Sistemi Lineari con Rouchè Capelli

1) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=0 \\ kx-2y=4 \end{cases}$

Il sistema è formato da 3 equazioni in due incognite; la sua matrice completa è rappresentata da: $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ k & -2 & 4 \end{array}\right)$. Studiamo prima il rango della matrice dei coefficienti A:

Sottomatrice formata dalle prime due righe e le prime due colonne di $A: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 1\cdot 2 = -1-2 = -3 \neq 0$

Il rango della matrice ha allora è $\rho(A) = 2$ per ogni valore del parametro $k \in \mathbb{R}$. Calcoliamo ora il rango della matrice completa: essa avrà rango uguale a 3 solamente se il suo determinante è diverso da 0:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ k & -2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sviluppo con Laplace nella terza colonna $\Rightarrow$

$1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & -2 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-(-k)+4\cdot(-1-2) = -2+k-12 = k-14$

Perciò $\det(A|b) = 0 \Leftrightarrow k-14=0 \Leftrightarrow k=14$. Abbiamo allora trovato i seguenti casi:

- $k \neq 14 \Rightarrow \rho(A|b) = 3$; dato che $\rho(A) = 2$ per ogni valore di k, concludiamo che in questo caso il sistema è incompatibile.
- $k = 14 \Rightarrow$ il rango di $A|b$ non è 3, ma è 2 (la matrice completa contiene comunque la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ che ha determinante diverso da 0). Quante soluzioni abbiamo? Dal teorema di Rouchè Capelli, sappiamo che il numero di soluzioni sono $\infty^{\text{n° incognite } -\rho(A)} = \infty^{2-2} = \infty^0$, ovvero otteniamo una sola soluzione: ciò vuol dire che risolvendo il sistema, da due equazioni otterremo i valori di x e y, mentre nell'ultima apparirà una identità:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=0 \\ kx-2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x=y \\ 14x-2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y+2y=1 \\ 14y-2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ 3y=1 \\ 12y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=y \\ \\ y=\dfrac{1}{3} \\ \\ 12y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ \\ y=\dfrac{1}{3} \\ \\ 12\cdot\dfrac{1}{3}=4 \Rightarrow 4=4 \text{ (identità)} \end{cases}$$

Concludiamo allora che l'unica soluzione del sistema è $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

2) $\begin{cases} 3kx+3y=3 \\ 4x+ky=2 \end{cases}$

Il sistema è formato da 2 equazioni in due incognite; la sua matrice completa è rappresentata da: $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3k & 3 & 3 \\ 4 & k & 2 \end{array}\right)$. Studiamo prima il rango della matrice dei coefficienti A: essendo una matrice 2×2, avrà rango massimo 2 solamente quando il suo determinante è zero:
$\begin{vmatrix} 3k & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 3k\cdot k - 4\cdot 3 = 3k^2-12$. Allora il suo determinate è uguale a zero se $3k^2-12=0 \Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=\pm 2$. Abbiamo scoperto quindi che, se $k\neq\pm 2$, il dterminante è diverso da 0, e quindi la matrice A ha rango massimo. La soluzione sarà unica: per trovarla, si possono utilizzare vari metodi, come Gauss Jordan o Cramer.
Possiamo risolvere il sistema attraverso il metodo di Cramer per qualsiasi $k\neq\pm 2$ e lasciare la soluzione in funzione di k; per comodità, vediamo cosa succede quando $k=1$: il sistema avrà come matrice completa $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$
Otterremo innanzitutto $\det(A) = 3k^2-12 \Rightarrow \det(A) = -9$;

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3-2\cdot 3}{9} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3};\ y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3\cdot 2-3\cdot 4}{-9} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3};$$

perciò l'unica soluzione per $k=1$ abbiamo come unica soluzione $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.
Ora studiamo singolarmente i due casi $k=2$ e $k=-2$. In entrambi i casi, la matrice A avrà rango 1. Per definire l'insieme delle soluzioni, dobbiamo passare per il rango di $(A|b)$:

- $k=2 \Rightarrow$ la matrice diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$. Per studiare il rango di $(A|b)$, si possono calcolare i determinanti delle varie sottomatrici 2×2; in questo caso però, dato che abbiamo solo due righe, possiamo controllare se le righe sono linearmente indipendenti, ovvero se una non è proporzionale all'altra. Si può vedere però che $\frac{3}{2}\cdot(4,2,2) =$

