Introduzione all'Analisi Non Lineare

Antonio Iannizzotto

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Cagliari

Reading Course 2022/23

Sommario

The nonlinear world is the world itself.
Y. Oono

- Introduzione: il problema di Dirichlet non lineare
- Metodi variazionali: minimi e min-max
- Alcuni teoremi di esistenza e molteplicità
- Una diversione algebrica: Teoria di Morse e applicazioni
- Bibliografia essenziale

Introduzione: il problema di Dirichlet non lineare

Consideriamo il seguente problema:

$$(D) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

Dati: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) dominio limitato, $\Gamma = \partial\Omega$ di classe C^2 e

H_0 $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ t.c. $f(x,\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ e

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq c_0(1+|t|^{r-2}) \; (c_0 > 0, \; 2 < r < 2^*)$$

Definizione

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione classica di (D) se

- $-\Delta u(x) = f(x,u(x)) \; \forall \; x \in \Omega$
- $u(x) = 0 \; \forall \; x \in \Gamma$

Introduzione: il problema di Dirichlet non lineare

Consideriamo il seguente problema:

$$(D) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

Dati: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) dominio limitato, $\Gamma = \partial\Omega$ di classe C^2 e

H_0 $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ t.c. $f(x,\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ e

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq c_0(1+|t|^{r-2}) \; (c_0 > 0,\; 2 < r < 2^*)$$

Definizione

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione classica di (D) se

- $-\Delta u(x) = f(x,u(x)) \; \forall \; x \in \Omega$
- $u(x) = 0 \; \forall \; x \in \Gamma$

Ricordiamo che $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile con

$$\|u\| = \Big[\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$

e l'immersione $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è compatta $\forall\, q \in [1, 2^*)$ $(2^* = 2N/(N-2))$

Definizione

$u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di (D) se $\forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx$$

Chiaramente sol. classica $\Longrightarrow$ sol. debole, ma non viceversa!

Lemma (Moser)

Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. debole di (D), allora $u \in L^\infty(\Omega)$

Ricordiamo che $H^1_0(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile con

$$\|u\| = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

e l'immersione $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è compatta $\forall \, q \in [1, 2^*)$ $(2^* = 2N/(N-2))$

Definizione

$u \in H^1_0(\Omega)$ soluzione debole di (D) se $\forall \, \varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(x, u) \varphi \, dx$$

Chiaramente sol. classica $\Longrightarrow$ sol. debole, ma non viceversa!

Lemma (Moser)

Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ sol. debole di (D), allora $u \in L^\infty(\Omega)$

Dal Lemma segue $f(\cdot, u) \in L^2(\Omega)$ con

$$\|f(\cdot, u)\|_2 \leq C\big(1 + \|u\|_\infty^{2r-2}\big)$$

da cui $u \in H^2(\Omega)$ (metodo di Nirenberg...) e $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f(x, u)\varphi \, dx$$

da cui $-\Delta u = f(x, u)$ q.o. in Ω

Teorema (regolarità)

Siano $m > N/2$, $f \in C^m(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, Γ di classe C^{m+2}, $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. debole di (D), allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è sol. classica

Teorema (principio del massimo)

Siano $f(x, t) \geq 0 \; \forall\, (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. debole di (D), allora $u \geq 0$ in Ω

Dal Lemma segue $f(\cdot, u) \in L^2(\Omega)$ con

$$\|f(\cdot, u)\|_2 \leq C\big(1 + \|u\|_\infty^{2r-2}\big)$$

da cui $u \in H^2(\Omega)$ (metodo di Nirenberg...) e $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f(x, u)\varphi \, dx$$

da cui $-\Delta u = f(x, u)$ q.o. in Ω

Teorema (regolarità)

Siano $m > N/2$, $f \in C^m(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, Γ di classe C^{m+2}, $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. debole di (D), allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è sol. classica

Teorema (principio del massimo)

Siano $f(x, t) \geq 0\ \forall\, (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. debole di (D), allora $u \geq 0$ in Ω

