Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Successioni e serie di funzioni

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23

IL CONCETTO ASTRATTO DI SUCCESSIONE SI ISPIRA AI PROCEDIMENTI DI APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE. ABBIAMO DIMOSTRATO (15/03) CHE LE FUNZIONI

$$\begin{cases} y_0(x) \equiv y_0 \\ y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_i(t))\,dt, \quad i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

CONVERGONO AD UNA FUNZIONE $y(x)$. RESTA DA DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{i\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_i(t))\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt.$$

INCOMINCIAMO CON LO STUDIO DI UN CLASSICO CONTROESEMPIO: LE FUNZIONI $f_k(x) = k x e^{-kx^2}$ PER $x \in [0,1]$ E $k = 0, 1, 2, \dots$

VERIFICHIAMO CHE IL LIMITE $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ ESISTE FINITO PER OGNI $x \in [0,1]$, LO INDICHIAMO CON $f(x)$, E CONSTATIAMO CHE

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

1 $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \lim_{k\to+\infty} k x e^{-kx^2} =$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{kx}{e^{kx^2}} = 0 \quad \text{PER } x \in [0,1]$$

QUINDI PONIAMO $f(x) = 0$.

2 EVIDENTEMENTE $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. INOLTRE SI TROVA $\int_0^1 f_k(x)\,dx = \int_0^1 k x e^{-kx^2}\,dx =$

$$= -\frac{1}{2} e^{-kx^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-k}\right).$$

3 SI DEDUCE CHE $\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{k\to+\infty} \left(1 - e^{-k}\right) = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

LA CONVERGENZA UNIFORME (SU DI UN INTERVALLO LIMITATO) È LA PIÙ SEMPLICE CONDIZIONE SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIA) AFFINCHÉ

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

DEFINIZIONE: SI DICE CHE f_k CONVERGE UNIFORMEMENTE AD f SULL'INTERVALLO $[a,b]$ SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE k_0 TALE CHE PER OGNI $k \geq k_0$ ED OGNI $x \in [a,b]$ RISULTA

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{OVVERO}$$

$$f(x) - \varepsilon < f_k(x) < f(x) + \varepsilon$$

(GRAFICO A PAG. 51 DEL TESTO)

ESEMPIO: LE FUNZIONI $f_k(x) = k x e^{-kx^2}$ CONVERGONO A $f(x) \equiv 0$ SULL'INTERVALLO $[0,1]$ PUNTUALMENTE MA NON UNIFORMEMENTE. INFATTI PER OGNI $k > 0$ CONSIDERO IL PUNTO $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \in [0,1]$ E VEDO CHE $f_k(x_k) =$

$$= k x_k e^{-k x_k^2} = \sqrt{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

MA 4 APR 2023

QUINDI, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$, LA DISUGUAGLIANZA $f_k(x) < f(x) + \varepsilon = \varepsilon$ NEL PUNTO $x = x_k$ DIVENTA $\sqrt{k} < \varepsilon$ E NON VALE DEFINITIVAMENTE.

ESEMPIO: LA SUCCESSIONE $f_k(x) = kx e^{-kx^2}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SULL'INTERVALLO $[a, b]$ COMUNQUE SI PRENDANO $a, b \in \mathbb{R}$ CON $0 < a < b$. DIMOSTRAZIONE: ESERCIZIO

TEOREMA: LA SUCCESSIONE $f_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A $f(x)$ SE E SOLO SE LA SUCCESSIONE NUMERICA s_k DEFINITA PONENDO $s_k = \sup |f_k(x) - f(x)|$ È INFINITESIMA.

DIMOSTRAZIONE. 1 SUPPONIAMO CHE f_k CONVERGA UNIFORMEMENTE AD f. VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $\lim\limits_{k \to +\infty} s_k = 0$. PRENDO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ E SO CHE $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ PER OGNI x E PER OGNI $k \geq k_0$ OPPORTUNO.

MA ALLORA $s_k = \sup |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ E LA TESI SEGUE. 2 SUPPONIAMO CHE $s_k \to 0$ E VERIFICHIAMO CHE $f_k \xrightarrow{\text{UNIFORMEM.}} f$.

PRENDO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ E SO PER IPOTESI CHE ESISTE k_0 TALE CHE $s_k < \varepsilon$ PER OGNI $k \geq k_0$.

MA ALLORA PER OGNI x SI HA ANCHE $|f_k(x) - f(x)| \leq s_k < \varepsilon$ E LA TESI SEGUE.

ESEMPIO: LA SUCCESSIONE $f_k(x) = x^k$ CONVERGE PUNTUALMENTE SULL'INTERVALLO $[0, 1]$ ALLA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{SE } x = 1 \end{cases}$$

PER VEDERE SE LA CONVERGENZA È UNIFORME, CALCOLIAMO $s_k = \sup (f_k(x) - f(x))$. SI HA CHE

$$f_k(x) - f(x) = \begin{cases} x^k, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

IN PARTICOLARE $f_k(x) - f(x) < 1$ PER OGNI $x \in [0, 1]$ QUINDI $M = 1$ È UN MAGGIORANTE.

DICO CHE OGNI $y_0 < 1$ NON È UN MAGGIORANTE. INFATTI RISULTA $\lim\limits_{x \to 1^-} (f_k(x) - f(x)) = \lim\limits_{k \to 1^-} x^k = 1$ QUINDI LA DISUGUAGLIANZA $f_k(x) - f(x) \leq y_0$ NON VALE IN UN INTERVALLO $(1 - \delta, 1)$ CON δ CHE DIPENDE DA y_0.

MA 4 APR 2023

IN PARTICOLARE SE $y_0 \in (0,1)$ E $k>0$ LA DISUGUAGLIANZA $f_k(x) - f(x) = x^k \leq y_0$ VALE PER $x \in \left[0, \sqrt[k]{y_0}\right]$ E NON VALE PER $x \in \left(\sqrt[k]{y_0}, 1\right]$. QUINDI y_0 NON È UN MAGGIORANTE DI $f_k(x) - f(x)$.

CONCLUSIONE: $s_k = \sup_{[0,1]} \left| f_k(x) - f(x) \right| = 1$ PER OGNI k E QUINDI $x^k \longrightarrow f(x)$ NON UNIFORMEMENTE SULL'INTERVALLO $[0,1]$.

TEOREMA: CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI f_k CONTINUE SU DI UN INTERVALLO LIMITATO $[a,b]$ CONVERGENTI UNIFORMEMENTE AD UNA FUNZIONE CONTINUA f. ALLORA

$$\lim_{k \to +\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

DIMOSTRAZIONE. PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ SAPPIAMO PER IPOTESI CHE ESISTE k_0 TALE CHE $s_k < \varepsilon$ PER OGNI $k \geq k_0$. MA ALLORA PER OGNI $k \geq k_0$

$$\left| \int_a^b f_k(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left(f_k(x) - f(x) \right) dx \right| \leq \int_a^b \left| f_k(x) - f(x) \right| dx$$

$$\leq \int_a^b s_k \, dx = (b-a) s_k < (b-a) \varepsilon$$

E LA TESI SEGUE.

ESERCIZIO: VEDERE SE $\lim_{k \to +\infty} \int_0^1 x^k \, dx =$

$$= \int_0^1 f(x)\, dx \text{ ESSENDO } f(x) = \lim_{k \to +\infty} x^k.$$

MA 4 APR 2023

OSSERVAZIONE: SE LE $f_k : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ SONO INTEGRABILI SECONDO RIEMANN (ANCHE SE DISCONTINUE) E CONVERGONO UNIFORMEMENTE AD UNA $f(x)$ ALLORA f È INTEGRABILE E LA CONCLUSIONE DEL TEOREMA VALE ANCORA.

ESEMPIO: LA SUCCESSIONE $f_k(x) = H(x) + \frac{1}{k}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SU $(-\infty, +\infty)$ A $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ E SI PUÒ PASSARE AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE SU QUALUNQUE INTERVALLO LIMITATO $[a,b]$.

ME 5 APR 2023

OSSERVAZIONE: DATA UNA $f(x)$ ARBITRARIA, LA SUCCESSIONE $f_k(x) = f(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD $f(x)$.

OBIETTIVO: APPLICARE IL TEOREMA ALLE FUNZIONI

$$\begin{cases} y_0(x) \equiv y_0 \\ y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_i(t))\, dt, \quad i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

PROBLEMA 1: SONO CONTINUE? LA $f(t,y)$ È CONTINUA PER IPOTESI. LA $f(t, y_i(t))$ SARÀ CONTINUA? $y_0(x)$ È OVVIAMENTE CONTINUA PERCHÉ È COSTANTE (BASE DELL'INDUZIONE). SE $y_i(x)$ È CONTINUA, ANCHE $y_{i+1}(x)$ LO È (PASSO INDUTTIVO).

ME 5 APR 2023

PROBLEMA N. 2: LA FUNZIONE LIMITE È CONTINUA? SÌ PERCHÉ LA CONVERGENZA UNIFORME CONSERVA LA CONTINUITÀ:

TEOREMA: SE LE $f_k : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE E SONO CONTINUE, ALLORA LA FUNZIONE $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ È CONTINUA.

DIMOSTRAZIONE: PRENDO $x_0 \in [a,b]$ E VOGLIO DIMOSTRARE CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE PER OGNI $x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ RISULTA $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

QUINDI PRENDO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ E SO PER IPOTESI CHE ESISTE k_0 TALE CHE $|f_{k_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ PER OGNI $x \in [a,b]$. IN PARTICOLARE SI HA CHE $|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. ESSENDO f_{k_0} CONTINUA PER IPOTESI, ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE PER OGNI $x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ RISULTA $|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. QUINDI, PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SI HA $|f(x) - f(x_0)| \leq$

$$|f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| <$$

$< \varepsilon$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

ESEMPIO: $f_k(x) = k x e^{-k x^2}$ È CONTINUA SU $[0,1]$ E CONVERGE AD $f(x) = 0$, PURE CONTINUA. LA CONVERGENZA NON È UNIFORME.

ME 5 APR 2023

ESEMPIO: $f_k(x) = x^k$ È CONTINUA SU $[0,1]$ E CONVERGE A $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x \in [0,1) \\ 1, & \text{SE } x = 1 \end{cases}$

CHE È DISCONTINUA NEL PUNTO $x = 1$. LA CONVERGENZA NON È UNIFORME.

COROLLARIO: CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI f_k CONTINUE SU DI UN INTERVALLO LIMITATO $[a,b]$ CONVERGENTI UNIFORMEMENTE AD UNA FUNZIONE f. ALLORA f È CONTINUA E

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

DUNQUE, PER CONCLUDERE LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI CAUCHY, BASTA VERIFICARE CHE $y_i(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE. A TALE SCOPO UTILIZZEREMO IL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME:

UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $y_i(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SE E SOLO SE PER OGNI $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTE i_0 TALE CHE PER OGNI $i,j \geq i_0$ E PER OGNI x RISULTI $|y_i(x) - y_j(x)| < \varepsilon$: IN ALTRI TERMINI, POSTO $\delta_{ij} = \sup_x |y_i(x) - y_j(x)|$,

$\lim_{i,j\to+\infty} \delta_{ij} = 0$. INFATTI, SE $y_i(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE, ALLORA $\delta_{ij} \xrightarrow[i,j\to+\infty]{} 0$.

DIMOSTRAZIONE: ESERCIZIO (DISUG. TRIANGOLARE)

VICEVERSA: SE $\delta_{ij} \xrightarrow[i,j\to+\infty]{} 0$ ALLORA $y_i(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE. DIMOSTRAZIONE.

PARTE 1: $y_i(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE.

INFATTI PER OGNI x FISSATO, CHE INDICHIAMO CON x_0, SI HA $|y_i(x_0) - y_j(x_0)| \leq \sup |y_i(x) - y_j(x)| = \delta_{ij}$

QUINDI LA SUCCESSIONE NUMERICA $(y_i(x_0))$ CONVERGE AD UN LIMITE FINITO PER IL CRITERIO DI CAUCHY (15/03).

PARTE 2: LA CONVERGENZA È UNIFORME.

