine di coordinate e poi cambiare segno, quindi $(-m, l)$. Nel nostro caso, avendo $\vec{n} = (3, -2)$, la sua direzione perpendicolare è $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (2, 3)$. Avendo finalmente ricavato la direzione perpendicolare di r , si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana nel seguente modo:

$$\vec{v}_1(x - x_A) + \vec{v}_2(y - y_A) = 0 \Rightarrow 2(x - 1) + 3(y - 0) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + 3y = 0$$

Confrontando le due equazioni cartesiane ottenute si nota che esse rappresentano i punti della stessa retta.



2) Determinare il piano π passante per i punti $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 1, 2)$ e $C = (-1, 2, -1)$.

Bisogna trovare due vettori all'interno del piano per poter determinate le sue equazioni; definiamo due vettori applicati che collegano due coppie dei punti A , B e C :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2-1, 1-0, 2-(-1)) = (1, 1, 3); \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1-1, 2-0, -1-(-1)) = (-2, 2, 0)$$

Notiamo che sono due vettori non proporzionali, quindi effettivamente possono determinare il nostro piano.

Possiamo adesso scegliere due strade:

- utilizzando \vec{u} e \vec{v} , possiamo esprimere le equazioni parametriche; ci basta scegliere solamente un punto in cui passa il piano:

$$\begin{cases} x = x_A + t\vec{u}_1 + s\vec{v}_1 = 1 + t - 2s \\ y = y_A + t\vec{u}_2 + s\vec{v}_2 = t + 2s \\ z = z_A + t\vec{u}_3 + s\vec{v}_3 = -1 + 3t \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad \text{Per ricavare l'equazione}$$

cartesiana, possiamo sostituire i parametri t e s cercando di esprimerli in funzione delle altre variabili; possiamo utilizzare tutti gli strumenti di risoluzione relativi ai sistemi lineari:

$$\begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = t + 2s \\ z = -1 + 3t \end{cases} \Rightarrow \text{Sommo la seconda equazione alla prima} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2t \\ y = t + 2s \\ 3t = z + 1 \Rightarrow t = \frac{z+1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x + y = 1 + 2\left(\frac{z+1}{3}\right) \Rightarrow x + y - \frac{2}{3}z = \frac{4}{3}$$

- per esprimere immediatamente l'equazione cartesiana di π , è necessaria una direzione normale al piano; per individuare questa direzione, possiamo fare il prodotto vettoriale tra \vec{u} e \vec{v} :

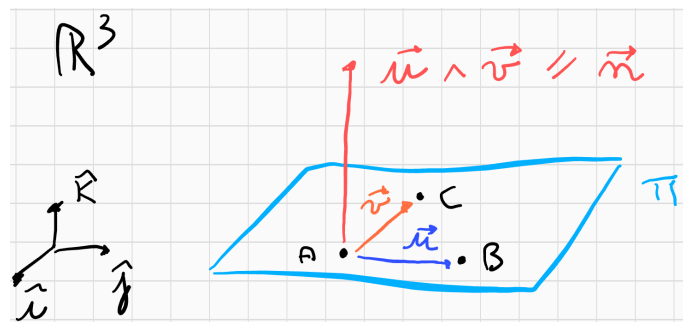
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i}(-6) - \hat{j}(-(-6)) + \hat{k}(2 - (-2)) = (-6, -6, 4)$$

Possiamo adesso sfruttare la formula per ricavare immediatamente l'equazione cartesiana del piano. Bisogna scegliere quale punto di passaggio utilizzare: prendiamo $A = (1, 0, -1)$:

$$-6(x-1) - 6(y-0) + 4(z-(-1)) = 0 \Rightarrow -6x + 6 - 6y + 4z + 4 = 0 \Rightarrow -6x - 6y + 4z = -10$$

Confrontando le due equazioni, si noterà che rappresentano due equazioni equivalenti che rappresentano lo stesso piano.



3) Determinare la retta r passante per $P_0 = (1, 2, 3)$ e ortogonale al piano π $x + y + z = 5$.