Dal Lemma segue $f(\cdot, u) \in L^2(\Omega)$ con

$$\|f(\cdot, u)\|_2 \leq C\big(1 + \|u\|_\infty^{2r-2}\big)$$

da cui $u \in H^2(\Omega)$ (metodo di Nirenberg...) e $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f(x, u)\varphi \, dx$$

da cui $-\Delta u = f(x, u)$ q.o. in Ω

Teorema (regolarità)

Siano $m > N/2$, $f \in C^m(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, Γ di classe C^{m+2}, $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. debole di (D), allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è sol. classica

Teorema (principio del massimo)

Siano $f(x, t) \geq 0 \ \forall\, (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. debole di (D), allora $u \geq 0$ in Ω

Autovalori e autovettori. Sia $m \in C(\overline{\Omega})$ positiva, consideriamo il seguente problema (lineare):

$$(E) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x) u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

Chiaramente $u \in H_0^1(\Omega)$ è sol. (debole) di (E) se $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega m(x) u \varphi \, dx.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di (E) se esiste una soluzione $u \neq 0$ (autofunzione). Per lo studio di (E) introduciamo lo spazio $L^2_m(\Omega) = L^2(\Omega)$ con

$$\|u\|_{2,m} = \Big[\int_\Omega m(x) u^2 \, dx \Big]^{\frac{1}{2}}$$

Lemma

Siano $\lambda \neq \mu$ autovalori di (E) con autofunzioni $u, v \in H_0^1(\Omega)$, allora

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega m(x) u v \, dx = 0$$

Autovalori e autovettori. Sia $m \in C(\overline{\Omega})$ positiva, consideriamo il seguente problema (lineare):

$$(E) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x) u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

Chiaramente $u \in H_0^1(\Omega)$ è sol. (debole) di (E) se $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega m(x) u \varphi \, dx.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di (E) se esiste una soluzione $u \neq 0$ (autofunzione). Per lo studio di (E) introduciamo lo spazio $L^2_m(\Omega) = L^2(\Omega)$ con

$$\|u\|_{2,m} = \Big[\int_\Omega m(x) u^2 \, dx \Big]^{\frac{1}{2}}$$

Lemma

Siano $\lambda \neq \mu$ autovalori di (E) con autofunzioni $u, v \in H_0^1(\Omega)$, allora

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega m(x) u v \, dx = 0$$

Proposizione

Gli autovalori di (E) formano una successione

$$0 < \lambda_1(m) < \lambda_2(m) \leq \cdots \leq \lambda_k(m) \ldots \to \infty$$

con $e_k(m) \in H_0^1(\Omega)$ autofunzione di $\lambda_k(m)$, $\|e_k(m)\|_{2,m} = 1$, inoltre

- $\lambda_1(m)$ semplice, isolato, con $e_1(m) > 0$ e
$$\lambda_1(m) = \inf_{u \neq 0} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2,m}^2}$$
- $\lambda_k(m)$ ha autofunzioni nodali, autospazio di dim. finita e
$$\lambda_k(m) = \inf_{u \in L_{k-1}^{\perp}(m)} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2,m}^2}, \; L_{k-1}(m) = \mathrm{span}(e_1(m), \ldots e_{k-1}(m))$$
- $(e_k(m))$ è una b.o.n. di $L_m^2(\Omega)$ e una base ortogonale di $H_0^1(\Omega)$
- se $m, \tilde{m} \in C(\overline{\Omega})$ sono t.c. $0 < m \leq \tilde{m}$, $m \neq \tilde{m}$, allora $\lambda_k(m) > \lambda_k(\tilde{m})$ $(k \in \mathbb{N})$

Metodi variazionali: minimi e min-max

Siano X uno spazio di Hilbert separabile, $\Phi : X \to \mathbb{R}$

Definizione

Φ è derivabile (secondo Fréchet) in x se esiste $\Phi'(x) \in X$ t.c.

$$\lim_{\|y\| \to 0} \frac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \langle \Phi'(x), y \rangle}{\|y\|} = 0$$

Se $\Phi' : X \to X$ è derivabile, allora Φ è derivabile due volte e

$$\Phi''(x)(y,z) = \langle \Phi''(x)(y), z \rangle$$

Chiaramente Φ derivabile $\Longrightarrow$ Φ continuo, se $\Phi' \in C$[1](X,X) allora $\Phi \in C^1$[2](X).
Se $\Phi'(x) = 0$ allora x è un punto critico di Φ (not. $x \in K(\Phi)$)

Esempio

$$\Phi(x) = \frac{\|u\|^2}{2} \implies \langle \Phi'(x), y \rangle = \langle x, y \rangle, \ \Phi''(x)(y,z) = \langle y, z \rangle$$

Metodi variazionali: minimi e min-max

Siano X uno spazio di Hilbert separabile, $\Phi : X \to \mathbb{R}$

Definizione

Φ è derivabile (secondo Fréchet) in x se esiste $\Phi'(x) \in X$ t.c.