PONIAMO $y(x) = \lim_{i\to+\infty} y_i(x)$ (DEFINIZIONE BEN POSTA IN VIRTÙ DELLA PRIMA PARTE). PRESO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ VERIFICHIAMO CHE ESISTE i_0 TALE CHE PER OGNI $i \geq i_0$ E PER OGNI x SI HA

$$y(x) - \varepsilon \leq y_i(x) \leq y(x) + \varepsilon.$$

SAPPIAMO PER IPOTESI CHE ESISTE i_0 TALE CHE PER OGNI $i,j \geq i_0$ E PER OGNI x SI HA

$|y_i(x) - y_j(x)| < \varepsilon$ QUINDI

$$y_j(x) - \varepsilon < y_i(x) < y_j(x) + \varepsilon$$

RICORDANDO CHE $y_j(x) \longrightarrow y(x)$ (PRIMA PARTE) E USANDO IL TEOREMA DEL CONFRONTO SI OTTIENE

$$y(x) - \varepsilon \leq y_i(x) \leq y(x) + \varepsilon$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

ME 5 APR 2023

CI PROPONIAMO DI APPLICARE IL CRITERIO DI CAUCHY ALLE ITERATE DI PEANO-PICARD $y_i(x)$ DATE DA

$$\begin{cases} y_0(x) \equiv y_0 \\ y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_i(t))\, dt, \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

SAPPIAMO DAL 15/03 CHE $|y_i(x) - y_j(x)| \le$

$\le \frac{M_0}{L} \sum_{k=j}^{i-1} \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}$ PER $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, QUINDI $\Delta_{ij} =$

$$= \sup |y_i(x) - y_j(x)| \le \frac{M_0}{L} \sum_{k=j}^{i-1} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

SAPENDO CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(L\delta)^k}{k!}$ CONVERGE $\left(A\ e^{L\delta}\right)$

E RICORDANDO IL CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE (15/03) POSSIAMO SCRIVERE $\sum_{k=j}^{i-1} \frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow[i,j \to +\infty]{} 0$

QUINDI $\Delta_{ij} \xrightarrow[i,j\to+\infty]{} 0$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO.

DI CONSEGUENZA, PER IL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME, LE $y_i(x)$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE.

COME ANNUNCIATO IL 13/03, VERIFICHIAMO CHE

$$\lim_{i\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_i(t))\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

BASTA VERIFICARE CHE $f(t, y_i(t)) \longrightarrow f(t, y(t))$ UNIFORMEMENTE. PER LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ SI HA $|f(t,y_i(t)) - f(t,y(t))| \le L|y_i(t) - y(t)| \le$

$\le L \sup |y_i(t) - y(t)| = L\Delta_i$ QUINDI

$$\sup |f(t,y_i(t)) - f(t,y(t))| \le L\Delta_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0.$$

SERIE DI FUNZIONI

DEFINIZIONE: DATA UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $y_k(x)$, E POSTO $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k(x)$, SI DICE CHE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(x)$ CONVERGE (OVVERO CONVERGE UNIFORMEMENTE) SE $S_n(x)$ CONVERGE (OVVERO CONVERGE UNIFORMEMENTE) AD UNA FUNZIONE LIMITE CHE INDICHIAMO CON $S(x)$.

IN TAL CASO SI SCRIVE $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(x) = S(x)$.

ESEMPIO: SE $y_k(x) = x^k$ ALLORA $S_n(x) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{SE } x \neq 1 \\ n+1, & \text{SE } x = 1 \end{cases}$$

QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ PER $x \in (-1,1)$.

LA CONVERGENZA È UNIFORME? BISOGNEREBBE CHE, POSTO $\delta_n = \sup_{(-1,1)} |S_n(x) - S(x)|$, SI AVESSE $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. NEL NOSTRO CASO SI HA

$$\delta_n = \sup_{(-1,1)} \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| =$$

$$= \sup_{(-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty \text{ PER OGNI } n \geq 0.$$

ME 12 APR 2023

DUALISMO SERIE-SUCCESSIONI

L'ESPEDIENTE DEL 15/03 DI RICONDURRE LA SUCCESSIONE $y_i(x)$ AD UNA SERIE HA UNA VALIDITÀ GENERALE: CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $f_n(x)$ E DEFINIAMO $y_k(x) = f_{k+1}(x) - f_k(x)$. ALLORA

$$f_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) + f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x) + \dots$$

$$+ f_2(x) - f_1(x) + f_1(x) - f_0(x) + f_0(x)$$

$$= f_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

DOVE

$$g_k(x) = \begin{cases} f_0(x), & \text{SE } k = 0 \\ y_{k-1}(x), & \text{SE } k \geq 1. \end{cases}$$

QUALUNQUE SUCCESSIONE $f_n(x)$ È LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI DELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$.

APPLICAZIONE: SE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE, ALLORA $f_n(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE: MA COME STABILISCO CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE?

ME 12 APR 2023

IL CRITERIO DI WEIERSTRASS, OVVERO LA TOTALE CONVERGENZA DI UNA SERIE

DEFINIZIONE: SI DICE CHE UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ CONVERGE TOTALMENTE SE (DUE CONDIZIONI EQUIVALENTI) 1) LA SERIE NUMERICA $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k$, $s_k = \sup_x |g_k(x)|$, CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA;

2) ESISTE UNA SERIE NUMERICA $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k$ CONVERGENTE I CUI TERMINI M_k SONO TALI CHE $|g_k(x)| \leq M_k$ PER OGNI x (SONO MAGGIORANTI DI $|g_k(x)|$).

ESERCIZIO: DIMOSTRARE L'EQUIVALENZA FRA LE CONDIZIONI 1 E 2.

VE 14 APR 2023

OSSERVAZIONE: SE LE FUNZIONI $g_k(x)$ SONO LIMITATE, CIOÈ $s_k = \sup_x |g_k(x)| < +\infty$ PER OGNI k, POSSO PRENDERE $M_k = s_k + 1$ ED HO CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k \geq \sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty$

A PRESCINDERE DALLA TOTALE CONVERGENZA.

IL FATTO CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k = +\infty$ NON DICE NULLA SULLA TOTALE CONVERGENZA!

VE 14 APR 2023

CRITERIO DI CONVERGENZA DI WEIERSTRASS: LA CONVERGENZA TOTALE DI UNA SERIE DI FUNZIONI IMPLICA LA CONVERGENZA UNIFORME.

DIMOSTRAZIONE. PRENDO UNA SERIE DI FUNZIONI $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ CONVERGENTE TOTALMENTE, CIOÈ TALE CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k < +\infty$, $s_k = \sup_x |g_k(x)|$, E VOGLIO DIMOSTRARE CHE CONVERGE UNIFORMEMENTE. PER IL CRITERIO DI CAUCHY (15/03) SO CHE $\lim_{i,j\to+\infty} \sum_{k=j+1}^{i} s_k = 0$ (SUPPONGO $i>j$).

PER VERIFICARE LA TESI, APPLICANDO LA DEFINIZIONE, DEVO VEDERE SE LA SUCCESSIONE DELLE FUNZIONI $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE. USO IL CRITERIO DI CAUCHY: MI BASTA VERIFICARE CHE, POSTO

$$s_{ij} = \sup_x |S_i(x) - S_j(x)|$$

RISULTA $\lim_{i,j\to+\infty} s_{ij} = 0$ (5 APRILE).

SICCOME $s_{ij} = \sup_x \left| \sum_{k=j+1}^{i} g_k(x) \right|$

E $\left| \sum_{k=j+1}^{i} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=j+1}^{i} |g_k(x)| \leq \sum_{k=j+1}^{i} s_k$

SI TROVA CHE $s_{ij} \leq \sum_{k=j+1}^{i} s_k \xrightarrow[i,j\to+\infty]{} 0$

E LA TESI SEGUE.

 VE 14 APR 2023

CLASSICO ESEMPIO DI SERIE DI FUNZIONI CONVERGENTE UNIFORMEMENTE MA NON TOTALMENTE (IL CRITERIO DI WEIERSTRASS ESPRIME UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA PER LA CONVERGENZA UNIFORME):

CONSIDERIAMO $g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

VERIFICHIAMO CHE LA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} |g_k(x)|$ CONVERGE UNIFORMEMENTE. USIAMO IL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME. POSTO $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$

VERIFICHIAMO CHE $\sigma_{ij} = \sup_x |S_i(x) - S_j(x)| =$

$$= \sup_x \left| \sum_{k=j+1}^{i} g_k(x) \right| \xrightarrow[i,j \to +\infty]{} 0.$$

SI HA CHE $\sigma_{ij} = \left| \sum_{k=j+1}^{i} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{j+1} \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

E LA VERIFICA È CONCLUSA. NOTARE CHE LA DISUGUAGLIANZA $\left| \sum_{k=j+1}^{i} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \sum_{k=j+1}^{i} \frac{1}{k}$ È INUTILE PERCHÉ IL SECONDO MEMBRO NON TENDE A ZERO (ESERCIZIO: DIMOSTRARLO).

D'ALTRO CANTO LA SERIE DATA NON CONVERGE TOTALMENTE PERCHÉ $\sigma_k = \sup_x |g_k(x)| = \frac{1}{k}$ E QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k = +\infty$.

OSSERVAZIONE: SE $f_k \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$ E $g_k \xrightarrow{\text{UNIF.}} g$ ALLORA $f_k + g_k \xrightarrow{\text{UNIF.}} f + g$

VERIFICA: $\left| f_k(x) + g_k(x) - (f(x) + g(x)) \right| =$

$= \left| f_k(x) - f(x) + g_k(x) - g(x) \right| \leq \left| f_k(x) - f(x) \right| + \left| g_k(x) - g(x) \right|$, QUINDI, PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$, SO CHE $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ PER OGNI x E PER OGNI $k \geq k_1$ E SO CHE $|g_k(x) - g(x)| < \varepsilon$ PER OGNI x ED OGNI $k \geq k_2$. MA ALLORA

$$\left| f_k(x) + g_k(x) - (f(x) + g(x)) \right| < 2\varepsilon$$

PER OGNI x ED OGNI $k \geq k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ E L'OSSERVAZIONE SEGUE.

COROLLARIO: CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA UNIFORME DI UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(x)$ È CHE $y_k \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$. INFATTI, PER DEFINIZIONE, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD UNA FUNZIONE CHE INDICO CON $S(x)$. MA ALLORA $y_k = S_k - S_{k-1} \xrightarrow{\text{UNIF.}} S - S = 0$.

 VE 14 APR 2023

CONSEGUENZE DELLA CONVERGENZA UNIFORME
IMPORTANZA DELLA CONVERGENZA UNIFORME
UTILITÀ DELLA CONVERGENZA UNIFORME

1) PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE (4-5 APRILE)

2) CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE LIMITE:

TEOREMA: SE LE $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE IN X E SONO CONTINUE IN UN PUNTO $x_0 \in X \cap DX$ (DX = INSIEME DEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI $X \subset \mathbb{R}$) ALLORA LA FUNZIONE $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ È CONTINUA NEL PUNTO x_0.

DIMOSTRAZIONE: GIÀ FATTA IL 5/4.

3) SCAMBIO DEI LIMITI: IL TEOREMA PRECEDENTE SI PUÒ ADATTARE AL CASO $x_0 = \pm\infty$.

TEOREMA: SE LE $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE IN X ILLIMITATO SUPERIORMENTE (O INFERIORMENTE) E SE AMMETTONO LIMITE $\lim_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \ell_k \in \mathbb{R}$

ALLORA LA SUCCESSIONE DEGLI ℓ_k CONVERGE AD UN LIMITE FINITO $\ell = \lim_{k \to +\infty} \ell_k$ E RISULTA

$$\lim_{k \to +\infty} \lim_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$$

DIMOSTRAZIONE: PRENDO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ E SO CHE $|f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in X$ ED OGNI $i, j \geq i_0$ OPPORTUNO. MA $f_i \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \ell_i$ E $f_j \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \ell_j$ QUINDI $|\ell_i - \ell_j| \leq \varepsilon$ PER OGNI $i, j \geq i_0$ DUNQUE ℓ_k CONVERGE PER IL CRITERIO DI CAUCHY E POSSIAMO DEFINIRE $\ell = \lim_{k \to +\infty} \ell_k$.

SECONDA PARTE: PONIAMO $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ E VERIFICHIAMO CHE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$. PRENDO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ E SO CHE: 1) $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in X$ ED OGNI $k \geq k_1$.

2) $|\ell_k - \ell| < \varepsilon$ PER OGNI $k \geq k_2$

PRENDO $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ ED HO CHE

3) $|f_{k_0}(x) - \ell_{k_0}| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in X$ TALE CHE $x \geq x_0$ OPPORTUNO. MA ALLORA

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - \ell_{k_0}| + |\ell_{k_0} - \ell| < 3\varepsilon$$

E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

 MA 18 APR 2023

OSSERVAZIONE: SE LA CONVERGENZA DI f_k AD f È PUNTUALE MA NON È UNIFORME, LA TESI NON VALE, IN GENERALE.