$(\frac{3}{2} \cdot 4, \frac{3}{2} \cdot 2, \frac{3}{2} \cdot 2) = (6, 3, 3)$, e quindi effettivamente le due righe sono proporzionali, quindi linearmente dipendenti. Se non si intuisce immediatamente lo scalare che rende proporzionali le due righe, si può impostare il problema nel seguente modo: esiste un fattore di proporzionalità $t \in \mathbb{R}$ tale che $(6, 3, 3) = t \cdot (4, 2, 2) = (4t, 2t, 2t)$? Questo può accadere solamente se $\begin{cases} 6 = 4t \\ 3 = 2t \\ 3 = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$ che è lo scalare esibito all'inizio del ragionamento.
Dunque $\rho(A|b) = 1$ e, per il teorema di Rouchè Capelli, dato che i ranghi di A e $(A|b)$ coincidono, avremo ∞^1 soluzioni; quindi, ricavando la y dalla prima equazione,

$$\begin{cases} 6x + 3y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6x + 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ 4x + 2(-2x + 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ 4x + -4x + 2 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \text{ (identità)} \end{cases}$$

Le soluzioni sono le coppie (x, y) tali che $y = -2t + 1$, con t che varia in $\mathbb{R}$.

- $k = -2 \Rightarrow$ la matrice diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{array}\right)$. Stavolta calcoliamo il rango di $(A|b)$ con il determinante delle sottomatrci di ordine 2. Notiamo subito che $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-2 \cdot 3) = 6 + 6 = 12 \neq 0$, perciò $(A|b)$ contiene una sottomatrice di ordine 2 con determinante diverso da 0, quindi $\rho(A|b) = 2$.
Per Rouchè Capelli, dato che $\rho(A)$ $neq\rho(A|b)$, il sistema è incompatibile

Riassumendo i risultati ottenuti:

- $k \neq \pm 2 \Rightarrow A$ ha rango massimo e ci sarà un'unica soluzione;
- $k = 2 \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni della forma $y = -2t + 1$, $t \in \mathbb{R}$;
- $k = -2 \Rightarrow$ il sistema è incompatibile.

3) $\begin{cases} -kx + (k-1)y + z = 1 \\ (k-1)y + kz = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$

Sistema di 3 equazioni e 3 incognite; la matrice che lo rappresenta è
$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -k & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$. Ricaviamo il determinante della matrice A

per capire se ha rango massimo 3:
$\begin{vmatrix} -k & k-1 & 1 \\ 0 & k-1 & k \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sviluppo con Laplace nella prima colonna $\Rightarrow$

$-k \cdot \begin{vmatrix} k-1 & k \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ k-1 & k \end{vmatrix} = -k \cdot (k-1) + 2 \cdot ((k-1) \cdot k - (k-1)) =$
$-k^2 + k + 2 \cdot (k^2 - k - k + 1) = -k^2 + k + 2k^2 - 2k - 2k + 2 = k^2 - 3k + 2$
Per capire dove si annulla il determinante, dobbiamo trovare le soluzioni di $k^2 - 3k + 2 = 0$; procediamo col calcolo del discriminante:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2) = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Perciò il polinomio si annulla in $k = 1$ e $k = 2$ A questo risultato saremmo potuti arrivare attraverso le proprietà del determinante: se sommo una riga o una colonna ad un'altra riga o colonna, il determinante non varia; ad esempio:
$\begin{vmatrix} -k & k-1 & 1 \\ 0 & k-1 & k \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sottraggo la seconda riga alla prima riga $\Rightarrow \begin{vmatrix} -k & 0 & 1-k \\ 0 & k-1 & k \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$
Sviluppo con Laplace nella seconda colonna $\Rightarrow (k-1) \cdot \begin{vmatrix} -k & 1-k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$
$(k-1)(-k - 2 \cdot (1-k)) = (k-1)(-k - 2 + 2k) = (k-1)(k-2)$.
Qual è il vantaggio di questo metodo? Che il polinomio che rappresenta il polinomio è già decomposto rispetto alle sue radici: infatti, si vede subito che si annulla per $k = 1$ e $k = 2$.
In definitiva, per $k \neq 1, 2$, il determinante non si annulla e perciò A ha rango massimo: dal teorema di Rouchè Capelli, ciò vuol dire che ammette un'unica soluzione. Proviamo a ricavare la soluzione per $k = -2$ attraverso l'algoritmo di Gauss Jordan:
$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$ Primo elemento della prima riga: $2 \neq 0 \Rightarrow$
$\begin{cases} R_2 \rightsquigarrow R_2 - \dfrac{0}{2} R_1 = R_2 \\ R_3 \rightsquigarrow R_3 - \dfrac{2}{2} R_1 = R_3 - R_1 \end{cases} \Rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$
Secondo elemento della seconda riga: $-3 \neq 0 \Rightarrow$
$R_3 \rightsquigarrow R_3 - \dfrac{3}{-3} R_2 = R_3 + R_2 \Rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)$
In questo modo abbiamo ottenuto una matrice a gradini che ci permette di risolvere il sistema sostituendo a cascata, partendo dall'ultima equazione:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ -3y-2z=1 \\ -2z=5 \Rightarrow z=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y-\dfrac{5}{2}=1 \\ \\ -3y-2(-\dfrac{5}{2})=1 \\ \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1+\dfrac{5}{2} \\ \\ -3y+5=1 \\ \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-3y=\dfrac{7}{2} \\ -3y=1-5=-4 \Rightarrow y=\dfrac{4}{3} \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{7}{2} \\ \\ y=\dfrac{4}{3} \\ \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4=\dfrac{7}{2} \\ \\ y=\dfrac{4}{3} \\ \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x=\dfrac{7}{2}+4=\dfrac{15}{2} \\ \\ y=\dfrac{4}{3} \\ \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{15}{4} \\ \\ y=\dfrac{4}{3} \\ \\ z=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Notiamo che già dalla prima iterazione dell'algoritmo di Gauss Jordan avevamo ottenuto nell'ultima riga l'equazione $3y = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{3}$: ovviamente si poteva bloccare l'algoritmo a questa iterazione e procedere comunque alla sostituzione. Questa situazione mostra che il metodo di Gauss Jordan non individua le situazioni in cui appaiono equazioni semplici da risolvere: il suo scopo è solamente quello di ottenere una matrice a gradini (che porta comunque ha una risoluzione semplice del sistema).
Passiamo hai due casi in cui A non ha rango massimo, ovvero $k = 1$ e $k = 2$:

- $k = 1 \Rightarrow$ La matrice completa diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$. Si può discutere quanto valgono i ranghi delle due matrici; dato però la semplicità di questo sistema, vediamo cosa accade se si prova a risolverlo:
  $\begin{cases} -x+z=1 \\ z=1 \\ 2x+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+1=1 \\ 2x+1=5 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=0 \\ 2x=4 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ z=1 \end{cases}$
  Ovviamente questa è un'assurdità matematica, perciò il sistema è incompatibile. Proviamo comunque a studiare i ranghi delle due matrici e vediamo se coincidono o meno.
  Notiamo che la prima e seconda riga della matrice A sono dei vettori non proporzionali: abbiamo allora due vettori linearmente indipendenti, perciò $\rho(A) = 2$.
  Per quanto riguarda $(A|b)$, studiamo la sottomatrice 3×3 formata dalla

prima, terza e quarta colonna: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sottraggo alla terza colonna la seconda colonna $\Rightarrow$
$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sviluppo nella terza colonna $\Rightarrow$
$5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) = -5 \neq 0$
Dunque $\rho(A|b) = 3 \neq \rho(A)$, perciò il sistema è incompatibile.

- $k = 2 \Rightarrow$ La matrice completa diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$. La matrice A la seguente sottomatrice di ordine 2 che non ha determinante uguale a zero:
  $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; quindi $\rho(A) = 2$. Controlliamo ora la matrice $(A|b)$; prendiamo la sottomatrice formata dalle ultime tre colonne:
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sottraggo alla seconda riga la prima riga $\Rightarrow$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sviluppo nella prima colonna $\Rightarrow$

  $1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10 \neq 0.$
  Dunque anche in questo caso $\rho(A|b) = 3$, perciò per Rouchè Capelli il sistema è incompatibile.

Ricapitoliamo i vari casi:

- $k \neq 1, 2 \Rightarrow$ il sistema ha un'unica soluzione.
- $k = 1$ e $k = 2 \Rightarrow$ il sistema è incompatibile

4) $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ x + y + 3z = k - 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases}$
Sistema di 3 equazioni e 3 incognite; la matrice che lo rappresenta è

$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k-1 \\ 2 & k & -1 & 1 \end{array}\right)$. Ricaviamo il determinante della matrice A per capire per quali $k \in \mathbb{R}$ ha rango massimo 3:
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sottraggo alla prima riga la seconda riga $\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & k-3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$
Sviluppo con Laplace nella prima riga $\Rightarrow (k-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix} = (k-3)(k-2).$
Ovviamente si può ottenere questo risultato anche sviluppando da subito con