Una retta è ortogonale ad un piano solamente se la sua direzione coincide (o comunque è proporzionale) alla normale del piano; per sfruttare questa condizione, bisogna prima di tutto trovare la normale del piano π . Attraverso l'equazione che descrive il piano, è possibile individuare la direzione della normale prendendo in ordine i coefficienti delle incognite x , y e z : la normale allora sarà $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

A questo punto abbiamo il punto P_0 in cui la retta passa e la sua direzione, ovvero $\vec{n} = (1, 1, 1)$; utilizziamo queste condizioni per trovare le equazioni parametriche:

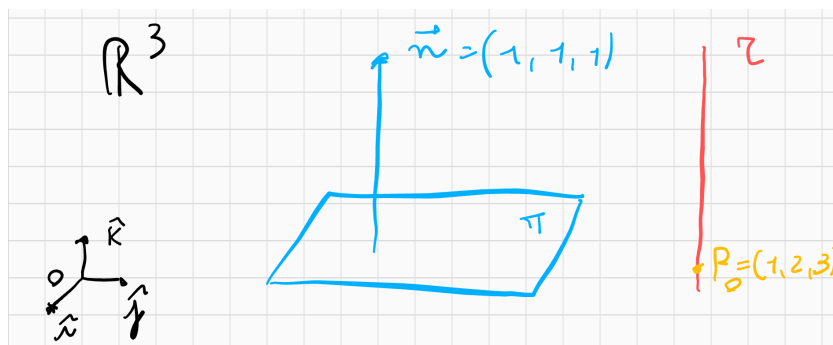
$$\begin{cases} x = x_0 + t\vec{n}_1 = 1 + t \\ y = y_0 + t\vec{n}_2 = 2 + t \\ z = z_0 + t\vec{n}_3 = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si può adesso ricavare anche le equazioni cartesiane:

basta esprimere il parametro t in funzione delle altre due incognite e sostituire nelle altre due equazioni. Proviamo ad esprimerlo in funzione di x :

$$\begin{cases} x = 1 + t \Rightarrow t = x - 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x - 1 \\ y = 2 + x - 1 \\ z = 3 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

Ricordiamo che la retta nello spazio \mathbb{R}^3 nasce come intersezione di due piani definiti dalle equazioni all'interno dell'espressione cartesiana; ovviamente i due piani non devono essere paralleli per dare vita a una retta. Dalle equazioni dei due piani notiamo che le direzioni normali sono $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$: non essendo paralleli (poichè non proporzionali), allora anche i piani non sono paralleli, coerentemente con i ragionamenti fatti in precedenza.

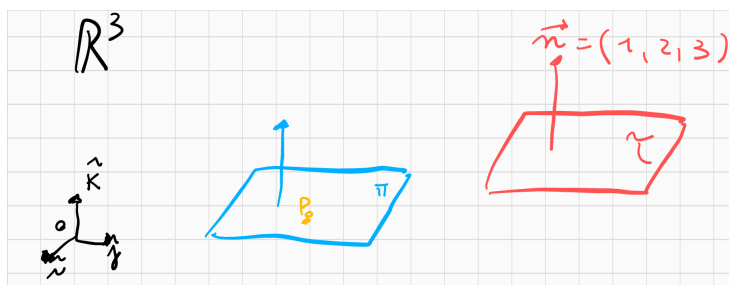


4) Individuare il piano π passante in $P_0 = (0, 1, 2)$ è parallelo al piano τ di equazione $x + 2y + 3z = 7$.

Due piani sono paralleli solamente se condividono la stessa direzione normale; per comprendere quali sono le coordinate della normale di π , dobbiamo ricavare la normale di τ . Dall'equazione che descrive il piano τ dobbiamo prendere i coefficienti delle tre variabili seguendo l'ordine: la direzione normale allora è $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

A questo punto, possiamo ricavare l'equazione cartesiana del piano π , dato che conosciamo un suo punto e la sua direzione normale:

$$1(x - 0) + 2(y - 1) + 3(z - 2) = 0 \Rightarrow x + 2y - 2 + 3z - 6 = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z = 8.$$

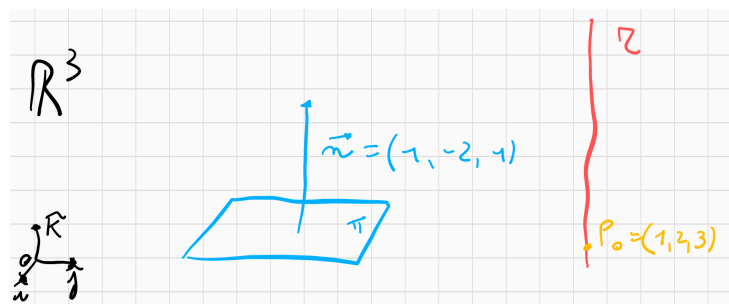


5a) Determinare la retta r passante in $P_0 = (1, 2, 3)$ e ortogonale al piano π di equazione $x - 2y + z = 35245$.

Se la retta è ortogonale al piano, vuol dire che la sua direzione coincide con la normale di π : è necessario trovare questa direzione.