ESEMPIO 1: $f_k(x) = x^k$, $X = (0,1)$,

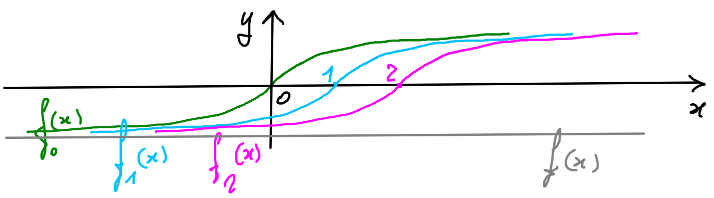
$$\ell_k = \lim_{x\to 1^-} f_k(x) = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} \ell_k = 1,$$

$$f(x) = 0 \text{ PER } x\in(0,1), \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.$$

ESEMPIO 2: $f_k(x) = \operatorname{arctg}(x-k)$, $X = \mathbb{R}$,

$$\ell_k = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}(x-k) = \pm\frac{\pi}{2},$$

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} \ell_k = \pm\frac{\pi}{2}. \quad f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x) = -\frac{\pi}{2}. \quad s_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_k(x) - f(x) \right| = \pi \not\to 0.$$



CONCLUSIONE: PER $x\to+\infty$ SI HA $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} = \lim_{k\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_k(x)$, MENTRE $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to+\infty} \lim_{x\to-\infty} f_k(x)$.

ESEMPI 3 E 4: RIFARE CON $f_k(x) = H(x-k)$, ESSENDO $H(x) = 1$ SE $x\in[0,+\infty)$ E $H(x) = -1$ SE $x\in(-\infty,0)$. IDEM CON $f_k(x) = k\,H(x-k)$.

SULLA BASE DELLE IDEE DI MAURICE FRÉCHET (1906) OGGI SI DEFINISCE SPAZIO METRICO UNA COPPIA (X, d) DOVE $X \neq \emptyset$ È UN INSIEME E $d: X^2 \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE TALE CHE:

1) $d(x,y) \geq 0$ PER OGNI $x,y\in X$
2) $d(x,y) = 0$ SE E SOLO SE $x = y$
3) $d(x,y) = d(y,x)$ PER OGNI $x,y\in X$
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ PER OGNI $x,y,z\in X$.

ESEMPIO: LO SPAZIO $C^0([a,b])$ DELLE FUNZIONI CONTINUE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ È UNO SPAZIO METRICO LA CUI DISTANZA CANONICA È

$$d(f,g) = \max_{[a,b]} \left| f(x) - g(x) \right|.$$

VERIFICHIAMO LE PROPRIETÀ SOPRA ELENCATE:

1) $\max_{[a,b]} |f(x) - g(x)| \geq 0$; 2) SE $f = g$ OVVIAMENTE $\max_{[a,b]} |f(x) - g(x)| = 0$, E VICEVERSA SE $\max_{[a,b]} |f(x) - g(x)| = 0$ ALLORA $|f(x) - g(x)| = 0$ PER OGNI x DUNQUE $f = g$.

3) $\max_{[a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{[a,b]} |g(x) - f(x)|$;

4) PER OGNI $x\in[a,b]$ SI HA CHE $|f(x) - z(x)| \leq$

$\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - z(x)|$ MA

$$|f(x) - g(x)| \leq \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)| = d(f,g)$$

E SIMILMENTE $\left|g(x)-z(x)\right| \leq d(g,z)$ DUNQUE $\left|f(x)-z(x)\right| \leq d(f,g)+d(g,z)$ PER OGNI $x \in [a,b]$ E DI CONSEGUENZA $d(f,z) = \max_{[a,b]} \left|f(x)-z(x)\right| \leq d(f,g)+d(g,z)$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $d(f,g) = \sup_{I} \left|f(x)-g(x)\right|$ HA LE PROPRIETÀ DELLA DISTANZA SULL'INSIEME X DELLE FUNZIONI LIMITATE $f: I \to \mathbb{R}$, ESSENDO I UN INTERVALLO.

OSSERVAZIONE: NEL DIMOSTRARE IL TEOREMA DELLO SCAMBIO DEI LIMITI, COME PURE NELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI CAUCHY, ABBIAMO USATO IL CRITERIO DI CAUCHY. IN UNO SPAZIO METRICO (X,d) SI DEFINISCE IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE (x_k) CONVENENDO CHE $x_k \to x$ SE $\lim_{k\to+\infty} d(x_k, x) = 0$. SI DIMOSTRA FACILMENTE CHE, SE x_k CONVERGE, ALLORA $\lim_{i,j\to+\infty} d(x_i, x_j) = 0$. ESERCIZIO: COME?

VICEVERSA: DATA UNA SUCCESSIONE DI ELEMENTI $x_k \in X$ TALE CHE $d(x_i,x_j) \xrightarrow[i,j\to+\infty]{} 0$ ESISTE $x \in X$ TALE CHE $x_k \to x$? IN GENERALE NO. ESEMPIO: $x_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \in \mathbb{Q}$.

ACCADE PER CERTI SPAZI METRICI (X,d) CHE LA RISPOSTA SIA SÌ QUALUNQUE SIA (x_k): SI DICONO COMPLETI

ESEMPIO: LO SPAZIO DEI NUMERI REALI CON LA METRICA CANONICA $d(x,y) = |x-y|$ È COMPLETO PERCHÉ SAPENDO CHE $\lim_{i,j\to+\infty} |x_i - x_j| = 0$ SI PUÒ AFFERMARE CHE LA SUCCESSIONE (x_k) AMMETTE LIMITE FINITO.

ESEMPIO: LO SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^N$, LA CUI METRICA È $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}$ CON $x \cdot y$ PRODOTTO SCALARE TRA x ED $y \in \mathbb{R}^N$, È COMPLETO: SE HO UNA SUCCESSIONE DI PUNTI $x_k \in \mathbb{R}^N$ TALI CHE $\lim_{i,j\to+\infty} \|x_i - x_j\| = 0$ ALLORA SONO CERTO CHE ESISTE UN $x \in \mathbb{R}^N$ TALE CHE $\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\| = 0$.

ESEMPIO: IL CAMPO $\mathbb{C}$ DEI NUMERI COMPLESSI È COMPLETO CON LA METRICA CANONICA $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$: QUI $|z|$ DENOTA IL MODULO DI z. CIÒ SIGNIFICA CHE SE HO UNA SUCCESSIONE DI NUMERI COMPLESSI z_k TALI CHE $\lim_{i,j\to+\infty} |z_i - z_j| = 0$ ALLORA ESISTE UN $z \in \mathbb{C}$ TALE CHE $z_k \to z$.

TEOREMA: LO SPAZIO $C^0([a,b])$ CON LA METRICA CANONICA $d(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x)-g(x)|$ È COMPLETO.

DIMOSTRAZIONE. PRENDO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI CONTINUE $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ TALI CHE $\lim_{i,j\to+\infty} d(f_i, f_j) = 0$. MI DOMANDO SE ESISTE UNA f CONTINUA TALE CHE $d(f_k, f) \to 0$.

LA TESI: $d(f_k, f) \to 0$ SIGNIFICA CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTE k_0 TALE CHE PER OGNI $k \geq k_0$ SI HA $d(f_k, f) = \max_{[a,b]} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, CIOÈ $|f_k(x)-f(x)| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in [a,b]$:

SI TRATTA QUINDI DI DIMOSTRARE CHE LE $f_k(x)$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE IN $[a,b]$ (4 APRILE).

L'IPOTESI, INVECE: $d(f_i,f_j) \xrightarrow[i,j\to+\infty]{} 0$ CI ASSICURA CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTE i_0 TALE CHE PER OGNI $i,j \geq i_0$ RISULTA $d(f_i,f_j) = \max_{[a,b]} |f_i(x)-f_j(x)| < \varepsilon$, IL CHE EQUIVALE A $|f_i(x)-f_j(x)|<\varepsilon$ PER OGNI $x\in[a,b]$.

DUNQUE IL TEOREMA SEGUE DAL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME (5 APRILE).

OSSERVAZIONE: OLTRE ALLA METRICA UNIFORME SI USA SPESSO LA METRICA DI L^2, O METRICA QUADRATICA, DATA DA

$$d(f,g)=\sqrt{\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}$$

LEGATA AL METODO DEI MINIMI QUADRATI E ANCHE ALLA TEORIA DELLA PROBABILITÀ.

VERIFICHIAMO CHE LO SPAZIO $C^0([a,b])$ CON QUESTA METRICA NON È COMPLETO: CERCHIAMO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $f_k: [a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUE E TALI CHE

$$\lim_{i,j\to+\infty} \int_a^b \left(f_i(x)-f_j(x)\right)^2 dx = 0$$

MA NON CONVERGENTE AD ALCUNA $f\in C^0([a,b])$.

ME 19 APR 2023

PRENDIAMO $f_k(x)=x^k$ PER $x\in[0,1]$ COSICCHÉ $f_k\in C^0([0,1])$. VERIFICHIAMO CHE $\int_0^1 (f_i-f_j)^2 dx \to 0$.

$$\int_0^1 (x^i-x^j)^2dx = \int_0^1 x^{2i}dx - 2\int_0^1 x^{i+j}dx + \int_0^1 x^{2j}dx = \frac{1}{2i+1} - \frac{2}{i+j+1} + \frac{1}{2j+1} \to 0.$$

OSSERVIAMO CHE LE $f_k(x)=x^k$ CONVERGONO ALLA FUNZIONE $f(x)\equiv 0$ IN MEDIA QUADRATICA, CIOÈ $d(f_k,f)=\sqrt{\int_0^1 \left(f_k(x)-f(x)\right)^2dx}$ TENDE A ZERO PER $k\to+\infty$: INFATTI

$$\int_0^1 \left(f_k(x)-f(x)\right)^2 dx = \int_0^1 x^{2k}dx = \frac{1}{2k+1}\to 0.$$

SICCOME $f\in C^0([0,1])$, QUESTO ESEMPIO NON CONFUTA LA COMPLETEZZA, MA VALE COME INDICAZIONE DEL MEDODO DA SEGUIRE.

PRENDIAMO ALLORA $f_k(x) = \begin{cases}(1-x)^k-1, & x\in[0,1]\\ 1-(1+x)^k, & x\in[-1,0)\end{cases}$

E VEDIAMO CHE $d(f_i,f_j)\to 0$ COME PRIMA, INOLTRE f_k TENDE A $f(x) = -\operatorname{sgn} x$ IN MEDIA QUADRATICA. ESSENDO $f\notin C^0([-1,1])$ POSSIAMO CONCLUDERE CHE $C^0([-1,1])$ NON È COMPLETO CON QUESTA METRICA.

 VE 21 APR 2023

DEFINIZIONE: UNA SUCCESSIONE DI ELEMENTI $x_k \in X$ (SPAZIO METRICO) TALE CHE $d(x_i, x_j) \xrightarrow[i,j\to+\infty]{} 0$ SI DICE SUCCESSIONE FONDAMENTALE O ANCHE SUCCESSIONE DI CAUCHY.

DEFINIZIONE: SE TUTTE LE SUCCESSIONI FONDAMENTALI A ELEMENTI $x_k \in X$ AMMETTONO LIMITE (IN X STESSO) SI DICE CHE X È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO.

ESEMPIO: L'INTERVALLO APERTO (a,b) NON È COMPLETO PERCHÉ LA SUCCESSIONE I CUI ELEMENTI SONO $x_k = a + \frac{1}{k} \in (a,b)$ PER $k > \frac{1}{b-a}$ È FONDAMENTALE IN QUANTO $x_i - x_j = \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \to 0$ E CONVERGE AD $a \notin (a,b)$. IDEM $(a, +\infty)$.

ESEMPIO: L'APERTO $B_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1 \}$ NON È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO PERCHÉ LA SUCCESSIONE $x_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) e_1$, ESSENDO $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ È FONDAMENTALE IN QUANTO $\|x_i - x_j\| = \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| \xrightarrow[i,j\to+\infty]{} 0$ PERÒ x_k CONVERGE A $e_1 \notin B_1(0)$.

NOTA: CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UN SOTTOINSIEME $S \subset X$ SIA COMPLETO È CHE S SIA CHIUSO: SE NON LO È, VUOL DIRE CHE $S \neq X$ ED ESISTE (ALMENO) UN $x \in DS \setminus S$ QUINDI ESISTONO $x_k \in S$ CONVERGENTI AD x. ESSENDO (x_k) FONDAMENTALE, LA TESI SEGUE.

RICORDIAMO CHE LA RETTA È EQUIPOTENTE AL SEGMENTO, AD ESEMPIO $y = \operatorname{arctg} x$ È UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA FRA $\mathbb{R}$ E $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \tanh x$ È UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA FRA $\mathbb{R}$ E $(-1,1)$, COME PURE $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

LO SPAZIO $\mathbb{R}^n$ SI PUÒ METTERE IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON LA PALLA $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ TRAMITE $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}$ LA CUI INVERSA È $\frac{y}{\sqrt{1-|y|^2}}$.

IDENTIFICANDO $\mathbb{R}^2$ CON $\mathbb{C}$ ABBIAMO LA CORRISPONDENZA $w = \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}$, $z = \frac{w}{\sqrt{1-|w|^2}}$.