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \langle \Phi'(x), y\rangle}{\|y\|} = 0$$

Se $\Phi' : X \to X$ è derivabile, allora Φ è derivabile due volte e

$$\Phi''(x)(y,z) = \langle \Phi''(x)(y), z\rangle$$

Chiaramente Φ derivabile $\Longrightarrow$ Φ continuo, se $\Phi' \in C$[1](X,X) allora $\Phi \in C^1$[2](X).
Se $\Phi'(x) = 0$ allora x è un punto critico di Φ (not. $x \in K(\Phi)$)

Esempio

$$\Phi(x) = \frac{\|u\|^2}{2} \implies \langle \Phi'(x), y\rangle = \langle x, y\rangle,\ \Phi''(x)(y,z) = \langle y, z\rangle$$

Metodo diretto. Il modo più semplice per trovare un punto critico di Φ è minimizzarlo

Lemma

Siano $\Phi \in C^1(X)$, $x_0 \in X$ minimo locale di Φ, allora $x_0 \in K(\Phi)$

Teorema

Siano $\Phi \in C^1(X)$ t.c.

- $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \Phi(x) = \infty$
- se $x_n \rightharpoonup x$ allora $\liminf\limits_n \Phi(x_n) \geq \Phi(x)$

Allora esiste $x_0 \in K(\Phi)$

In mancanza di coercività si usa la condizione di Palais-Smale:

$$(PS) \qquad |\Phi(x_n)| \leq C,\ \Phi'(x_n) \to 0 \implies x_n \to x \text{ (estratta)}$$

Metodo diretto. Il modo più semplice per trovare un punto critico di Φ è minimizzarlo

Lemma

Siano $\Phi \in C^1(X)$, $x_0 \in X$ minimo locale di Φ, allora $x_0 \in K(\Phi)$

Teorema

Siano $\Phi \in C^1(X)$ t.c.

- $\lim_{\|x\| \to \infty} \Phi(x) = \infty$
- se $x_n \rightharpoonup x$ allora $\liminf_n \Phi(x_n) \geq \Phi(x)$

Allora esiste $x_0 \in K(\Phi)$

In mancanza di coercività si usa la condizione di Palais-Smale:

$$(PS) \qquad |\Phi(x_n)| \leq C, \ \Phi'(x_n) \to 0 \implies x_n \to x \text{ (estratta)}$$

Teorema (principio variazionale di Ekeland)

Siano (X, d) uno spazio metrico completo, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ s.c.i., $x_0 \in X$, $\varepsilon, \delta > 0$ t.c.

$$\Phi(x_0) < \inf_{x \in X} \Phi(x) + \varepsilon$$

Allora esiste $\bar{x} \in X$ t.c.

- $\Phi(\bar{x}) \leq \Phi(x_0)$
- $d(\bar{x}, x_0) \leq \delta$
- $\Phi(\bar{x}) < \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, \bar{x}) \; \forall x \neq \bar{x}$

Così, se $\Phi \in C^1(X)$, troviamo una successione (x_n) t.c.

$$\Phi(x_n) \to \inf_{x \in X} \Phi(x), \quad \|\Phi'(x_n)\| \to 0$$

Corollario

Se $\Phi \in C^1(X)$ è inferiormente limitato e soddisfa (PS), allora esiste $\bar{x} \in K(\Phi)$

Teorema (principio variazionale di Ekeland)

Siano (X, d) uno spazio metrico completo, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ s.c.i., $x_0 \in X$, $\varepsilon, \delta > 0$ t.c.

$$\Phi(x_0) < \inf_{x \in X} \Phi(x) + \varepsilon$$

Allora esiste $\bar{x} \in X$ t.c.

