Università degli studi di cagliari

Percorso di Eccellenza
Filippo Maria Cassanello
Anno Accademico 2022/2023

LA DISUGUAGLIANZA DI HARNACK

Indice

1 Introduzione

L'obiettivo del sequente lavoro è quello di provare la disuguaglianza di Harnack per una funzione u soluzione non negativa di un'equazione ellittica. La disuguaglianza venne scoperta da Carl Harnack e permette di mettere in relazione i valori di una funzione armonica in due punti diversi. Successivamente Serrin e Moser generalizzarono la disuguaglianza per soluzioni di equazioni ellittiche e paraboliche, in modo che i valori della soluzione siano comparabili in ogni sottoinsieme del dominio che sia lontano dal bordo. Nella forma che vedremo in questo documento proveremo che è possibile stimare l'estremo superiore della soluzione con l'estremo inferiore moltiplicato per una costante che dipende solo dai coefficenti dell'equazione. In questo elaborato proveremo il risultato nel caso più semplice in cui i coefficenti dell'equazione sono presi il più regolare possibile (di classe C^∞) e in cui non è presente un termine noto. Si osserverà tuttavia che il risultato vale nel caso più generale, in cui i coefficenti siano semplicemente continui o limitati e misurabili, anche con la presenza di un termine noto f che appare nella disuguaglianza. Prima di dimostrare questo risultato, andremo ad esaminare il tipo di equazione ellittica che prendiamo in considerazione e ad enunciare alcune proposizioni e definizioni che saranno necessarie nella dimostrazione principale, mentre successivamente si enunceranno e proveranno alcune conseguenze e corollari della disugaglianza.

2 Preparazione

Nel seguente lavoro considereremo il seguente operatore differenziale

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_i + cu$$

Il quale verrà utilizzato per studiare l'equazione alle derivate parziali ellittica del tipo $Lu = f$, detta anche equazione nella *forma di divergenza*, che verrà studiata su un insieme U aperto, limitato di $\mathbb{R}^n$. Si suppone in questo lavoro che il termine noto f, i coefficenti b^i, c siano nulli e che i termini a^{ij} siano $C^{\infty}(U)$. Inoltre possiamo sempre assumere che i termini a^{ij} siano simmetrici, ovvero che $a^{ij} = a^{ji}$. Osserviamo che nel caso banale di $a^{ij} = \delta^{ij}$, $b^i = 0$, $c = 0$ allora $L = -\Delta$.

Diamo ora una definizione importante:

Definizione 2.1. Diciamo che un operatore differenziale L è (uniformemente) ellittico se esiste una costante $\theta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \theta \|\xi\|^2$$

per quasi ogni $x \in U$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Difatto, l'uniforme ellitticità equivale al fatto che la matrice simmetrica degli a^{ij} sia definita positiva $\forall x \in U$ e che il più piccolo degli autovalori è maggiore o uguale a θ.

Vediamo adesso una disuguaglianza che servirà successivamente:

Proposizione 2.1 (Young con peso)**.** *Siano* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Allora per ogni* $a, b > 0$ *e* $\epsilon > 0$ *vale che:*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q$$

dove $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}$.

Dimostrazione. Vediamo dapprima una disuguaglianza senza peso. Osserviamo che, ricordando che l'applicazione e^x è convessa, vale

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\log a^p} + \frac{1}{q} e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Adesso consideriamo $ab = ((\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a)\left(\frac{b}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p}}}\right)$
sostituendo sopra si ottiene allora che

$$ab \leq \frac{\epsilon p a^p}{p} + \frac{b^q}{(\epsilon p)^{\frac{q}{p}} q} = \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q$$

□

Ricordiamo infine la definizione di continuità di Hölder, che servirà per un'applicazione della disuguaglianza di Harnack.