Osservando l'equazione del piano e prendendo i coefficienti delle tre variabili, vediamo che la direzione normale è $\vec{n} = (1, -2, 1)$; perciò la retta r avrà come equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\vec{n}_1 = 1 + t \\ y = y_0 + t\vec{n}_2 = 2 - 2t \\ z = z_0 + t\vec{n}_3 = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$



5b) Sia s la retta passante per i punti $Q = (3, 1, 3)$ e $R = (3, 0, k)$, con k parametro reale. Per quali valori del parametro k le rette r e s sono ortogonali? Esiste un valore di k per cui le rette risultino parallele?

Per confrontare le condizioni di ortogonalità e parallelismo tra due rette, è necessario studiare le loro direzioni; della retta r la conosciamo già, ovvero $\vec{n} = (1, -2, 1)$. Dobbiamo ricavare quella di s : ma dato che conosciamo due punti in cui passa, la sua direzione sarà il vettore applicato che li congiunge. Calcoliamo le coordinate del vettore:

$$\vec{v} = \overrightarrow{QR} = (3 - 3, 0 - 1, k - 3) = (0, -1, k - 3).$$

Una volta individuate le due direzioni, possiamo studiare il loro rapporto:

- r e s sono ortogonali $\Leftrightarrow \vec{n}$ e \vec{v} sono ortogonali $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$;
 $(1, -2, 1) \cdot (0, -1, k - 3) = 0 \Leftrightarrow 0 - 2 \cdot (-1) + k - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 + k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.
- r e s sono paralleli $\Leftrightarrow \vec{n}$ e \vec{v} sono paralleli $\Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow$ esiste $c \in \mathbb{R}$ diverso da 0 tale che $c\vec{n} = \vec{v}$

$$(0, -1, k - 3) = c(1, -2, 1) = (c, -2c, c) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -2c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \\ k - 3 = c \end{cases}$$

Si vede subito che non esiste nessun valore di k che renda vero il sistema, perciò le due rette non possono essere mai parallele.

6) Sia r la retta passante per $A = (0, 1, 2)$ e $B = (1, 3, 5)$ e s la retta passante per $C = (0, 2, 3)$ e $D = (6, 2, 1)$. Verificare se le due rette sono ortogonali.

Per verificare l'ortogonalità delle due rette, bisogna controllare se le loro direzioni sono perpendicolari; conoscendo per ciascuna di essa due punti in cui passano, possiamo ricavare le direzioni con i vettori applicati tra punti:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1 - 0, 3 - 1, 5 - 2) = (1, 2, 3);$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{CD} = (6 - 0, 2 - 2, 1 - 3) = (6, 0, -2).$$

Le due rette saranno ortogonali solamente se il prodotto scalare tra le loro direzioni è nullo:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (1, 2, 3) \cdot (6, 0, -2) = 6 + 0 \cdot 3 + (-2) = 6 - 2 = 4 \neq 0$$

Concludiamo che effettivamente r e s sono ortogonali.

7) Determinare la posizione nel piano \mathbb{R}^2 delle rette r di equazione $x + ky = 2$ e s rappresentata dall'equazione $2x - ky = k$ al variare del parametro reale k .

Per comprendere il rapporto tra le due rette al variare del parametro k , bisogna studiare la loro intersezione; impostiamo un sistema lineare contenente le loro equazioni, così potremmo capire quali punti hanno in comune:

$\begin{cases} x + ky = 2 \\ 2x - ky = k \end{cases}$. L'esercizio allora si traduce nello studio delle soluzioni di un sistema di due equazioni in due incognite.

La matrice completa del sistema è $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 2 \\ 2 & -k & k \end{array} \right)$. Individuiamo i ranghi della matrice A e della matrice completa, così attraverso il teorema di Rouchè Capelli potremmo individuare com'è fatto l'insieme delle soluzioni del

sistema.

Cominciamo con l'individuare i valori per cui A ha rango massimo; calcoliamo il determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & -k \end{vmatrix} = -k - 2k = -3k$. Questo determinante sarà nullo solamente se $k = 0$; in tutti gli altri casi, A avrà rango massimo e quindi il sistema un'unica soluzione: rappresenterà allora il punto d'incidenza tra le rette.