OSSERVAZIONE: NELL'INSIEME $\mathbb{R}$ POSSIAMO DEFINIRE $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ E OTTENIAMO UNO SPAZIO METRICO NON COMPLETO: LA SUCCESSIONE FONDAMENTALE $x_k = k$ NON CONVERGE. NEL CAMPO $\mathbb{C}$ POSSIAMO DEFINIRE $d(z,w) = \left| \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} - \frac{w}{\sqrt{1+|w|^2}} \right|$.

 VE 21 APR 2023

4) DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE LIMITE.

ESEMPIO: LE FUNZIONI $f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE AD $f(x) = |x|$ SULL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$ IN QUANTO

$$0 < f_k(x) - f(x) = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{k}} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow 0$$

PERÒ $f(x)$ NON È DERIVABILE NEL PUNTO $x_0 = 0$ BENCHÉ

$f_k'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. NOTARE CHE

$f_k' \in C^0(\mathbb{R})$ E CONVERGONO ALLA FUNZIONE DISCONTINUA

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

QUINDI $f_k' \to g$ NON UNIFORMEMENTE. PRECISAMENTE SI HA $s_k = \sup_x |f_k'(x) - g(x)| = 1$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE HO UNA SUCCESSIONE DI f_k DERIVABILI IN UN INTERVALLO I CONVERGENTE IN ALMENO UN PUNTO $x_0 \in I$, E SE LA SUCCESSIONE DELLE f_k' CONVERGE UNIFORMEMENTE, ALLORA, POSTO $g(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k'(x)$, LE f_k CONVERGONO LOCALMENTE UNIFORMEMENTE AD UNA FUNZIONE DERIVABILE $f(x)$ LA CUI DERIVATA È $f'(x) = g(x)$ IN I, OVVERO

$$\left(\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\right)' = \lim_{k\to+\infty} f_k'(x).$$

ESEMPIO: SE $f_k(x) = k$ ALLORA $f_k'(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A $g(x) = 0$ MA LE f_k NON CONVERGONO.

DIMOSTRAZIONE DELL'ASSERTO: DIMOSTRIAMO CHE f_k CONVERGE LOCALMENTE UNIFORMEMENTE APPLICANDO IL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME: PRENDO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ E SO PER IPOTESI CHE $|f_i'(x) - f_j'(x)| < \varepsilon$ PER OGNI x ED OGNI $i, j \geq i_1$ OPPORTUNO; SO ANCHE CHE

$|f_i(x_0) - f_j(x_0)| < \varepsilon$ PER $i, j \geq i_2$ E DEFINISCO $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$. PER OGNI $i, j \geq i_0$ USO IL TEOREMA DI LAGRANGE PER SCRIVERE

$$\frac{f_i(x) - f_j(x)}{x - x_0} = \frac{f_i(x) - f_i(x_0) + f_i(x_0) - f_j(x_0) + f_j(x_0) - f_j(x)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{(f_i(x) - f_j(x)) - (f_i(x_0) - f_j(x_0)) + f_i(x_0) - f_j(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= (f_i - f_j)'(\xi) + \frac{f_i(x_0) - f_j(x_0)}{x - x_0} \quad \text{QUINDI}$$

$|f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon |x - x_0| + \varepsilon$ E PERCIÒ f_k CONVERGE LOCALMENTE UNIFORMEMENTE PER IL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME.

ESERCIZIO: POSTO $f_k(x) = \frac{x}{k}$, STABILIRE SE f_k E f_k' CONVERGONO UNIFORMENTE SU $\mathbb{R}$, E SE $f_k(x_0)$ CONVERGE NEL PUNTO $x_0 = 0$.

VE 21 APR 2023

SECONDA PARTE: IN FORZA DI QUANTO DIMOSTRATO, PRENDO ARBITRARIAMENTE $x_0 \in I$ E VERIFICO CHE

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{k\to+\infty} f_k'(x).$$

LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DELLO SCAMBIO DEI LIMITI NON APPENA VERIFICHIAMO CHE LA SUCCESSIONE

$\dfrac{f_k(x)-f_k(x_0)}{x-x_0}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE, PERCHÉ IN TAL CASO POTREMO SCRIVERE

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{k\to+\infty} \frac{f_k(x)-f_k(x_0)}{x-x_0} = $$

$$= \lim_{k\to+\infty}\lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)-f_k(x_0)}{x-x_0}. \quad \text{MA}$$

$\dfrac{f_k(x)-f_k(x_0)}{x-x_0}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE PER IL CRITERIO DI CAUCHY: INFATTI

$$\left|\frac{f_i(x)-f_i(x_0)}{x-x_0} - \frac{f_j(x)-f_j(x_0)}{x-x_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(f_i(x)-f_j(x)\right)-\left(f_i(x_0)-f_j(x_0)\right)}{x-x_0}\right| =$$

$$= \left|\left(f_i-f_j\right)'(\xi)\right| < \varepsilon \text{ PER } i,j \geq i_0.$$

LU 24 APR 2023

LE SERIE DI POTENZE E LE LORO NOTEVOLI PROPRIETÀ

RICORDIAMO CHE SE $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ È DERIVABILE $n+1$ VOLTE, $n\in\{0,1,2,\dots\}$ ALLORA, PRESI $x_0, x \in (a,b)$ DISTINTI, ESISTE (ALMENO) UN PUNTO c NELL'INTERVALLO APERTO AVENTE PER ESTREMI x_0 ED x TALE CHE

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + $$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE)

CON QUESTA FORMULA SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{PER OGNI } x\in\mathbb{R};$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{PER OGNI } x\in\mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{PER OGNI } x\in\mathbb{R}.$$

AD ESEMPIO, PONENDO $f(x)=\cos x$ E $x_0=0$ NELLA FORMULA DI TAYLOR TROVIAMO

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x - \frac{\left((\cos x)^{(2n+1)}\right)_{x=c}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

E SICCOME $\left|\dfrac{\left((\cos x)^{(2n+1)}\right)_{x=c}}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right| \leq \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

LA TESI SEGUE. QUESTI ESEMPI, INSIEME A TANTI ALTRI, MOTIVANO LA DEFINIZIONE.

DEFINIZIONE: UNA SERIE DI POTENZE È UNA SERIE DI FUNZIONI AVENTE LA FORMA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, CON (a_k) UNA SUCCESSIONE NUMERICA ARBITRARIA.

CENNI STORICI: USATE INTENSIVAMENTE NEL PERIODO CLASSICO (SETTECENTO) PER EQUIPARARE LE FUNZIONI TRASCENDENTI $(e^x, \operatorname{sen} x, \dots)$ AI POLINOMI $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (NON SEMPRE RIGOROSAMENTE).

OBIETTIVI: TROVARE I VALORI DI x TALI CHE LA SERIE CONVERGE E STABILIRE SE LA SERIE SI PUÒ INTEGRARE TERMINE A TERMINE, CIOÈ SE

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_a^b x^k \, dx.$$

AD ESEMPIO, PONENDO $x = -t^2$ NELL'IDENTITÀ $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ OTTENIAMO $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$

E VOGLIAMO SAPERE SE $\int_a^b e^{-t^2} dt =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^b t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{b^{2k+1} - a^{2k+1}}{2k+1}.$$

SIMILMENTE, VOGLIAMO SAPERE SE

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

(DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE).

OSSERVAZIONE: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ NEL PUNTO $x=0$ CONVERGE BANALMENTE ALLA SOMMA $S(0) = a_0$ PERCHÉ $a_k x^k = 0$ PER OGNI $k \geq 1$ QUANDO $x = 0$.

LU 24 APR 2023

ESEMPIO: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} k^k x^k$ CONVERGE SOLO PER $x=0$ PERCHÉ PER $x \neq 0$ SI HA CHE $\lim_{k\to+\infty} |k^k x^k| = \lim_{k\to+\infty} |kx|^k = +\infty$

QUINDI NON È SODDISFATTA LA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE UNA SERIE DI POTENZE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE SOLO PER $x=0$ OPPURE CONVERGE IN UN INTERVALLO APERTO $(-r, r)$ EVENTUALMENTE $(-\infty, +\infty)$. NEL CASO IN CUI $r \in (0, +\infty)$ LA SERIE CONVERGE O MENO PER $x = \pm r$ A SECONDA DEI COEFFICIENTI.

ESEMPI: $\sum_{k=0}^{+\infty} k^k x^k$ CONVERGE SOLO PER $x=0$; $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ CONVERGE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$; $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ CONVERGE PER $x \in (-1, 1)$.

ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ CONVERGE PER $x \in [-1, 1)$:

PER $x = -1$ DIVENTA $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ E CONVERGE PER IL CRITERIO DI LEIBNIZ; PER $x \in (-1, 1)$ CONVERGE PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO IN QUANTO $\frac{k}{k+1} x \xrightarrow[k\to+\infty]{} x \in (-1,1)$; PER $x=1$ DIVENTA $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ E SE $|x| > 1$ NON SODDISFA LA CONDIZIONE NECESSARIA IN QUANTO $\left| \frac{x^k}{k} \right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

LU 24 APR 2023

ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ CONVERGE PER $x \in (-1, 1]$.

ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$ CONVERGE PER $x \in [-1, 1]$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE UNA SERIE DI POTENZE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE SOLO PER $x=0$ OPPURE CONVERGE IN UN INTERVALLO APERTO $(-r, r)$ EVENTUALMENTE $(-\infty, +\infty)$. NEL CASO IN CUI $r \in (0, +\infty)$ LA SERIE CONVERGE O MENO PER $x = \pm r$ A SECONDA DEI COEFFICIENTI a_k.

LA TESI È UN COROLLARIO DEL SEGUENTE LEMMA:

LEMMA: SE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE IN UN PUNTO $x_0 \neq 0$ ALLORA CONVERGE TOTALMENTE IN OGNI INTERVALLO $[-\delta, \delta]$ CON $\delta < |x_0|$.

COROLLARIO: PER L'ARBITRARIETÀ DI δ, LA SERIE CONVERGE PER OGNI $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

COROLLARIO: L'INSIEME DEI VALORI DI x DOVE LA SERIE CONVERGE È UN INTERVALLO, EVENTUALMENTE ILLIMITATO, I CUI ESTREMI SONO SIMMETRICI RISPETTO ALL'ORIGINE.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. SO PER IPOTESI CHE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$ CONVERGE, E PERCIÒ (CONDIZIONE NECESSARIA) $\lim_{k \to +\infty} a_k x_0^k = 0$.

PRENDO $\delta \in (0, |x_0|)$ E VOGLIO VERIFICARE CHE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE TOTALMENTE NELL'INTERVALLO $[-\delta, \delta]$.

APPLICANDO LA DEFINIZIONE, VEDIAMO SE $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k$ CONVERGE, ESSENDO $s_k = \sup_{[-\delta, \delta]} |a_k x^k| = |a_k| \delta^k$. SCRIVIAMO $\delta = q |x_0|$ CON $q = \frac{\delta}{|x_0|} \in (0,1)$ E FISSIAMO k_0 TALE CHE $|a_k x_0^k| < 1$ PER OGNI $k \geq k_0$. ALLORA

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} s_k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} |a_k| \delta^k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} |a_k x_0^k| q^k < \sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{k_0}}{1-q} < +\infty$$

E QUINDI LA SERIE $\sum_{k=k_0}^{+\infty} s_k$ CONVERGE PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO.

SI PONE IL PROBLEMA DI STABILIRE SE UNA SERIE DI POTENZE CONVERGE SOLO NELL'ORIGINE OPPURE IN UN INTERVALLO (CON INTERNO NON VUOTO), NEL QUAL CASO VORREMMO TROVARNE IL RAGGIO.
UN PROCEDIMENTO GENERALE È IL SEGUENTE:
PONIAMO $L = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \text{"}\lim_{k \to +\infty}\text{"} \sqrt[k]{|a_k|}$.

SE $L = +\infty$ LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE SOLO PER $x = 0$. SE $L = 0$ LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. SE $L \in (0, +\infty)$ LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE NELL'INTERVALLO $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ ED EVENTUALMENTE IN UNO O ENTRAMBI GLI ESTREMI.

 ME 26 APR 2023

OSSERVAZIONE: SE ESISTE IL $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ (IL CHE PRESUPPONE $a_k\neq 0$ PER OGNI k) ALLORA:

1) SE $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=+\infty$ LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ CONVERGE SOLO PER $x=0$;

2) SE $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=0$ LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ CONVERGE PER OGNI $x\in(-\infty,+\infty)$;

3) SE $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\frac{1}{r}\in(0,+\infty)$ ALLORA LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ CONVERGE PER OGNI $x\in(-r,r)$ E NON CONVERGE SE $|x|>r$.

LA TESI SEGUE DAL CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SERIE NUMERICHE: DATA UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}b_k$ CON $b_k\neq 0$ PER OGNI k, SE IL LIMITE DI $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|$ ESISTE FINITO ED È MINORE DI 1, ALLORA LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE; SE, INVECE, $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|>1$ (ANCHE $+\infty$), LA SERIE NON CONVERGE. VERIFICHIAMO L'OSSERVAZIONE:

PRENDIAMO $x\neq 0$ E STUDIAMO LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}b_k$ ESSENDO $b_k=a_k x^k$. PER APPLICARE IL CRITERIO DEL RAPPORTO, CONSIDERIAMO $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|=\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||x|$.