Definizione 2.2. Sia x_0 un punto di $\mathbb{R}^n$ e f una funzione definita su un insieme limitato D che contiene x_0. Se $0 < \alpha \leq 1$, diciamo che f è Hölder-continua con esponente α in D se la quantità

$$[f]_\alpha = \sup_{x,y \in D} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

è finita, e $[f]_\alpha$ è detto coefficente di Hölder di f rispetto a D

Osservazione 2.1. Se f è una funzione di classe $C^1(D)$ allora essa è anche Lipschitziana, cioè Hölder-continua con esponente 1. Infatti, prendendo ad esempio il caso con la dimensione $N = 1$, per il teorema del valore intermedio si ha che esiste un certo θ per cui

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = f'(\theta)$$

Essendo ora f' continua su un compatto $f'(x) \leq M$, $\forall x \in D$ (basterebbe che la derivata sia limitata in realtà), da cui

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

3 Disuguaglianza di Harnack

In questa sezione vediamo il risultato principale del lavoro, ovvero la disuguaglianza di Harnak per le soluzioni di un'equazione alle derivate parziali ellittica. Successivamente presenteremo delle generalizzazioni del risultato ed esamineremo qualche conseguenza e applicazione della disuguaglianza.

Teorema 3.1. *Sia $u \geq 0$ una soluzione C^2 di*

$$Lu = 0 \qquad \text{in } U,$$

e supponiamo che L sia uniformemente ellittico e che esista $V \subset\subset U$ connesso. Allora esiste una costante C tale che

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

La costante C, detta costante di Harnack, dipende solo da V e dai coefficenti di L.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla sequente idea, possiamo considerare $u > 0$ in U (se così non fosse si ripete l'argomento per $u + \epsilon$ e poi si considera $\epsilon \to 0^+$) e indicare con

$$v = \log u$$

In questo modo osserviamo che dati due generici punti $x_1, x_2 \in V$, se consideriamo

$$\begin{aligned} v(x_2) - v(x_1) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} v(sx_2 + (1-s)x_1) ds = \\ &= \int_0^1 Dv \cdot (x_2 - x_1) ds \\ &\geq \int_0^1 -|Dv||x_2 - x_1| ds \end{aligned}$$

Se quindi mostrassimo che $\|Dv\|_{L^\infty(V)} < \infty$ potremmo maggiorare gli argomenti dentro l'integrale con una costante γ e ottenere quindi

$$\log u(x_2) \geq \log u(x_1) - \gamma$$

da cui

$$u(x_2) \geq u(x_1) e^{-\gamma}$$

che valendo per ogni $x_1, x_2 \in V$ si può riscrivere come

$$\inf_V u \geq \sup_V u e^{-\gamma}.$$

Questo concluderebbe di fatto la dimostrazione perché siccome V è un compatto di $U \subset R^n$ allora è limitato e dunque $|x_2 - x_1|$ è finita. Mostriamo allora che $\|Dv\|_{L^\infty(V)} < \infty$. Sia

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{ij} &= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\left(\frac{u_{ij}u - u_i u_j}{u^2}\right) = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\left(\frac{u_{ij}}{u}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\left(\frac{u_i u_j}{uu}\right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(v_i v_j) = w
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Dove è stata usata l'ipotesi che

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(u_{ij}) = Lu = 0
$$

La funzione w è stata definita perché usando l'ipotesi di uniforme convessità si ottiene che

$$
w = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(v_i v_j) \geq \theta |Dv|^2 \tag{2}
$$

da cui $|Dv|^2 \leq \theta^{-1}|w|$. Pertanto ci basta mostrare che $\|w\|_{L^\infty(V)} < \infty$. Per fare ciò costruiamo una sorta di equazione ellittica per la w.