Proviamo a calcolarlo con $k = 1$; in questo modo la matrice completa diventa

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Utilizziamo il metodo di Gauss Jordan per semplificare la risoluzione:

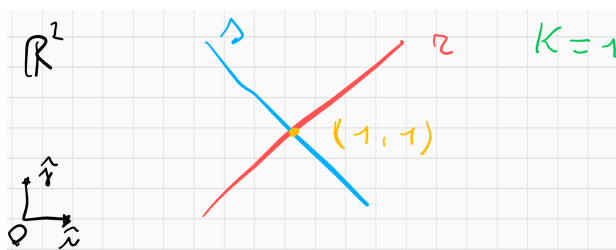
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Primo elemento della prima riga: } 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$R_2 \rightsquigarrow R_2 - 2R_1 = R_2 - 2R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{array} \right)$$

In questo modo il sistema è semplice da risolvere: basta ricavare y dall'ultima equazione e sostituire il valore nella prima equazione:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -3y = -3 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Perciò nel caso $k = 1$ le rette r e s sono incidenti nel punto $(1, 1)$



Vediamo adesso cosa accade quando $k = 0$; per prima cosa, la matrice completa

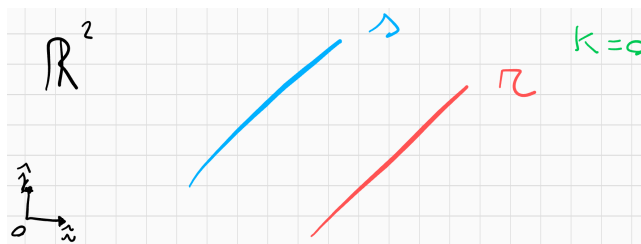
diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Ovviamente la matrice A avrà solamente rango

1; bisogna calcolare qual è il rango di $(A|b)$ per poi utilizzare Rouchè Capelli.

Si può cercare una sottomatrice di ordine 2 all'interno della matrice completa con determinante diverso da zero (prendere ad esempio prima e terza colonna).

In questa situazione però è facilmente intuibile che le due righe rappresentano due vettori non proporzionali: dunque la matrice completa ha due righe linearmente indipendenti, per cui il suo rango è 2.

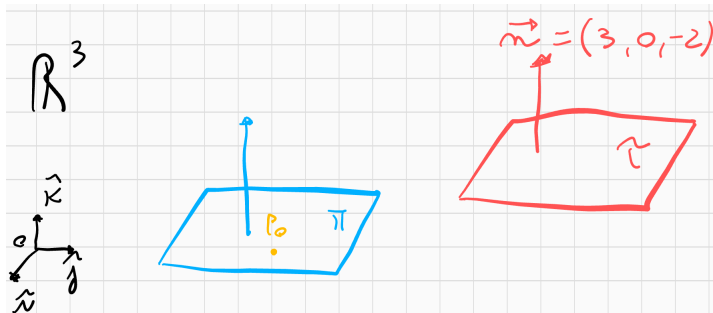
Dal teorema di Rouchè Capelli, dato che i due ranghi non coincidono, possiamo affermare che il sistema è incompatibile: ciò significa che r e s non hanno punti in comuni, quindi rappresentano due rette parallele.



8a) Trovare l'equazione cartesiana del piano π passante in $P_0 = (2, 1, 1)$ e parallelo al piano τ di equazione $3x - 2z = 0$.

Due piani paralleli condividono la stessa normale: troviamo la normale di τ dalla sua equazione e avremo la direzione perpendicolare a π .
Prendendo i coefficienti dell'equazione, la normale ha coordinate $\vec{n} = (3, 0, -2)$.
Possiamo adesso ottenere l'equazione cartesiana di π grazie al suo punto P_0 e alla sua normale:

$$3(x - 2) + 0(y - 1) - 2(z - 1) = 0 \Rightarrow 3x - 6 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow 3x - 2z = 4$$



8b) Studiare la posizione del piano π con la retta r di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$.
Nel caso siano incidenti, trovare il punto di incidenza.

Per comprendere il rapporto tra retta e piano, conviene cercare i punti che hanno in comune; inseriamo le loro equazioni in un sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2z = 4 \\ x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{Così facendo, possiamo utilizzare tutte le nostre conoscenze sui}$$

sistemi lineari per capire quali sono i punti in comune di π e r .

Essendo un sistema di 3 equazioni in tre incognite, cerchiamo di capire se la matrice A ha rango massimo calcolando il determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Sviluppo sulla seconda colonna} \Rightarrow -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - (-2)) = -(-3 + 2) = 1 \neq 0$$

Dato che il determinante di A è diverso da zero, la matrice avrà rango massimo 3: il sistema allora avrà una sola soluzione, che rappresenta il punto di intersezione tra π e r .

Per ricavarlo, abbiamo varie scelte; proviamo col metodo di risoluzione di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{Sviluppo con Laplace nella prima colonna} \Rightarrow \frac{4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 4(1 - 0) = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{Sviluppo con Laplace nella seconda colonna} \Rightarrow \frac{-4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -4(-1 - 0) = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{Sviluppo con Laplace nella terza colonna} \Rightarrow \frac{4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 4(0 - (-1)) = 4$$

Perciò il punto di incidenza tra la retta r e π avrà coordinate $(4, 4, 4)$.