- $\Phi(\bar{x}) \leq \Phi(x_0)$
- $d(\bar{x}, x_0) \leq \delta$
- $\Phi(\bar{x}) < \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, \bar{x}) \ \forall x \neq \bar{x}$

Così, se $\Phi \in C^1(X)$, troviamo una successione (x_n) t.c.

$$\Phi(x_n) \to \inf_{x \in X} \Phi(x), \ \|\Phi'(x_n)\| \to 0$$

Corollario

Se $\Phi \in C^1(X)$ è inferiormente limitato e soddisfa (PS), allora esiste $\bar{x} \in K(\Phi)$

Metodo del min-max. Cerchiamo livelli critici del tipo

$$c = \inf_{G \in \Gamma} \max_{x \in G} \Phi(x)$$

dove Γ è una famiglia di insiemi in X con proprietà topologiche

Lemma (deformazione)

Siano $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS), $c \in \mathbb{R}$ t.c. $K_c(\Phi) = \emptyset$, $\varepsilon > 0$. Allora esistono $\delta \in (0, \varepsilon]$, $\eta : [0,1] \times X \to X$ continua t.c. $\forall x \in X$

- $\eta(0,x) = x$
- $|\Phi(x) - c| \geq \varepsilon \implies \eta(t,x) = x$
- $\Phi(x) \leq c + \delta \implies \Phi(\eta(1,x)) \leq c - \delta$

In corrispondenza dei valori regolari di Φ gli insiemi

$$\Phi^c = \{\Phi \leq c\}$$

mantengono la stessa topologia, mentre se c è un valore critico si ha $\Phi^{c-\delta} \neq \Phi^{c+\delta}$

Metodo del min-max. Cerchiamo livelli critici del tipo

$$c = \inf_{G \in \Gamma} \max_{x \in G} \Phi(x)$$

dove Γ è una famiglia di insiemi in X con proprietà topologiche

Lemma (deformazione)

Siano $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS), $c \in \mathbb{R}$ t.c. $K_c(\Phi) = \emptyset$, $\varepsilon > 0$. Allora esistono $\delta \in (0, \varepsilon]$, $\eta : [0,1] \times X \to X$ continua t.c. $\forall x \in X$

- $\eta(0, x) = x$
- $|\Phi(x) - c| \geq \varepsilon \implies \eta(t, x) = x$
- $\Phi(x) \leq c + \delta \implies \Phi(\eta(1, x)) \leq c - \delta$

In corrispondenza dei valori regolari di Φ gli insiemi

$$\Phi^c = \{\Phi \leq c\}$$

mantengono la stessa topologia, mentre se c è un valore critico si ha $\Phi^{c-\delta} \neq \Phi^{c+\delta}$

I risultati specifici dipendono dalla scelta di Γ

Teorema (del passo di montagna)

Siano $\Phi \in C^2(X)$ verificante (PS), $x_0, x_1 \in X$, $\rho \in (0, \|x_1 - x_0\|)$ t.c.

$$\inf_{\|x - x_0\| = \rho} \Phi(x) = a > \max\{\Phi(x_0),\, \Phi(x_1)\}$$

Poniamo

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = x_0,\, \gamma(1) = x_1\right\}$$

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t))$$

Allora $c \geq a$ ed esiste $x_2 \in K_c(\Phi)$

Teorema (dei tre punti critici)

Siano $\Phi \in C^2(X)$ verificante (PS), $x_0, x_1 \in X$ minimi locali di Φ, allora esiste $x_2 \in K(\Phi) \setminus \{x_0,\, x_1\}$

I risultati specifici dipendono dalla scelta di Γ

Teorema (del passo di montagna)

Siano $\Phi \in C^2(X)$ verificante (PS), $x_0, x_1 \in X$, $\rho \in (0, \|x_1 - x_0\|)$ t.c.

$$\inf_{\|x-x_0\|=\rho} \Phi(x) = a > \max\{\Phi(x_0),\, \Phi(x_1)\}$$

Poniamo

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = x_0,\, \gamma(1) = x_1\right\}$$