1) SE $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=+\infty$ ALLORA $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|\to+\infty$ E LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ NON CONVERGE;

2) SE $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=0$ ALLORA $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|\to 0$ E LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ CONVERGE;

3) SE $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\frac{1}{r}\in(0,+\infty)$ E PRENDO $|x|\in(0,r)$ ALLORA $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|=\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||x|\longrightarrow\frac{|x|}{r}<1$ E LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ CONVERGE. SE, INVECE, PRENDO $|x|>r$ ALLORA $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|\longrightarrow\frac{|x|}{r}>1$ E LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ NON CONVERGE.

OVVIAMENTE, IN QUESTO TERZO CASO SI HA $r=\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

ESEMPIO: SICCOME I COEFFICIENTI DI x^{2k+1} NELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ SONO TUTTI NULLI, PONIAMO $x^2=t$ E CONSIDERIAMO $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{(2k)!}$ E PONIAMO $a_k=\frac{1}{(2k)!}$. SICCOME $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{(2k)!}{(2k+2)!}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(2k+2)(2k+1)}=0$$

LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{(2k)!}$ CONVERGE PER OGNI t E QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ CONVERGE PER OGNI x.

ME 26 APR 2023

DERIVABILITÀ DELLE SERIE DI POTENZE

TEOREMA: SE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE IN UN INTERVALLO $(-r, r)$ ALLORA, POSTO $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, RISULTA $f \in C^\infty((-r,r))$ E PER OGNI $i \in \mathbb{N}$ SI HA CHE $f^{(i)}(x) =$

$$= \sum_{k=i}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-i+1)\, a_k\, x^{k-i}.$$

LA TESI SI DIMOSTRA PER INDUZIONE. PONIAMO $i=1$ E VERIFICHIAMO CHE $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$.

LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DELLA DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE $f(x)$ LIMITE DI $S_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ DIMOSTRATO IL 21/04 VERIFICANDO CHE $S_m'(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE IN OGNI INTERVALLO $[-\delta, \delta] \subset (-r, r)$. DERIVANDO $S_m(x)$ TROVIAMO $S_m'(x) = \sum_{k=1}^{m} k a_k x^{k-1}$. VERIFICHIAMO CHE LA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE USANDO IL CRITERIO DI WEIERSTRASS: SI HA $s_k = \sup_{[-\delta,\delta]} |k a_k x^{k-1}| = k|a_k|\delta^{k-1}$

E VOGLIAMO VERIFICARE CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} k|a_k|\delta^{k-1} < +\infty$.

PRENDO UN PUNTO A PIACERE $x_0 \in (\delta, r)$.

OSSERVAZIONE « LA CONVERGENZA TOTALE IMPLICA LA CONVERGENZA ASSOLUTA »: DATA UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ PONIAMO $f_k(x) = |g_k(x)|$.

ALLORA $s_k = \sup |g_k(x)| = \sup |f_k(x)|$ E QUINDI LA TOTALE CONVERGENZA DI $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ EQUIVALE ALLA TOTALE CONVERGENZA DELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} |g_k(x)|$ LA QUALE IMPLICA LA CONVERGENZA PUNTUALE DI $\sum_{k=0}^{+\infty} |g_k(x)|$ DA CUI LA TESI.

TORNIAMO ALLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA.

AVENDO PRESO UN PUNTO A PIACERE $x_0 \in (\delta, r)$ POSSIAMO SCRIVERE $\delta = q x_0$ CON $q = \frac{\delta}{x_0} \in (0,1)$

E QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty} k|a_k|\delta^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k q^{k-1}}{x_0} |a_k| x_0^k$

MA SICCOME $\lim_{k\to+\infty} \frac{k q^{k-1}}{x_0} = 0$ ESISTE k_0 TALE CHE PER OGNI $k \geq k_0$ SI HA $\frac{k q^{k-1}}{x_0} < 1$ QUINDI

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} k|a_k|\delta^{k-1} < \sum_{k=k_0}^{+\infty} |a_k| x_0^k < +\infty$$

DUNQUE LA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k$ CONVERGE TOTALMENTE IN $[-\delta, \delta] \subset (-r, r)$. SICCOME δ È ARBITRARIO, SI HA $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ PER OGNI $x \in (-r, r)$.

OSSERVAZIONE: ALLA LUCE DEL TEOREMA PRECEDENTE POSSIAMO, A PARTIRE DA UNA SERIE DI POTENZE CONVERGENTE IN UN INTERVALLO $(-r,r)$, DETERMINARE LA SERIE DI MACLAURIN DELLA FUNZIONE $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, CIOÈ LA SERIE

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

SAPPIAMO CHE $f^{(i)}(x)=$

$$=\sum_{k=i}^{+\infty}k(k-1)\cdots(k-i+1)\,a_k\,x^{k-i}$$

PER OGNI $x\in(-r,r)$, QUINDI $f^{(i)}(0)=i!\,a_i$ E DI CONSEGUENZA

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i x^i$$

DUNQUE ESSA CONVERGE IN $(-r,r)$ AD $f(x)$.

APPLICAZIONE: TROVARE LA SERIE DI MACLAURIN DI UNA FUNZIONE SENZA CALCOLARNE LE DERIVATE (VEDI R. COURANT: DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS). SAPENDO CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$$

PER OGNI $x\in(-1,1)$ PONIAMO $x=-t^2$ PER $t\in(-1,1)$ E TROVIAMO

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{2k}=\frac{1}{1+t^2}.$$

PER L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE, LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{2k}$$

È LA SERIE DI MACLAURIN DELLA FUNZIONE $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$. QUESTA FUNZIONE RISPONDE ALLA DOMANDA 1.30 DEL TESTO DI ESERCIZI: INFATTI $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ MA LA SERIE DI MACLAURIN NON CONVERGE PER $|t|\geq 1$.

CI SONO ANCHE FUNZIONI DI CLASSE $C^\infty(\mathbb{R})$ CHE NON COINCIDONO CON LA SOMMA DELLA LORO SERIE DI MACLAURIN IN NESSUN INTORNO DI 0, LA CUI SCOPERTA È ATTRIBUITA A CAUCHY (VEDI KLINE, STORIA DEL PENSIERO MATEMATICO).

SFRUTTIAMO IL FATTO CHE $\lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0$ PER OGNI $n\in\mathbb{N}$. POSTO $x=-1/t$ OTTENIAMO

$$\lim_{t\to0^+}\frac{e^{-1/t}}{t^n}=0.$$

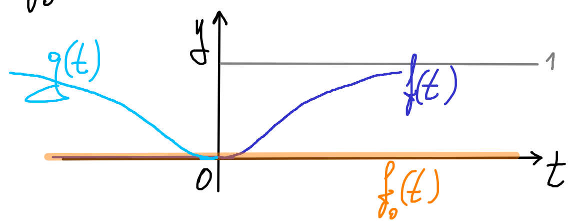
QUINDI LA FUNZIONE

$$f(t)=\begin{cases}e^{-1/t}, & t\in(0,+\infty)\\ 0, & t\in(-\infty,0]\end{cases}$$

È DI CLASSE $C^\infty(\mathbb{R})$ E TALE CHE $f^{(k)}(0)=0$ PER OGNI k, DUNQUE LA SUA SERIE DI MACLAURIN È LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k=\sum_{k=0}^{+\infty}0$$

E CONVERGE A $f_0(t)=0$ PER OGNI $t\in\mathbb{R}$ MA $f(t)\neq f_0(t)$ PER OGNI $t\in(0,+\infty)$:



NELLO STESSO ORDINE DI IDEE POSSIAMO DEFINIRE

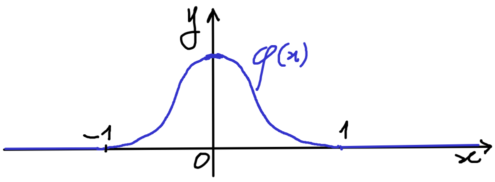
$$g(t)=\begin{cases}e^{-1/|t|}, & t\neq0\\ 0, & t=0\end{cases}$$

E LA SERIE DI MACLAURIN $\sum_{k=0}^{+\infty}0$ CONVERGE A $f_0(t)$ PER OGNI $t\in\mathbb{R}$, DUNQUE $g(t)=f_0(t)$ SE E SOLO SE $t=0$.

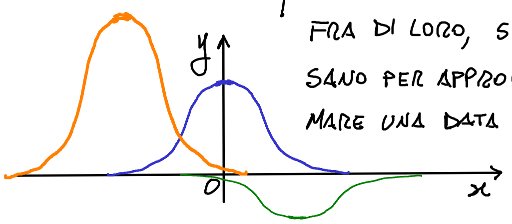
FRA TALI FUNZIONI UN POSTO DI RILIEVO SPETTA ALLE FUNZIONI A CAMPANA COME AD ESEMPIO

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & x \in (-1,1) \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

LA CUI SERIE DI TAYLOR $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$ È LA SERIE BANALE $\sum_{k=0}^{+\infty} 0$.



LE FUNZIONI DEL TIPO $C\varphi(x-x_0)$, SOMMATE FRA DI LORO, SI USANO PER APPROSSIMARE UNA DATA $f(x)$



TORNANDO ALLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2}$ PER $t \in (-1,1)$, IL TEOREMA DI INTEGRAZIONE DEL 4 APRILE, PIÙ LA CONVERGENZA UNIFORME NELL'INTERVALLO $[-x,x] \subset (-1,1)$ GARANTITA DAL LEMMA DEL 24 APRILE, IMPLICA CHE $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} =$

$$= \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{PER } x \in (-1,1).$$

UNA DOMANDA INTERESSANTE: VISTO CHE LA SERIE CONVERGE ANCHE PER $x = \pm 1$, SI PUÒ DIRE CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \ ?$$

SÌ: LEZIONE DEL 5/5

GI 27 APR 2023

UTILIZZANDO LE PROPRIETÀ DELLE SERIE, È FACILE TROVARE LA SOMMA DELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ CHE CONVERGE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ (26/04): SCRIVENDO $-x$ IN LUOGO DI x NELLA SERIE $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ OTTENIAMO $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$,

QUINDI, SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO, TROVIAMO

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

UN DUBBIO DOVEROSO: È LEGITTIMO SOMMARE MEMBRO A MEMBRO?

UN'ALTRA NOTEVOLE APPLICAZIONE DELLE SERIE DI POTENZE STA NELLA POSSIBILITÀ DI DEFINIRE

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{PER OGNI } z \in \mathbb{C}.$$

AD ESEMPIO, SE $z = i\theta$ CON $\theta \in \mathbb{R}$ E i L'UNITÀ IMMAGINARIA, SI OTTIENE $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!} =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k}\theta^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k+1}\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$= \cos\theta + i \,\operatorname{sen}\theta$ LA FAMOSISSIMA FORMULA DI EULERO. IN PARTICOLARE, PONENDO $\theta = \pi$ OTTENIAMO

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

VE 28 APR 2023

SERIE TRIGONOMETRICHE, DETTE ANCHE SERIE DI FOURIER

HANNO LA FORMA $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)$

CON $a_0, a_1, a_2, \dots$ E $b_1, b_2, b_3, \dots$ COSTANTI REALI.

SERVONO PER APPROSSIMARE FUNZIONI $f(x)$

1) DEFINITE SU DI UN INTERVALLO LIMITATO;

2) DEFINITE SU TUTTO $\mathbb{R}$ E PERIODICHE:

UNA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ SI DICE PERIODICA DI PERIODO $T\in(0,+\infty)$ SE $f(x+T)=f(x)$ PER OGNI $x\in\mathbb{R}$.

APPLICAZIONE ORIGINALE: NEL MODELLO DI FOURIER LA TEMPERATURA $u(x,t)$ DI UN CORPO SEDE DI CONDUZIONE DEL CALORE SODDISFA L'EQUAZIONE $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$ DOVE $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ È L'OPERATORE DI LAPLACE. IN PARTICOLARE SE IL CORPO HA LA FORMA DI UN ANELLO L'EQUAZIONE SI RIDUCE A $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ ESSENDO $\alpha\in[-\pi,\pi)$ LA VARIABILE ANGOLARE. VERIFICHIAMO CHE LE FUNZIONI $e^{-\lambda_n t}\cos n\alpha$ E $e^{-\lambda_n t}\operatorname{sen} n\alpha$ SODDISFANO L'EQUAZIONE:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\lambda_n t}\cos n\alpha\right)=-\lambda_n e^{-\lambda_n t}\cos n\alpha$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(e^{-\lambda_n t}\cos n\alpha\right)=-n^2 e^{-\lambda_n t}\cos n\alpha$$

CON $\lambda_n=n^2$ PER $n=1,2,3,\dots$ COME ANCHE LE FUNZIONI COSTANTI. SE DUNQUE LA SERIE

$$\frac{a_0}{2}+e^{-n^2 t}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\alpha+b_n\operatorname{sen} n\alpha\right)$$

CONVERGE AD UNA FUNZIONE $u(\alpha,t)$ E SI PUÒ DERIVARE TERMINE A TERMINE, ANCHE $u(\alpha,t)$ È SOLUZIONE.