Laplace, ma in questo modo abbiamo svolto meno calcoli e abbiamo già il polinomio decomposto con le sue radici; perciò il determinante si annulla per $k = 2$ e $k = 3$.
Nei casi in cui $k \neq 2, 3$, il determinante è diverso da zero: perciò A ha rango massimo, e quindi il sistema avrà un'unica soluzione. Proviamo a ricavare la soluzione per $k = 1$ attraverso l'algoritmo di Gauss Jordan:
$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Primo elemento della prima riga: $1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} R_2 \rightsquigarrow R_2 - \frac{1}{1}R_1 = R_2 - R_1 \\ \\ R_3 \rightsquigarrow R_3 - \frac{2}{1}R_1 = R_3 - 2R_1 \end{cases} \Rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Secondo elemento della seconda riga: $0 \Rightarrow$ Scambio seconda e terza riga
$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$. Abbiamo ottenuto una matrice a gradini, perciò possiamo sostituire a cascata dall'ultima equazione:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 3z = -3 \\ 2z = -2 \Rightarrow z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 2 \\ -y - 3 \cdot (-1) = -3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -y + 3 = -3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -y = -6 \Rightarrow y = 6 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6 = 3 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases}$$

Studiamo singolarmente i casi $k = 2$ e $k = 3$:

- $k = 2 \Rightarrow$ La matrice completa diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$. La matrice A ha comunque rango 2, dato che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ha come determinante $2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = 4 \neq 0$. Andiamo a calcolare il rango di $(A|b)$: studiamo il determinante della sottomatrice formata dalle ultime tre colonne
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sviluppo sulla prima colonna $\Rightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} +$
$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-1) - (2 - (-2)) + 2(2 - 6) = 3 + 1 - 4 + 2 \cdot (-4) = 4 - 4 - 8 = -8 \neq 0$; perciò $\rho(A|b) = 3$, che è diverso dal rango di A: per Rouchè Capelli, il sistema è incompatibile.

- $k = 3 \Rightarrow$ La matrice completa diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$. La matrice A ha rango 2: infatti la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante $3 - 2 = 1 \neq 0$. Adesso bisogna individuare il rango di $(A|b)$: si potrebbe determinare se esista una sottomatrice 3×3 con determinate diverso da zero. Notiamo però questo fatto: le prime due righe sono coincidenti;

ciò vuol dire che sono linearmente dipendenti (banalmente, due vettori uguali sono proporzionali). Per questo fatto, il rango non potrà mai essere 3 (il rango coincide sempre con il numero di righe o colonne linearmente indipendenti). Per forza di cose, il rango di $(A|b)$ deve essere 2 (la matrice completa contiene comunque la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, che abbiamo già verificato non avere determinante nullo); allora i ranghi delle due matrici coincidono e il sistema è compatibile, con numero di soluzioni $\infty^{\text{n° incognite}-\rho(A)} = \infty^{3-2} = \infty^1$.

In definitiva:

- $k \neq 2, 3 \Rightarrow$ il sistema ha un'unica soluzione.
- $k = 2 \Rightarrow$ il sistema è incompatibile
- $k = 3 \Rightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni a un parametro

5) $\begin{cases} y + kz = 1 - k \\ 2x + (k-3)y + 4z = k + 1 \\ x + ky - kz = 1 \end{cases}$ Il sistema ha 3 equazioni in 3 incognite; la matrice che lo rappresenta è

$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & k & 1-k \\ 2 & k-3 & 4 & k+1 \\ 1 & k & -k & 1 \end{array}\right)$. Troviamo i $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A ha determinante diverso da 0 (e quindi rango massimo 3):

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & k \\ 2 & k-3 & 4 \\ 1 & k & -k \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sviluppo con Laplace nella prima riga $\Rightarrow -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -k \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 2 & k-3 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -(-2k-4)+k(2k-k+3) = 2k+4+k(k+3) = 2k+4+k^2+3k = k^2 + 5k + 4$.

Dobbiamo trovare i valori per cui $k^2 + 5k + 4 = 0$. Calcoliamo le soluzioni di questa equazione di secondo grado:

$$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{-5+3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ \dfrac{-5-3}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Quindi per $k = -1$ e $k = -4$ il determinante si annulla e la matrice A non avrà rango 3.

Nei casi invece dove $k \neq -1, -4$ il rango sarà massimo e il sistema ammetterà un'unica soluzione per ogni scelta del parametro k diversa da -1 e -4.