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t))$$

Allora $c \geq a$ ed esiste $x_2 \in K_c(\Phi)$

Teorema (dei tre punti critici)

Siano $\Phi \in C^2(X)$ verificante (PS), $x_0, x_1 \in X$ minimi locali di Φ, allora esiste $x_2 \in K(\Phi) \setminus \{x_0,\, x_1\}$

Alcuni teoremi di esistenza e molteplicità

Torniamo al problema (D) e poniamo per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\Phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

Allora $\Phi \in C^2(H_0^1(\Omega))$ e da H_0 segue

$$\langle \Phi'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla \varphi - f(x,u)\varphi \right] dx$$

$$\Phi''(u)(\varphi,\psi) = \int_\Omega \left[\nabla \varphi \cdot \nabla \psi - \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\varphi\psi \right] dx$$

Lemma

Φ ha le seguenti proprietà

- u sol. debole di $(D) \Leftrightarrow u \in K(\Phi)$
- $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \liminf_n \Phi(u_n) \geq \Phi(u)$
- (u_n) limitata, $|\Phi(u_n)| \leq C$, $\Phi'(u_n) \to 0 \Rightarrow (u_n)$ ha una sotto-successione convergente

Alcuni teoremi di esistenza e molteplicità

Torniamo al problema (D) e poniamo per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\Phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

Allora $\Phi \in C^2(H_0^1(\Omega))$ e da H_0 segue

$$\langle \Phi'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla \varphi - f(x,u)\varphi \right] dx$$

$$\Phi''(u)(\varphi,\psi) = \int_\Omega \left[\nabla \varphi \cdot \nabla \psi - \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\varphi\psi \right] dx$$

Lemma

Φ ha le seguenti proprietà

- u sol. debole di $(D) \Leftrightarrow u \in K(\Phi)$
- $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \liminf_n \Phi(u_n) \geq \Phi(u)$
- (u_n) limitata, $|\Phi(u_n)| \leq C$, $\Phi'(u_n) \to 0 \Rightarrow (u_n)$ ha una sotto-successione convergente

Caso sublineare. In questo caso Φ è coercivo:

Teorema

Sia $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ t.c.

- $|f(x,t)| \leq c_0(1 + |t|^{r-1})$ ($c_0 > 0$, $r \in (2, 2^*)$)
- $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$

Allora (D) ha una soluzione $u_1 \in H_0^1(\Omega)$

Non è escluso che $u_1 = 0$...

Esempio (equazione di Lane-Emden)

Sia $q \in (1, 2)$, allora il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{q-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ha una soluzione $u_1 \geq 0$, $u_1 \neq 0$

Caso sublineare. In questo caso Φ è coercivo:

Teorema

Sia $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ t.c.

- $|f(x,t)| \leq c_0(1 + |t|^{r-1})$ ($c_0 > 0$, $r \in (2, 2^*)$)
- $\lim\limits_{|t| \to \infty} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$

Allora (D) ha una soluzione $u_1 \in H_0^1(\Omega)$

Non è escluso che $u_1 = 0$...

Esempio (equazione di Lane-Emden)

Sia $q \in (1, 2)$, allora il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{q-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ha una soluzione $u_1 \geq 0$, $u_1 \neq 0$

Teorema (Pucci-Serrin)

Sia f verificante H_0 e

- $\lim_{|t|\to\infty} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$
- $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$
- esiste $\bar{u} \in H^1_0(\Omega)$ t.c. $\Phi(\bar{u}) < 0$

Allora (D) ha due soluzioni $u_1, u_2 \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$

Esempio (convesso-concavo)

Siano $1 < q < 2 < r < 2^*$, $\lambda > 0$, e poniamo per ogni $t > 0$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda t^{r-1} & \text{se } t \in (0,1) \\ \lambda \frac{r-1}{q-1} t^{q-1} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

Allora per ogni $\lambda > 0$ abbastanza grande (D) ha due soluzioni $u_1, u_2 \geq 0$

Teorema (Pucci-Serrin)

Sia f verificante H_0 e

- $\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$
- $\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0$
- esiste $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $\Phi(\bar{u}) < 0$

Allora (D) ha due soluzioni $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$

Esempio (convesso-concavo)