SUPPONIAMO DI CONOSCERE LA TEMPERATURA INIZIALE $u_0(\alpha)$ DELL'ANELLO E VOGLIAMO DETERMINARE $u(\alpha,t)$ SOLUZIONE DI $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ PER $t>0$ TALE CHE $u(\alpha,0)=u_0(\alpha)$ FUNZIONE DATA.

CERCHIAMO a_n, b_n IN MODO TALE CHE, POSTO $t=0$ NELLA SERIE PRECEDENTE, SI ABBIA

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\alpha+b_n\operatorname{sen} n\alpha\right)=u_0(\alpha)$$

CON QUESTI VALORI DEI COEFFICIENTI, DEFINIAMO

$$u(\alpha,t)=\frac{a_0}{2}+e^{-n^2 t}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\alpha+b_n\operatorname{sen} n\alpha\right)$$

E CI ASPETTIAMO CHE ESSA RISOLVA IL PROBLEMA

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(\alpha,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(\alpha,t) & \text{PER } (\alpha,t)\in(-\pi,\pi)\times(0,+\infty)\\ u(\alpha,0)=u_0(\alpha) & \text{PER } \alpha\in(-\pi,\pi)\end{cases}$$

APPLICAZIONE MODERNA: FORMATO JPEG

CARATTERISTICA TIPICA: LA BUONA APPROSSIMAZIONE DELLA FUNZIONE GENERATRICE IN TUTTO UN INTERVALLO, SENZA CHE LA FUNZIONE STESSA SIA DERIVABILE!

TEOREMA: AFFINCHÉ LA SERIE $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx\right)$ CONVERGA UNIFORMEMENTE AD UNA $f(x)$ IN $[-\pi,\pi]$ È NECESSARIO CHE: 1) $f\in C^0([-\pi,\pi])$; 2) $f(-\pi)=f(\pi)$; 3) CHE I COEFFICIENTI ABBIANO I VALORI $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ PER $n\geq 0$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx \quad \text{PER } n\geq 1.$$

 VE 28 APR 2023

DIMOSTRAZIONE: 1) SEGUE DALLA CONTINUITÀ DEL LIMITE UNIFORME (5 APRILE). 2) PER DIMOSTRARE CHE $f(-\pi)=f(\pi)$ BASTA OSSERVARE CHE LA SOMMA RIDOTTA $S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx+b_k \operatorname{sen} kx)$ È PERIODICA DI PERIODO 2π. IN PARTICOLARE SI HA $S_m(-\pi)=S_m(\pi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k a_k$. ESSENDO PER IPOTESI $f(x)=\lim_{m\to+\infty}S_m(x)$ LA TESI SEGUE.

3) VERIFICHIAMO CHE PER OGNI $k_1\neq k_2=0,1,2,\dots$ ED $n_1\neq n_2=1,2,3,\dots$ SI HA $\int_{-\pi}^{\pi}\cos k_1x\cos k_2x\,dx=0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} n_1x\operatorname{sen} n_2x\,dx=0;\quad \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} n_1x\cos k_1x\,dx=0$$

(RELAZIONI DI ORTOGONALITÀ). L'ULTIMA DISCENDE DAL FATTO CHE $\int_{-z}^{z}g(x)\,dx=0$ SE g È DISPARI:

$\int_{-z}^{z}g(x)\,dx=\int_{-z}^{0}g(x)\,dx+\int_{0}^{z}g(x)\,dx$ E PONGO $x=-t$ NEL PRIMO INTEGRALE, $x=t$ NEL SECONDO, OTTENENDO $\int_{-z}^{z}g(x)\,dx=-\int_{z}^{0}g(-t)\,dt+\int_{0}^{z}g(t)\,dt$

$=\int_{0}^{z}\left(g(-t)+g(t)\right)dt=0$. LE PRIME DUE SI POSSONO VERIFICARE USANDO LE FORMULE DI WERNER:

SOMMANDO $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ SI OTTIENE $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$ E SOTTRAENDO $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

AD ESEMPIO: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos k_1x\cos k_2x\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k_1+k_2)x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k_1-k_2)x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(k_1+k_2)x}{k_1+k_2}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(k_1-k_2)x}{k_1-k_2}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

PERCHÉ $k_1\neq k_2$. USANDO LE RELAZIONI DI ORTOGONALITÀ, E SUPPONENDO CHE LA SOMMA RIDOTTA $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx)$ CONVERGA UNIFORMEMENTE A $f(x)$ IN $[-\pi,\pi]$, VERIFICHIAMO CHE $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$. PER IL TEOREMA DI INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE, TROVIAMO

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}kx\,dx\right)$$

$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=\pi a_0$ DA CUI LA TESI. SI NOTI CHE $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$ MEDIA INTEGRALE. VERIFICHIAMO CHE

$a_j=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos jx\,dx$ PER $j\geq 1$. OSSERVIAMO CHE

$S_n(x)\cos jx\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)\cos jx$ UNIFORMEMENTE

PERCHÉ $\left|S_n(x)\cos jx-f(x)\cos jx\right|\leq\left|S_n(x)-f(x)\right|$,

QUINDI $f(x)\cos jx=\frac{a_0}{2}\cos jx+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos kx\cos jx+\right.$

$\left.+b_k\operatorname{sen}kx\cos jx\right)$ E POSSO INTEGRARE TERMINE A TERMINE:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos jx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos jx\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}kx\cos jx\,dx\right)$$

QUINDI $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos jx\,dx = a_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 jx\,dx = \pi a_j$

E SIMILMENTE $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,jx\,dx = \pi b_j$.

VICEVERSA: SE 1) $f \in C^1([-\pi,\pi])$;

2) $f(-\pi) = f(\pi)$; 3) DEFINISCO

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ PER $n \geq 0$,

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$ PER $n \geq 1$, LA SERIE

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD $f(x)$ SULL'INTERVALLO $[-\pi,\pi]$.

MA 02 MAG 2023

PER ARRIVARE ALLA DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA DI CONVERGENZA, COMINCIAMO A STUDIARE L'UGUAGLIANZA DI PARSEVAL (IL TEOREMA DI PITAGORA IN DIMENSIONE INFINITA):

DATA $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE, I PRODOTTI $f(x)\cos kx$ E $f(x)\,\mathrm{sen}\,kx$ SONO INTEGRABILI E POSSIAMO DEFINIRE a_k, b_k. RISULTA

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

PER LA DIMOSTRAZIONE, PONIAMO $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx)$ E CALCOLIAMO

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\cos jx\,dx$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\,\mathrm{sen}\,jx\,dx$

PER $j \leq n$.

PER LA LINEARITÀ DELL'INTEGRALE, SI HA

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\cos jx\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos jx\,dx + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx + \frac{1}{\pi}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,kx\cos jx\,dx\right)$$

$= \frac{1}{\pi}\frac{a_0}{2}2\pi = a_0$ SE $j=0$;

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\cos jx\,dx = \frac{1}{\pi}a_j\pi = a_j$ SE $j \in [1,n]$,

E SIMILMENTE $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\,\mathrm{sen}\,jx\,dx = b_j$, $j \leq n$.

PRENDIAMO ALLORA UNA FUNZIONE $g(x)$ TALE CHE

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = a_k$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = b_k$

PER $k \leq n$ E VERIFICHIAMO CHE

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,S_n(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

PER LA LINEARITÀ DELL'INTEGRALE, SI HA

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,S_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\,dx + b_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx\right)$$

$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$ COME AFFERMATO.

IN PARTICOLARE, PRENDENDO $g(x) = f(x)$ E $g(x) = S_n(x)$ SI TROVA $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,S_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x)\,dx =$

$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$.

MA 02 MAG 2023

OSSERVIAMO, INFINE, CHE $0 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2 dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_m(x)\,dx +$

$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_m^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_m^2(x)\,dx$

QUINDI $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx +$

$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2 dx \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

PER L'ARBITRARIETÀ DI n, E SICCOME LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI NON SONO INDETERMINATE,

SI HA $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

DISUGUAGLIANZA DI BESSEL.

IN EFFETTI, SICCOME $S_m \to f$ NELLA METRICA DI L^2 (19/04), L'INTEGRALE $\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2 dx$ TENDE A ZERO E QUINDI VALE L'UGUAGLIANZA DI PARSEVAL.

TEOREMA DI RIEMANN: SE f È INTEGRABILE SULL'INTERVALLO $[-\pi,\pi]$ ALLORA ANCHE I PRODOTTI $f(x)\cos kx$ E $f(x)\,\mathrm{sen}\,kx$ LO SONO E RESTANO DEFINITI a_k E b_k. RISULTA $a_k, b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

DIMOSTRAZIONE: LA SERIE $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$ CONVERGE, QUINDI NECESSARIAMENTE $a_k, b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

PER PROCEDERE, POSTO $D_m(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\cos kx$ NUCLEO DI DIRICHLET, VERIFICHIAMO CHE

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\cos kx = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{2m+1}{2}x}{2\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}} \quad \text{PER } x \neq 2k\pi$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\cos kx\right)_{x=2k\pi} = \frac{2m+1}{2\pi}$$

IN GENERALE, IL NUCLEO DI UN OPERATORE INTEGRALE $f \longmapsto \int_a^b f(x)K(x)\,dx$ È LA FUNZIONE $K(x)$.

PER VERIFICARE L'UGUAGLIANZA

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\cos kx = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{2m+1}{2}x}{2\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}} \quad \text{PER } x \neq 2k\pi$$

MOLTIPLICHIAMO PER $2\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$ E LA SOMMA

$\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{m} 2\cos kx\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$ SI SEMPLIFICA USANDO UNA FORMULA DI WERNER: $2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = \mathrm{sen}(\alpha+\beta) + -\mathrm{sen}(\alpha-\beta)$ CHE SI OTTIENE SOTTRAENDO $\mathrm{sen}(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$ DA $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$. SI OTTIENE

$$\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{m} 2\cos kx\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} = \mathrm{sen}\,\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left(\mathrm{sen}\,\frac{2k+1}{2}x + -\,\mathrm{sen}\,\frac{2k-1}{2}x\right) = \mathrm{sen}\,\frac{x}{2} + \left(\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}x - \mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right) +$$

$$+\left(\mathrm{sen}\,\frac{5}{2}x - \mathrm{sen}\,\frac{3}{2}x\right) + \ldots + \left(\mathrm{sen}\,\frac{2m+1}{2}x - \mathrm{sen}\,\frac{2m-1}{2}\right) =$$

$= \mathrm{sen}\,\frac{2m+1}{2}x$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

SI NOTI CHE $\int_0^{\pi} D_m(x)\,dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{2\pi}\,dx +$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx = \frac{1}{2} = \int_{-\pi}^{0} D_m(x)\,dx$$

MA 02 MAG 2023

DEFINIZIONE: DIREMO CHE $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ È **REGOLARE A TRATTI** SE ESISTONO $n+1$ PUNTI (CON n INTERO POSITIVO) CHE INDICHEREMO CON $x_0=-\pi < x_1 < x_2 < \dots < x_n=\pi$ TALI CHE PER OGNI $k\in\{1,\dots,n\}$ SI HA $f\in C^1((x_{k-1},x_k))$ ED ESISTONO FINITI I LIMITI $\lim\limits_{x\to x_{k-1}^+} f(x)$,

$$\lim_{x\to x_{k-1}^+} f'(x),\quad \lim_{x\to x_k^-} f(x),\quad \lim_{x\to x_k^-} f'(x).$$

ESEMPI: $f(x)=\frac{x}{2}$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=|x|$, $f(x)=\operatorname{sgn} x$. NON È REGOLARE A TRATTI $f(x)=$

ESERCIZIO.

ALTRO ESERCIZIO: L'IPOTESI CHE I LIMITI

$\lim\limits_{x\to x_{k-1}^+} f(x)$ E $\lim\limits_{x\to x_k^-} f(x)$ ESISTANO FINITI

È SUPERFLUA: PERCHÉ?

TEOREMA: SE $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ È REGOLARE A TRATTI, ALLORA I PRODOTTI $f(x)\cos kx$ E $f(x)\sin kx$ SONO INTEGRABILI E PER OGNI $x\in[-\pi,\pi]$ SI HA

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

DOVE $f(x^\pm)=\lim\limits_{t\to x^\pm} f(t)$ SE $x\in(-\pi,\pi)$ E

SI DEFINISCONO $f(\pi^+)=\lim\limits_{x\to(-\pi)^+} f(x)$ E

$f((-\pi)^-)=\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$.