Calcoliamo dapprima

$$
w_k = \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} v_i v_j)_k = \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij})_k v_i v_j + 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{ik} v_j
$$

Dove si è usato che (a^{ij}) è simmetrica. Quindi

$$
\begin{aligned}
w_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij})_{kl} v_i v_j + 2\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij})_k v_{il} v_j + 2\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij})_l v_{ik} v_j + 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{ikl} v_j + 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{ik} v_{jl} = \\
= 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{ikl} v_j + 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{ik} v_{jl} + R_1
\end{aligned}
$$

dove se ricordiamo che $(a^{ij})_{lk} \in C^\infty(V)$ e dunque possiamo maggiorarle con il loro massimo C e che le v_i sono maggiorate da $|Dv|$, cioè

$$
\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij})_{kl} v_i v_j \leq C|Dv|^2
$$

e dunque

$$
|R_1| = |\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij})_{kl} v_i v_j + 2\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij})_k v_{il} v_j + 2\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij})_l v_{ik} v_j| \leq C|Dv|^2 + 2B[|Dv||D^2v|]
$$

Da qui usando la disuguaglianza di Young con peso sul secondo termine si ottiene

$$
2B[|Dv||D^2v|] \leq 2B[\epsilon|D^2v|^2 + \frac{|Dv|^2}{4\epsilon}]
$$

Per cui una stima del resto $|R_1|$ sarà data da

$$|R_1| \leq C|Dv|^2 + 2B[\epsilon|D^2v|^2 + \frac{|Dv|^2}{4\epsilon}] \approx \epsilon|D^2v|^2 + C(\epsilon)|Dv|^2$$

Adesso moltiplicando con i termini a^{kl} otteniamo

$$-\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})w_{kl} = -2\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{ikl}v_j - 2\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{ik}v_{jl} + R_2 \tag{3}$$

Dove R_2 mantiene la stessa maggiorazione di R_1. Consideriamo adesso w_i partendo però dalla prima forma in (1) in modo da ottenere

$$w_i = \left(-\sum_{k,l=1}^{n}a^{kl}v_{kl}\right)_i = -\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})_i v_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n}a^{kl}v_{kli} = -\sum_{k,l=1}^{n}a^{kl}v_{kli} + R_3 \tag{4}$$

Dove

$$R_3 = -\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})_i v_{kl}$$

In questo modo mettiamo insieme (3) e (4) per ottenere

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})w_{kl} + \sum_i w_i\left(-2\sum_j a^{ij}v_j\right) = \\
&= -2\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{ikl}v_j - 2\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{ik}v_{jl} + \sum_i\left(-\sum_{k,l=1}^{n}a^{kl}v_{kli}\right)\left(-2\sum_j a^{ij}v_j\right) + R_4 = \\
&= -2\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{ikl}v_j - 2\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{ik}v_{jl} + 2\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{kli}v_j + R_4 = \\
&= -2\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{ik}v_{jl} + R_4
\end{aligned} \tag{5}$$

dove si indica $-2\sum_j a^{ij}v_j = \tilde{b}_i$ e $R_4 = R_2 + \sum_i \tilde{b}_i R_3$. Adesso osserviamo che

$$|\sum_i \tilde{b}_i R_3| = |2\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\left(\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})_i v_{kl}\right)v_j| = |2\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})_i a^{ij}v_{kl}v_j|$$

Da cui maggiorando i termini a^{ij} col massimo e riutilizzando Young col peso si ottiene

$$|\sum_i \tilde{b}_i R_3| \leq \epsilon|D^2v|^2 + C_1(\epsilon)|Dv|^2$$

Per cui più in generale l'intero bound per il resto R_4 sarà

$$|R_4| \leq \epsilon|D^2v|^2 + C(\epsilon)|Dv|^2$$

Una volta visto questo sfruttiamo ancora l'uniforme ellitticità per avere che:

$$\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{ik}v_{jl}\geq\theta^2|D^2v|^2$$

Cosicchè dall'equazione (5) troviamo che:

$$-\sum_{k,l=1}^{n}(a^{kl})w_{kl}+\sum_{i}w_i\tilde{b_i}\leq-2\theta^2|D^2v|^2+\epsilon|D^2v|^2+C(\epsilon)|Dv|^2 \tag{6}$$