Siano $1 < q < 2 < r < 2^*$, $\lambda > 0$, e poniamo per ogni $t > 0$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda t^{r-1} & \text{se } t \in (0,1) \\ \lambda \frac{r-1}{q-1} t^{q-1} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

Allora per ogni $\lambda > 0$ abbastanza grande (D) ha due soluzioni $u_1, u_2 \geq 0$

Caso superlineare. In questo caso (PS) non vale in generale:

Teorema (Ambrosetti-Rabinowitz)

Sia f verificante H_0 e

- $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0$
- $0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t$ per ogni $|t| \geq T$ $(T > 0,\ \mu > 2)$

Allora (D) ha una soluzione $u_1 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$

Esempio (convesso-convesso)

Siano $2 < q < r < 2^*$, allora il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{q-1} + u^{r-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ha almeno una soluzione $u_1 \geq 0$

Caso superlineare. In questo caso (PS) non vale in generale:

Teorema (Ambrosetti-Rabinowitz)

Sia f verificante H_0 e

- $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0$
- $0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t$ per ogni $|t| \geq T$ ($T > 0$, $\mu > 2$)

Allora (D) ha una soluzione $u_1 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$

Esempio (convesso-convesso)

Siano $2 < q < r < 2^*$, allora il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{q-1} + u^{r-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ha almeno una soluzione $u_1 \geq 0$

Una celebre equazione del tipo superlineare, che non rientra nei casi precedenti:

Esempio (Equazione logistica)

Siano $r \in (2, 2^*)$, $\lambda > 0$ e cerchiamo le soluzioni positive di

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^{r-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

Il funzionale da studiare è

$$\Phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \lambda \frac{\|u^+\|_2^2}{2} + \frac{\|u^+\|_r^r}{r}$$

Per ogni $\lambda > \lambda_1$ esiste un'unica soluzione positiva u_λ, inoltre $u_\lambda \to 0$ per $\lambda \to \lambda_1$, invece per $0 < \lambda \leq \lambda_1$ non vi sono soluzioni positive

Omologia singolare. Per ogni coppia (A, B) definiamo una successione di gruppi $H_*(A, B)$ e per ogni mappa $f : (A, B) \to (C, D)$ una di omomorfismi $f_* : H_*(A, B) \to H_*(C, D)$, inoltre $\partial : H_k(A, B) \to H_{k-1}(B, \emptyset)$

Assiomi di Eilenberg-Steenrod

- $f = \mathrm{id} \;\Rightarrow\; f_* = \mathrm{id}$
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
- $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$
- sequenza esatta

$$\ldots \;\to\; H_k(B, \emptyset) \;\to\; H_k(A, \emptyset) \;\to\; H_k(A, B) \;\to\; H_{k-1}(B, \emptyset) \;\to\; \ldots$$

- $f \sim g \;\Rightarrow\; f_* = g_*$
- $A = \mathrm{int}(B) \cup \mathrm{int}(C) \;\Rightarrow\; H_k(A, B) = H_k(B, B \cap C)$
- $H_k(x, \emptyset) = \delta_{k0}\mathbb{R}$

Una diversione algebrica: Teoria di Morse e applicazioni

Omologia singolare. Per ogni coppia (A, B) definiamo una successione di gruppi $H_*(A, B)$ e per ogni mappa $f : (A, B) \to (C, D)$ una di omomorfismi $f_* : H_*(A, B) \to H_*(C, D)$, inoltre $\partial : H_k(A, B) \to H_{k-1}(B, \emptyset)$

Assiomi di Eilenberg-Steenrod

- $f = \mathrm{id} \ \Rightarrow \ f_* = \mathrm{id}$
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
- $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$
- sequenza esatta

$$\ldots \to H_k(B, \emptyset) \to H_k(A, \emptyset) \to H_k(A, B) \to H_{k-1}(B, \emptyset) \to \ldots$$

- $f \sim g \ \Rightarrow \ f_* = g_*$
- $A = \mathrm{int}(B) \cup \mathrm{int}(C) \ \Rightarrow \ H_k(A, B) = H_k(B, B \cap C)$
- $H_k(x, \emptyset) = \delta_{k0}\mathbb{R}$