OSSERVAZIONE: SE f È CONTINUA NEL PUNTO $x\in(-\pi,\pi)$ ALLORA $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)=f(x)$.

ME 03 MAG 2023

OSSERVAZIONE: SE $\lim\limits_{x\to(-\pi)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=l$

ALLORA $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k\cos k\pi=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k\cos k(-\pi)=l$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI CONVERGENZA.

PER LA LINEARITÀ DELL'INTEGRALE, RICORDANDO LA DEFINIZIONE DI a_k, b_k POSSIAMO SCRIVERE

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx\right)\right)dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt$$

VOGLIAMO VERIFICARE CHE $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

ESPRIMIAMO $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ COME UN INTEGRALE. SI HA:

$$\frac{1}{2}f(x^+)=f(x^+)\int_0^{\pi} D_n(t)\,dt=f(x^+)\int_x^{x+\pi} D_n(s-x)\,ds$$

$$\frac{1}{2}f(x^-)=f(x^-)\int_{x-\pi}^{x} D_n(s-x)\,ds$$ E SOMMANDO

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\int_{x-\pi}^{x+\pi}\varphi(s)\,D_n(s-x)\,ds$$ DOVE

$$\varphi(s)=\begin{cases} f(x^+) & \text{SE } s\in[x,\,x+\pi) \\ f(x^-) & \text{SE } s\in[x-\pi,\,x) \end{cases}$$

PER TRASFORMARE L'INTERVALLO $[x-\pi,\,x+\pi]$ IN $[-\pi,\pi]$ SFRUTTIAMO LA PERIODICITÀ DELLA FUNZIONE INTEGRANDA.

CI SERVE DEFINIRE φ FUORI DI $[x-\pi, x+\pi)$, COSA CHE FACCIAMO PER PERIODICITÀ 2π, CIOÈ DEFINIAMO L'ESTENSIONE $\tilde{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PONENDO

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{se } t \in [x-\pi, x+\pi) \\ \varphi(s) & \text{se } t-s = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ & \text{e } s \in [x-\pi, x+\pi). \end{cases}$$

COSÌ FACENDO, ABBIAMO

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \varphi(s)\, D_m(s-x)\, ds =$$

$$= \int_{x-\pi}^{x+\pi} \tilde{\varphi}(s)\, D_m(s-x)\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}(s)\, D_m(s-x)\, ds.$$

FINALMENTE POSSIAMO SCRIVERE $S_m(x) - \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \tilde{\varphi}(t)\right) D_m(t-x)\, dt \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

PER IL TEOREMA DI RIEMANN. RICORDIAMO INFATTI CHE

$$D_m(t-x) = \frac{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2}(t-x)}{2\pi \operatorname{sen} \frac{t-x}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(m(t-x) + \frac{t-x}{2}\right)}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t-x}{2}} = \frac{\cos\frac{t-x}{2} \operatorname{sen} m(t-x)}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t-x}{2}} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}\frac{t-x}{2} \cos m(t-x)}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}.$$

IL PUNTO DA CONSIDERARE È CHE IL DENOMINATORE $2\operatorname{sen}\frac{t-x}{2} \sim t-x$ PER $t \to x$ SI ANNULLA PER $t = x$ METTENDO COSÌ IN DUBBIO L'INTEGRABILITÀ DEI FATTORI CHE MOLTIPLICANO $\operatorname{sen} m(t-x)$ E $\cos m(t-x)$. PER SUPERARE QUESTO OSTACOLO SFRUTTIAMO LA REGOLARITÀ A TRATTI DI f.

SCRIVIAMO L'INTEGRANDA $\left(f(t) - \tilde{\varphi}(t)\right) D_m(t-x)$

$$= \frac{f(t)-\tilde{\varphi}(t)}{t-x} \cdot \frac{t-x}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t-x}{2}} \cdot \left(\cos\frac{t-x}{2} \operatorname{sen} m(t-x) + \operatorname{sen}\frac{t-x}{2} \cos m(t-x)\right).$$

SI VEDE CHE IL FATTORE CHE MOLTIPLICA $\operatorname{sen} m(t-x)$ È IL PRODOTTO DI:

1) $\cos\frac{t-x}{2}$ CHE È DI CLASSE C^∞;

2) $\dfrac{t-x}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}$ CHE HA UNA DISCONTINUITÀ ELIMINABILE IN $t = x$ (CON VALORE $\frac{1}{\pi}$) ED È SINGOLARE ANCHE PER $t = x \pm 2\pi \notin [-\pi, \pi]$ SE $x \in (-\pi, \pi)$.

COME PROCEDIAMO SE $x = -\pi$ E $t = \pi$ O VICEVERSA?

NON INTRODUCIAMO $t-x$ MA CONSIDERIAMO DIRETTAMENTE IL RAPPORTO $\dfrac{f(t)-\tilde{\varphi}(t)}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}$ CHE HA LIMITI FINITI PER $t \to x^\pm$ ANCHE NEL CASO $x = \pm\pi$.

3) $\dfrac{f(t)-\tilde{\varphi}(t)}{t-x}$ CHE AMMETTE LIMITI FINITI

$$\lim_{t \to x^\pm} \frac{f(t)-\tilde{\varphi}(t)}{t-x} = f'(x^\pm)$$

PER LA REGOLARITÀ DI f, QUINDI RISULTA CONTINUA IN $[-\pi, \pi]$ SALVO UN NUMERO FINITO DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE. IDEM PER $\cos m(t-x)$ E PERCIÒ È LECITO USARE IL TEOREMA DI RIEMANN.

ME 03 MAG 2023

ME 03 MAG 2023

APPLICAZIONE: LA SERIE DI FOURIER DI $f(x) = \frac{x}{2}$ CONVERGE A $\frac{x}{2}$ PER OGNI $x \in (-\pi, \pi)$ PERCHÉ f È REGOLARE A TRATTI, ED È CONTINUA IN $(-\pi, \pi)$.

PER $x = \pi$ LA SERIE CONVERGE A $\frac{f(\pi^+) + \frac{\pi}{2}}{2} =$

$$= \frac{f((-\pi)^+) + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

LA SERIE CONVERGE NEL PUNTO $x = 2\pi$? E NEL PUNTO $x = \frac{3}{2}\pi$? SÌ, PER PERIODICITÀ: $S_n(2\pi) = S_n(0) \to 0$ E $S_n\left(\frac{3}{2}\pi\right) = S_n\left(-\frac{\pi}{2}\right) \to -\frac{\pi}{4}$.

ESERCIZIO: TROVATE a_k, b_k.

VE 05 MAG 2023

ESSENDO $f(x) = \frac{x}{2}$ UNA FUNZIONE DISPARI, SI HA

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \, dx = 0 \text{ PER OGNI } k,$$

$$\text{E } b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2} \operatorname{sen} kx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x \cos kx}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\pi \cos k\pi = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{PER } k = 1, 2, 3, \dots$$

IN CONCLUSIONE, POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{sen} kx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \dots \quad \text{PER } x \in (-\pi, \pi).$$

SOSTITUENDO $x = \pm\pi$ LA SERIE SI RIDUCE A

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0 \neq \pm\frac{\pi}{2}.$$

ALTRE FUNZIONI SVILUPPABILI ELEMENTARMENTE: x^2, $|x|$, $\operatorname{sgn}(x)$, $H(x)$: FARE ESERCIZI.

VE 05 MAG 2023

OSSERVAZIONE: PONENDO $x = \frac{\pi}{2}$ NELL'UGUAGLIANZA $\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{sen} kx$ TROVIAMO

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$ SERIE DI LEIBNIZ (RISPONDE A UNA DOMANDA DEL 27/04).

SVOLGIAMO UNA DIMOSTRAZIONE DELL'ENUNCIATO DEL 28/04: SE 1) $f \in C^1([-\pi, \pi])$; 2) $f(-\pi) = f(\pi)$; 3) DEFINISCO

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \text{ PER } n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \text{ PER } n \geq 1,$$ LA SERIE

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)$$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD $f(x)$ SULL'INTERVALLO $[-\pi, \pi]$.

INNANZITUTTO, ESSENDO $f \in C^1([-\pi, \pi])$ E TALE CHE $f(-\pi) = f(\pi)$, PER IL TEOREMA DI CONVERGENZA PUNTUALE SI HA $f(x) =$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right) \text{ IN } [-\pi, \pi].$$

PER VERIFICARE LA CONVERGENZA UNIFORME, USEREMO IL CRITERIO DI WEIERSTRASS (12, 14 APRILE):

ESSENDO $\left|a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right| \leq |a_k| + |b_k|$,

VERIFICHIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k| + |b_k|\right) < +\infty$.

SAPPIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$ CONVERGE, MA QUESTO NON IMPLICA LA TESI. ESEMPIO: SE $a_k = \frac{1}{k}$ ABBIAMO $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty$ E $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$.

PER VERIFICARE CHE $\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k|+|b_k|) < +\infty$ APPLICHIAMO LA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL ALLA DERIVATA $f' \in C^0([-\pi,\pi])$, CHE È INTEGRABILE:

POSTO $\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx$ E $\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx$, SAPPIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2) < +\infty$. RAPPRESENTIAMO α_k E β_k MEDIANTE a_k E b_k INTEGRANDO PER PARTI:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[f(x)\cos kx\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx.$$

SICCOME $f(-\pi) = f(\pi)$ RISULTA $f(-\pi)\cos(-k\pi) = f(\pi)\cos k\pi$ QUINDI

$$\Big[f(x)\cos kx\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{E} \quad \alpha_k = k\,b_k \text{ PER } k \geq 1.$$

SIMILMENTE SI TROVA $\beta_k = -k\,a_k$ PER $k \geq 1$

QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty}(k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2) < +\infty$.

VE 05 MAG 2023

PER DEDURRE CHE $\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k|+|b_k|) < +\infty$ USIAMO LA DISUGUAGLIANZA $2|xy| \leq x^2+y^2$, DETTA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY, CHE SEGUE DA $0 \leq (|x|-|y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2$.

PONENDO $x = \frac{1}{2k}$ E $y = k a_k$ TROVIAMO $|a_k| = 2\cdot\frac{1}{2k}\cdot|k a_k| \leq \frac{1}{4k^2} + k^2 a_k^2$ QUINDI

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k| \leq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k^2 < +\infty$$

E SIMILMENTE SI TROVA $\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k| < +\infty$ E LA TESI SEGUE.

OSSERVAZIONE: LA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY $|xy| \leq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ È IL CASO PARTICOLARE $p=2$ DELLA DISUGUAGLIANZA DI YOUNG $|xy| \leq \frac{|x|^p}{p}+\frac{|y|^q}{q}$ DOVE $p\in(1,+\infty)$ E $q = \frac{p}{p-1}$ È L'ESPONENTE CONIUGATO.

ESEMPIO:

DETERMINIAMO LA SERIE DI FOURIER DI $f(x) = x^2$. ESSENDO $f \in C^1([-\pi,\pi])$ E TALE CHE $f(-\pi) = f(\pi)$ LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE AD f IN $[-\pi,\pi]$. QUINDI $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,dx = 0$ E DI CONSEGUENZA (2 MAGGIO) SI HA

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

VE 05 MAG 2023

Posto $f(x) = x^2$ nella definizione di a_k e b_k troviamo: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$ e

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 \operatorname{sen} kx}{k}\right]_0^{\pi} + $$

$$-\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} 2x \operatorname{sen} kx\,dx = -\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} kx\,dx$$

$$= +\frac{4}{k\pi}\left[\frac{x\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi}\pi\cos k\pi = 4\frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{per } k \geq 1$$

mentre $b_k = 0$ per ogni k quindi si ha

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx \quad \text{per}$$

ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e la convergenza è totale.

Ad esempio, posto $x = \pi$ troviamo $\pi^2 =$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{da cui ricaviamo} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Conclusioni: la serie di Fourier ha ispirato profondi studi, dando origine all'analisi armonica. Si pensi che Riemann diede la definizione dell'integrale incidentalmente nella dissertazione « Sulla rappresentabilità di una funzione in serie trigonometrica ». Anche il concetto di punto di accumulazione, dovuto a Cantor, è ispirato da questioni di analisi armonica (Bourbaki, Elementi di storia della matematica).

LU 08 MAG 2023

Alcune disuguaglianze notevoli

1) Disuguaglianza di Young: $|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$ dove $p \in (1, +\infty)$ e $q = \frac{p}{p-1}$ è l'esponente coniugato. La tesi è banale se $xy = 0$, altrimenti si può riscrivere

$$\log|xy| \leq \log\left(\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}\right) \quad \text{perché}$$

$\log t$ è strettamente crescente. Sappiamo che $\log|xy| = \log|x| + \log|y|$. Inoltre $\lambda = \frac{1}{p} \in (0,1)$ e $\frac{1}{q} = 1 - \lambda$, quindi, per la concavità della funzione logaritmica si ha

$$\log\left(\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log|x|^p + \frac{1}{q}\log|y|^q =$$

$$= \log|x| + \log|y|$$ e la tesi segue.