Per l'ultima parte consideriamo ora χ una funzione a campana su U tale che $\chi\in C^\infty(U)$ e

$$\begin{cases}\chi=1 & \text{in } V\\ 0\leq\chi\leq1 & \text{in U}\end{cases}$$

Allora possiamo definire una funzione $z=\chi^4w$, che sarà continua, perché $u\in C^2(U)$, e avrà supporto compatto, ma allora esiste un punto $x_0\in U$ in cui la funzione ammette massimo. In questo punto si avrà che $D_z(x_0)=0$ e pertanto otteniamo

$$\begin{aligned}&-4\chi^3(x_0)\chi_k(x_0)w(x_0)=\chi^4(x_0)w_k(x_0)\\&-4\chi_k(x_0)w(x_0)=\chi(x_0)w_k(x_0)\end{aligned} \tag{7}$$

Osserviamo adesso che nel punto di massimo x_0 si ha $D_z^2(x_0)\leq0$, cioè l'hessiano di z è semidefinito negativo in x_0, mentre per l'uniforme ellitticità, come già osservato, la matrice A degli a^{ij} è definita positiva, perciò $AD_z^2(x_0)\leq0$. Quindi $Lz(x_0)\geq0$ e dunque segue

$$\begin{aligned}0\leq&-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}z_{kl}+\sum_{i=1}^{n}\tilde{b}_iz_i=-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(4\chi^3\chi_kw+\chi^4w_k)_l+\sum_{i=1}^{n}\tilde{b}_i(4\chi^3\chi_iw+\chi^4w_i)=\\=&-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(12\chi^2\chi_l\chi_kw+4\chi^3\chi_{kl}w+4\chi^3\chi_kw_l+4\chi^3\chi_lw_k+\chi^4w_{kl})+\sum_{i=1}^{n}\tilde{b}_i(4\chi^3\chi_iw+\chi^4w_i)=\\=&\,\chi^4(-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}w_{kl}+\sum_{i=1}^{n}\tilde{b}_iw_i)+R_5\end{aligned} \tag{8}$$

Nel quale adesso R_5 è un termine tale che

$$\begin{aligned}|R_5|=&|-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(12\chi^2\chi_l\chi_kw+4\chi^3\chi_{kl}w+4\chi^3\chi_kw_l+4\chi^3\chi_lw_k)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{b}_i(4\chi^3\chi_iw)|=\\&|-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(4\chi^3\chi_{kl}w-20\chi^2\chi_l\chi_kw)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{b}_i(4\chi^3\chi_iw)|\leq\\&\leq|w|(C\chi^3+F\chi^2+A\chi^3|\tilde{b}|)\end{aligned}$$

Dove è stato usata la relazione fornita da (7) e si può anche vedere che dalla definizione di $\tilde{b}$ si ottiene $|\tilde{b}|\leq C|Dv|$.

Combiniamo ora tutti i risultati ottenuti e si ha che da (8), (6) otteniamo

$$
\begin{aligned}
0 &\le \chi^4(-\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}w_{kl} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i w_i) + |w|(C\chi^3 + F\chi^2 + A\chi^3|\tilde{b}|) \le \\
&\le \chi^4(-2\theta^2|D^2v|^2 + \epsilon|D^2v|^2 + C(\epsilon)|Dv|^2) + |w|(C\chi^3 + F\chi^2 + A\chi^3|Dv|)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Ovvero spostando a sinistra il primo termine e sistemando i coefficenti, ricordandosi che

$$w^2 = \left(-\sum_{i,j,=1}^{n} a_{ij}v_{ij}\right)^2 \le C_1|D^2v|^2$$

e considerando (2), si ottiene, calcolando in x_0 e facendo la richiesta che $2\theta^2 - \epsilon > 0$, possibile perché ϵ è scelto arbitrariamente, che