Gruppi critici. Siano X uno spazio di Hilbert, $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS)

Definizione

Se x è un punto critico isolato ovvero ha un intorno U t.c. $K(\Phi) \cap U = \{x\}$ e $\Phi(x) = c$, poniamo $\forall\ k \in \mathbb{N}$

$$C_k(\Phi, x) = H_k(\Phi^c \cap U, \Phi^c \cap U \setminus \{x\})$$

Per esempio, se x è un minimo locale allora $C_k(\Phi, x) = \delta_{k0}\mathbb{R}$

Lemma

Siano $a < c < b$ t.c. $K_a^b(\Phi) = K_c(\Phi) = \{x_1, \dots x_n\}$, allora $H_k(\Phi^b, \Phi^a) = \oplus_{i=1}^n C_k(\Phi, x_i)$

Lemma

Siano $\Phi, \Psi \in C^2(X)$ verificanti (PS), $a < b$, $\delta > 0$ t.c. per ogni $t \in [0, 1]$

$$a \leq (1-t)\Phi(x) + t\Psi(x) \leq b \ \Rightarrow\ \|(1-t)\Phi'(x) + t\Psi'(x)\| \geq \delta$$

Allora $H_k(\Phi^b, \Phi^a) = H_k(\Psi^b, \Psi^a)$

Gruppi critici. Siano X uno spazio di Hilbert, $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS)

Definizione

Se x è un punto critico isolato ovvero ha un intorno U t.c. $K(\Phi) \cap U = \{x\}$ e $\Phi(x) = c$, poniamo $\forall\ k \in \mathbb{N}$

$$C_k(\Phi, x) = H_k(\Phi^c \cap U, \Phi^c \cap U \setminus \{x\})$$

Per esempio, se x è un minimo locale allora $C_k(\Phi, x) = \delta_{k0}\mathbb{R}$

Lemma

Siano $a < c < b$ t.c. $K_a^b(\Phi) = K_c(\Phi) = \{x_1, \dots x_n\}$, allora $H_k(\Phi^b, \Phi^a) = \oplus_{i=1}^n C_k(\Phi, x_i)$

Lemma

Siano $\Phi, \Psi \in C^2(X)$ verificanti (PS), $a < b$, $\delta > 0$ t.c. per ogni $t \in [0, 1]$

$$a \leq (1-t)\Phi(x) + t\Psi(x) \leq b \ \Rightarrow \ \|(1-t)\Phi'(x) + t\Psi'(x)\| \geq \delta$$

Allora $H_k(\Phi^b, \Phi^a) = H_k(\Psi^b, \Psi^a)$

Come si calcolano i gruppi critici?

Definizione

Sia x un punto critico isolato di Φ

- $\mu = \sup\{\dim(Y) : \Phi''(x)$ definita negativa su $Y\}$ (indice di Morse)
- $\nu = \dim(\ker \Phi''(x))$ (nullità)

Lemma (Morse)

Sia $x \in K(\Phi)$ isolato t.c. $\nu = 0$, allora esistono V intorno di 0, $h \in C^1(V, X)$ t.c. $h(0) = x$ e

$$\Phi(h(y)) = \Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi''(x)(y, y)$$

Teorema

Sia $x \in K(\Phi)$ isolato t.c. $\mu < \infty$, $\nu = 0$, allora $C_k(\Phi, x) = \delta_{k\mu}\mathbb{R}$

Come si calcolano i gruppi critici?

Definizione

Sia x un punto critico isolato di Φ

- $\mu = \sup\{\dim(Y) : \Phi''(x)$ definita negativa su $Y\}$ (indice di Morse)
- $\nu = \dim(\ker \Phi''(x))$ (nullità)

Lemma (Morse)

Sia $x \in K(\Phi)$ isolato t.c. $\nu = 0$, allora esistono V intorno di 0, $h \in C^1(V, X)$ t.c. $h(0) = x$ e

$$\Phi(h(y)) = \Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi''(x)(y, y)$$

Teorema

Sia $x \in K(\Phi)$ isolato t.c. $\mu < \infty$, $\nu = 0$, allora $C_k(\Phi, x) = \delta_{k\mu}\mathbb{R}$