Proviamo per $k = 1$ ad utilizzare il metodo di Cramer; la matrice da studiare diventa $A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$; mentre avremmo come determinante di

A: $\det(A) = k^2 + 5k + 4 \Rightarrow$ Sostituisco $k = 1 \Rightarrow \det(A) = 1 + 5 + 4 = 10$;

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{ Sviluppo con Laplace nella prima riga } \Rightarrow \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{10} =$$

$$\frac{-1 \cdot (-2-4) + 1 \cdot (2-(-2))}{10} = \frac{-1(-6)+4}{10} = \frac{6+4}{10} = \frac{10}{10} = 1;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{ Sottraggo alla prima colonna la seconda colonna } \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{10} = 0$$

(Il determinante di una matrice con riga o colonna piena di zeri è sempre 0);

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{ Sottraggo alla prima colonna la terza colonna } \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{10} = 0$$

Perciò per $k = 1$ troviamo come unica soluzione $(1, 0, 0)$.
Studiamo gli altri due valori di k che annullano il determinante di A:

- $k = -1 \Rightarrow$ La matrice completa diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

  La matrice A ha quantomeno rango 2: infatti la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ha come determinante $-2 \neq 0$. Definiamo il rango di $(A|b)$ studiando la sottomatrice formata dalla prima colonna e dalle ultime due:
  $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sviluppo sulla terza colonna $\Rightarrow 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$
  $2(-2-4) - (-2) = 2(-6) + 2 = -12 + 2 = -10 \neq 0$; il teorema di Rouchè Capelli ci assicura che, dato che $\rho(A|b) = 3$ e non coincide con il rango di A, il sistema è incompatibile.

- $k = -4 \Rightarrow$ La matrice completa diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right)$.

  Il rango di A è 2 perchè $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ è una sottomatrice 2×2 con determinate $-2 \neq 0$. Calcoliamo il rango di $(A|b)$ prendendo la prima colonna e le ultime due:

$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sommo la prima riga alla seconda e alla terza riga $\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$
$-(-4)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot(2\cdot6-2) = 4(12-2) = 40 \neq 0$; perciò, poichè $\rho(A|b) = 3$ non coincide con il rango di A, il sistema è incompatibile.

Per cui al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ abbiamo le seguenti situazioni:

- $k \neq -1, -4 \Rightarrow$ il sistema ammette una sola soluzione;
- $k = -1$ e $k = -4 \Rightarrow$ il sistema è incompatibile.

6) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - y + kz = -3 \end{cases}$

Il sistema è formato 3 equazioni in 3 incognite ed è rappresentato da
$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & k & -3 \end{array}\right)$. Per trovare i casi di interesse, cerchiamo di capire per quale $k \in \mathbb{R}$ il determinante di A si annulla:
$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & k \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sottraggo la seconda riga alla prima e alla terza riga $\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$
Sviluppo sulla seconda colonna $\Rightarrow -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & k-1 \end{vmatrix} = -(3(k-1)-4) = -(3k - 3 + -4) = -(3k-7)$.
Dunque il determinante si annulla solamente se $-3k+7 = 0$, ovvero per $k = \frac{7}{3}$.
In tutti gli altri casi, la soluzione è unica perchè A avrebbe rango massimo; proviamo a cercare la soluzione per $k = 1$ con il metodo di Cramer.
Sostituendo al determinate $k = 2$ avremmo $\det(A) = -6 + 7 = 1$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{ Sviluppo con Laplace nella prima colonna } \Rightarrow$$

$$\frac{-3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -3\cdot(-1-(-2)) = -3\cdot(-1+2) = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{ Sviluppo con Laplace nella secondaa colonna } \Rightarrow$$

$$\frac{-(-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 3\cdot(4-2) = 3\cdot 2 = 6$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} \Rightarrow \text{Sviluppo con Laplace nella terza colonna} \Rightarrow$$

$$\frac{-3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -3 \cdot (-4+1) = -3 \cdot -3 = 9$$

Dunque per $k = 2$ l'unica soluzione è $(-3, 6, 9)$.
Non ci resta che controllare cosa accade con $k = \frac{7}{3}$.

Innanzitutto, la matrice completa del sistema diventa $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & \frac{7}{3} & -3 \end{array}\right)$.

La matrice A ha sicuramente rango 2, dato che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha come determinante $-4+1 = -3 \neq 0$. Calcoliamo adesso il rango di $(A|b)$ prendendo le prime due colonne e l'ultima:
$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ Sviluppo con Laplace nella terza colonna $\Rightarrow -3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot$
$(-4+1)$
$= -3 \cdot -3 = 9 \neq 0$. Per il teorema di Rouchè Capelli, dato che i ranghi delle matrici sono diversi, il sistema non avrà soluzioni.
In conclusione, si avranno questi due casi:

- $k \neq \frac{7}{3} \Rightarrow$ il sistema avrà un'unica soluzione;
- $k = \frac{7}{3} \Rightarrow$ il sistema è incompatibile