$$
\begin{aligned}
&E\chi^4w^2 \le \chi^4(2\theta^2 - \epsilon)|D^2v|^2 \le \chi^4(C(\epsilon)|Dv|^2) + |w|(C\chi^3 + F\chi^2 + A\chi^3|Dv|) \le \\
&\le \frac{\chi^4C(\epsilon)}{\theta}|w| + |w|(C\chi^3 + F\chi^2) + \chi^3A\theta^{-\frac{1}{2}}|w|^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Ma questa disuguaglianza ci sta difatto dicendo che χ^2w è limitata in U, chiamando infatti M il termine al secondo membro si ottiene in U

$$\chi^2w \le \left(\frac{M}{E}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Siccome adesso $\chi = 1$ in V abbiamo un bound per $\|w\|_{L^\infty(V)}$. Questo conclude la prova.

□

Vale anche un caso più generale, sempre per un'equazione omogenea, in cui più in generale supponiamo che b^i, c non siano necessariamente nulli e a^{ij}, b^i, c siano misurabili e limitati su U:

Teorema 3.2. *Sia U dominio di $\mathbb{R}^N$ e $u \in W^{2,n}(U)$ che soddisfa $Lu = 0$, dove i coefficenti hanno le ipotesi indicate precedentemente, L uniformemente ellittico, $u \ge 0$ in U. Allora per ogni palla $B_{2R}(y) \subset U$, vale che:*

$$\sup_{B_R(y)} u \le C \inf_{B_R(y)} u$$

Dove $C = C(R, y, n)$ è una costante che dipende solo dal raggio R e dal centro y della palla e dalla dimensione n dello spazio.

Dimostrazione. Vedi [1] pagina 250, corollario 9.25 □

Nella letteratura, la disuguaglianza di Harnack è spesso usata per dimostrare che le soluzioni di equazioni ellittiche sono Holder-continue. Nel nostro caso, il fatto che la soluzione sia classica implica automaticamente che sia anche Hölder-continua, tuttavia in presenza di ipotesi più generali, come enunciato nel teorema 3.2, si può mostrare la seguente asserzione.

Teorema 3.3. *Sia L uniformemente ellittico a coefficenti misurabili e limitati, se $u \in W^{1,2}(U)$ è una soluzione di $Lu = 0$ in U allora segue che u è localmente Hölder-continua in U.*

Dimostrazione. Vedi [1] pagina 200, teorema 8.22 □

Infine, tra le conseguenze più immediate della disuguaglianza di Harnack, vi è il teorema (o principio) di Harnack, che risulta difatto un corollario dei risultati fin qui ottenuti. Il principio di Harnack si occupa della convergenza di sequenze di funzioni armoniche.

Teorema 3.4. *Sia $\{u_n\}$ una sequenza non decrescente, nel senso che $u_1(x) \leq u_2(x) \leq \dots$, di funzioni armoniche su un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ e supponiamo che $\{u_n(y)\}$ sia limitata per qualche $y \in U$. Allora la sequenza converge uniformemente in ogni sottodominio limitato $V \subset\subset U$ a una funzione armonica.*

Dimostrazione. La sequenza $\{u_n(y)\}$ essendo limitata e non decrescente converge, ma allora abbiamo che $\forall \epsilon > 0$ esiste un numero N così che $0 \leq u_m(y) - u_n(y) < \epsilon$, $\forall m \geq n > 0$. Ma quindi per la disuguaglianza di Harnack si deve avere che

$$\sup_V |u_m(x) - u_n(x)| < C \inf_V |u_m(x) - u_n(x)| \leq C|u_m(y) - u_n(y)| < C\epsilon$$

per qualche costante C. Ma allora stiamo dicendo che la successione $\{u_n\}$ converge uniformemente in V e usando teoremi di regolarità (vedi [1] pagina 21, teorema 2.8) si ha che il limite di una sequenza di funzioni armoniche uniformemente convergente è armonico. □

Riferimenti bibliografici

[1] D. Gilbarg, N. S. Trudinger; *Elliptic Partial differential Equations of Second Order* Springer, 2001

[2] Lawrence C. Evans; *Partial Differential Equations* American Mathematical Society, 2000