Caso asintoticamente lineare. Consideriamo (D) con $f(\cdot,t)/t$ limitata per $|t| \to \infty$, confrontando con gli autovalori di (E). Poniamo

$$\Psi_{m,\lambda}(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \lambda \frac{\|u\|_{2,m}^2}{2}$$

Lemma

Siano $m \in C(\overline{\Omega})$, $m > 0$, $\lambda_j(m) < \lambda < \lambda_{j+1}(m)$, allora $K(\Psi_{m,\lambda}) = \{0\}$ con

$$C_k(\Psi_{m,\lambda}, 0) = \delta_{kj}\mathbb{R}$$

Teorema (esistenza)

Sia f verificante H_0 e

- $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = m_\infty(x)$ $(\lambda_h < m_\infty < \lambda_{h+1})$
- $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = m_0(x)$ $(\lambda_j < m_0 < \lambda_{j+1},\ \lambda_j \neq \lambda_h)$

Allora (D) ha una soluzione $u_1 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$

Caso asintoticamente lineare. Consideriamo (D) con $f(\cdot, t)/t$ limitata per $|t| \to \infty$, confrontando con gli autovalori di (E). Poniamo

$$\Psi_{m,\lambda}(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \lambda \frac{\|u\|_{2,m}^2}{2}$$

Lemma

Siano $m \in C(\overline{\Omega})$, $m > 0$, $\lambda_j(m) < \lambda < \lambda_{j+1}(m)$, allora $K(\Psi_{m,\lambda}) = \{0\}$ con

$$C_k(\Psi_{m,\lambda}, 0) = \delta_{kj}\mathbb{R}$$

Teorema (esistenza)

Sia f verificante H_0 e

- $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = m_\infty(x)$ $(\lambda_h < m_\infty < \lambda_{h+1})$
- $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = m_0(x)$ $(\lambda_j < m_0 < \lambda_{j+1},\ \lambda_j \neq \lambda_h)$

Allora (D) ha una soluzione $u_1 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$

Teorema (molteplicità)

Sia f verificante H_0 e

- $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = m_\infty(x)$ $(0 < m_\infty < \lambda_1)$
- $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = m_0(x)$ $(\lambda_j < m_0 < \lambda_{j+1},\ j \geq 1)$

Allora (D) ha due soluzioni $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$

Esempio

Poniamo

$$f(t) = \lambda t + (\mu - \lambda)\frac{2}{\pi}\arctan(|t|)t$$

- $\lambda_1 < \mu < \lambda_2 < \lambda < \lambda_3 \Rightarrow$ una soluzione
- $0 < \mu < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \Rightarrow$ due soluzioni

Se $m = \lambda_k$ si ha risonanza, allora usiamo il Teorema del punto di sella

Teorema (molteplicità)

Sia f verificante H_0 e

- $\lim_{|t|\to\infty} \dfrac{f(x,t)}{t} = m_\infty(x)$ $(0 < m_\infty < \lambda_1)$
- $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} = m_0(x)$ $(\lambda_j < m_0 < \lambda_{j+1},\, j \geq 1)$

Allora (D) ha due soluzioni $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$

Esempio

Poniamo

$$f(t) = \lambda t + (\mu - \lambda)\frac{2}{\pi}\arctan(|t|)t$$

- $\lambda_1 < \mu < \lambda_2 < \lambda < \lambda_3 \Rightarrow$ una soluzione
- $0 < \mu < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \Rightarrow$ due soluzioni

Se $m = \lambda_k$ si ha risonanza, allora usiamo il Teorema del punto di sella

Bibliografia essenziale

- A. Ambrosetti, A. Malchiodi, Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems (2007)
- L.C. Evans, Partial differential equations (1998)
- D. Motreanu, V.V. Motreanu, N.S. Papageorgiou, Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary vale problems (2014)
- P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations (1986)
- M. Willem, Minimax theorems (1996)

THE END

Bibliografia essenziale

- A. Ambrosetti, A. Malchiodi, Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems (2007)
- L.C. Evans, Partial differential equations (1998)
- D. Motreanu, V.V. Motreanu, N.S. Papageorgiou, Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary vale problems (2014)
- P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations (1986)
- M. Willem, Minimax theorems (1996)

THE END