2) Disuguaglianza di Hölder: per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $p \in (1, +\infty)$ poniamo $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Si noti che per $p = 2$ si trova la norma euclidea.

L'esponente coniugato è $q = \frac{p}{p-1}$. Si ha:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

Dimostrazione: se $x \cdot y = 0$ la tesi è banale, altrimenti normalizziamo x e y ponendo $\lambda = \|x\|_p > 0$ e $\mu = \|y\|_q > 0$, $u = \frac{x}{\lambda}$, $v = \frac{y}{\mu}$

SOSTITUENDO $x=\lambda u$ E $y=\mu v$, LA TESI DIVENTA $u \cdot v \leq \|u\|_p \|v\|_q$ LA QUALE SEGUE DALLA DISUGUAGLIANZA DI YOUNG IN QUANTO $u \cdot v =$

$$= \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{|u_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^{N} \frac{|v_i|^q}{q} =$$

$= \frac{1}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{q}\|v\|_q^q$. MA SICCOME $\|u\|_p^p =$

$= \sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i|^p}{\lambda^p} = \frac{1}{\lambda^p}\|x\|_p^p = 1$ E $\|v\|_q^q = 1$

NE SEGUE CHE $u \cdot v \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|u\|_p \|v\|_q$.

OSSERVAZIONE: PER $p=q=2$ LA DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER SI RIDUCE A $x \cdot y \leq \|x\| \cdot \|y\|$ DETTA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ.

3) DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI: PER OGNI $x, y \in \mathbb{R}^N$ ED OGNI $p \in (1, +\infty)$ SI HA

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

DIMOSTRAZIONE: SEGUIAMO IL TIPICO RAGIONAMENTO CHE SI TROVA NEI TESTI, GIÀ PRESENTE IN UN ARTICOLO DI RIESZ DEGLI ANNI VENTI: $\|x+y\|_p^p =$

$$= \sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{p-1} |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{p-1} |x_i|$$

$+ \sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{p-1} |y_i|$. INTERPRETIAMO

$\sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{p-1} |x_i|$ COME $x \cdot z$ DOVE $z_i =$

$= |x_i+y_i|^{p-1}$ E APPLICHIAMO LA DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER: $x \cdot z \leq \|x\|_p \|z\|_q$.

LU 08 MAG 2023

APPLICANDO LA DEFINIZIONE, TROVIAMO $\|z\|_q =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} |z_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{p-1} = \|x+y\|_p^{p-1} \quad \text{E}$$

QUINDI $\sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{p-1} |x_i| \leq \|x+y\|_p^{p-1} \|x\|_p$

E SIMILMENTE $\sum_{i=1}^{N} |x_i+y_i|^{p-1} |y_i| \leq$

$\leq \|x+y\|_p^{p-1} \|y\|_p$. USANDO QUESTE STIME, OTTENIAMO $\|x+y\|_p^p \leq \|x+y\|_p^{p-1}\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)$

DA CUI SEGUE LA TESI.

ESERCIZIO: POSTO $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$,

VERIFICARE CHE $\|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p$.

SPAZI VETTORIALI NORMATI

UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO È UNO SPAZIO VETTORIALE V CON UNA FUNZIONE DETTA NORMA E INDICATA CON $\|x\|$ PER $x \in V$ TALE CHE:

1) $\|x\| \geq 0$ PER OGNI $x \in V$, $\|x\| = 0$ SE E SOLO SE $x = \vec{0} \in V$;

2) PER OGNI $t \in \mathbb{R}$ ED OGNI $x \in V$ SI HA $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$;

3) PER OGNI $x, y \in V$ RISULTA $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ESEMPI ELEMENTARI: $V=\mathbb{R}^N$ E $\|x\|=\|x\|_p$ CON $p\in[1,+\infty)$ OPPURE ANCHE $\|x\|=\|x\|_\infty$. LA NORMA-1 SI DEFINISCE CON $\|x\|_1=\sum_{i=1}^N |x_i|$.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\|x\|_1$ E $\|x\|_\infty$ SODDISFANO GLI ASSIOMI DELLA NORMA.

LA FIGURA GEOMETRICA PRINCIPALE IN UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO È LA PALLA $B_r(x_0)$ CENTRATA IN $x_0\in V$ E DI RAGGIO $r\in(0,+\infty)$, DATA DA $B_r(x_0)=\{x\in V:\ \|x-x_0\|<r\}$

ESERCIZIO: POSTO $V=\mathbb{R}^2$, DISEGNARE LA PALLA CANONICA $B_1(0)$ USANDO LA NORMA-1 E LA NORMA-∞.

MOTIVAZIONE: GLI SPAZI VETTORIALI NORMATI CONSENTONO DI TRATTARE LE SERIE IN GENERALE.

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE $d(x,y)=\|x-y\|$ È UNA METRICA NATURALMENTE ASSOCIATA ALLA NORMA.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $d(x,y)=\|x-y\|$ SODDISFA GLI ASSIOMI DELLA DISTANZA.

CONSEGUENZA: IN OGNI SPAZIO VETTORIALE NORMATO RESTA DEFINITO IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE:

SI SCRIVE $x_n\longrightarrow x_0$ SE $\lim_{n\to+\infty}\|x_n-x_0\|=0$.

D'ALTRO CANTO LA STRUTTURA LINEARE CONSENTE DI ASSOCIARE ALLA SUCCESSIONE (x_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI $S_n=\sum_{k=1}^n x_k$.

SE $S_n\to S\in V$ SI SCRIVE $\sum_{k=1}^{+\infty}x_k=S$

E SI DICE CHE LA SERIE CONVERGE.

LU 08 MAG 2023

ESEMPI INFINITO-DIMENSIONALI: GLI SPAZI DI LAGRANGE $C^k([a,b])$.

RICORDIAMO CHE $C^0([a,b])$ È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO (19/04). LA NORMA CANONICA SI DEFINISCE PONENDO $\|f\|_0=\max_{[a,b]}|f(x)|$.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\|f\|_0$ SODDISFA GLI ASSIOMI DELLA NORMA.

DEFINIZIONE: SI PONE $C^1([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\ f'\in C^0([a,b])\}$ E $C^k([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\ f^{(k)}\in C^0([a,b])\}$. OSSERVAZIONE: $C^{k+1}([a,b])=\{f\in C^k([a,b]):\ f^{(k+1)}\in C^0([a,b])\}\subset C^k([a,b])$

E LA NORMA CANONICA È DEFINITA PONENDO

$\|f\|_k=\sum_{i=0}^k\|f^{(i)}\|_0$ OPPURE ANCHE

$\|f\|_k=\max_{i=1,\dots,k}\|f^{(i)}\|_0$ NON SONO UGUALI, MA EQUIVALENTI: DUE NORME, CHE INDICHEREMO CON $\|x\|$ E $|||x|||$ SULLO STESSO SPAZIO V SI DICONO EQUIVALENTI SE ESISTONO DUE COSTANTI $c_1,c_2>0$ TALI CHE $c_1\|x\|\le |||x|||\le c_2\|x\|$

IMPORTANZA: SE $\|x_n-x_0\|\to 0$ ALLORA E SOLO ALLORA $|||x_n-x_0|||\to 0$

ESEMPIO: NELLO SPAZIO $C^0([a,b])$ SI PUÒ ANCHE CONSIDERARE LA NORMA DI L^2, DATA DA

$\|f\|_{L^2}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$ CHE NON È EQUIVALENTE ALLA NORMA CANONICA. INVECE IN $\mathbb{R}^N$ TUTTE LE NORME SONO EQUIVALENTI.

MA 09 MAG 2023

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE LE FUNZIONI

$$\|f\|_k = \sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|_0 \quad \text{E}$$

$$\|f\|_k = \max_{i=1,\dots,k} \|f^{(i)}\|_0$$

AVENTI PER DOMINIO LO SPAZIO $C^k([a,b])$ SONO NORME. TALE SPAZIO È DOTATO DELLA METRICA $d(f,g) = \|f-g\| =$

$$= \max_{i=1,\dots,k} \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_0 =$$

$$= \max_{i=1,\dots,k} \max_{[a,b]} \left| f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x) \right|$$

RISPETTO ALLA QUALE RISULTA COMPLETO: PROPRIETÀ GIÀ DIMOSTRATA IL 13/04 NEL CASO $k=0$. VERIFICHIAMO ORA LA COMPLETEZZA DI $C^1([a,b])$. APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE (21/04). PRENDIAMO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $f_k \in C^1([a,b])$ TALI CHE $\lim_{i,j\to+\infty} d(f_i, f_j) = 0$, DUNQUE

$$\lim_{i,j\to+\infty} \|f_i - f_j\|_1 = 0.$$

OSSERVIAMO CHE

$$\|f_i - f_j\|_0 \leq \|f_i - f_j\|_0 + \|f_i' - f_j'\|_0 = \|f_i - f_j\|_1$$

E SIMILMENTE $\|f_i' - f_j'\|_0 \leq \|f_i - f_j\|_1$. PERCIÒ

$$\lim_{i,j\to+\infty} \|f_i - f_j\|_0 = \lim_{i,j\to+\infty} \|f_i' - f_j'\|_0 = 0,$$

DUNQUE LE SUCCESSIONI (f_k) E (f_k') SONO FONDAMENTALI IN $C^0([a,b])$. SICCOME $C^0([a,b])$ È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO (19 APRILE) POSSO DIRE CHE $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{UNIF.}} f$ E $f_k' \xrightarrow{\text{UNIF.}} g$ PER OPPORTUNE FUNZIONI $f, g \in C^0([a,b])$.

PER IL TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA (21/04) SI HA CHE f È DERIVABILE E $f' = g \in C^0([a,b])$ DUNQUE $f \in C^1([a,b])$.

INFINE, SICCOME $\|f - f_k\|_1 = \|f - f_k\|_0 + \|f' - f_k'\|_0 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ L'ASSERTO È DIMOSTRATO.

NELL'ANALISI MODERNA SI DIMOSTRA L'ESISTENZA DELLE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALL'INTERNO DI OPPORTUNI SPAZI FUNZIONALI. UN PRIMO FONDAMENTALE RISULTATO È IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI. OSSERVIAMO CHE LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ SI PUÒ FORMULARE IN UNO SPAZIO METRICO X:

DEFINIZIONE: UN'APPLICAZIONE $F: X \to Y$ TRA DUE SPAZI METRICI (X, d_X) E (Y, d_Y) SI DICE LIPSCHITZIANA SE ESISTE $L \in (0, +\infty)$ TALE CHE $d_Y(F(x_1), F(x_2)) \leq L\, d_X(x_1, x_2)$ PER OGNI $x_1, x_2 \in X$.

ESERCIZIO: POSTO $X = \mathbb{R}^n$ E $Y = \mathbb{R}^k$ CON LA DISTANZA CANONICA, VERIFICARE CHE TUTTE LE APPLICAZIONI LINEARI $F: X \to Y$ SONO LIPSCHITZIANE.

DEFINIZIONE: UN'APPLICAZIONE $F: X \to X$ È UNA CONTRAZIONE SE ESISTE $\alpha \in (0,1)$ TALE CHE $d(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha\, d(x_1, x_2)$ PER OGNI $x_1, x_2 \in X$.

ESEMPI SEMPLICI: con $X=\mathbb{R}$, $F(x)=mx+q$ risulta $d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$ e $d(F(x_1),F(x_2)) = |m|\cdot|x_1-x_2|$ quindi F è lipschitziana per ogni m ed è una contrazione se e solo se $|m|<1$.

Vediamo se $F(x)=\operatorname{sen} x$ è una contrazione su $\mathbb{R}$: si ha $d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$ e $d(F(x_1), F(x_2)) = |\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| = 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right| \cdot \left|\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right| \le 2\left|\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right| \le 2\frac{|\vartheta|}{2} = |x_1-x_2|$

quindi $F(x)=\operatorname{sen} x$ è lipschitziana e soddisfa la definizione con $L=1$. Per sapere se è una contrazione, cerchiamo la più piccola L tale che $|F(x_1)-F(x_2)| \le L\,|x_1-x_2|$ per ogni $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. I valori possibili per L sono quelli tali che

$$L \ge \frac{|F(x_1)-F(x_2)|}{|x_1-x_2|} = \left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right| \frac{\left|\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right|}{\frac{|x_1-x_2|}{2}}$$

per ogni $x_1\neq x_2$.

Passando al limite per $x_1,x_2\to 0$, per il teorema della permanenza del segno si ottiene $L\ge 1$. Quindi $L=1$ è la più piccola costante possibile, e possiamo scrivere $Lip(F)=1$ e dire che F non è una contrazione.

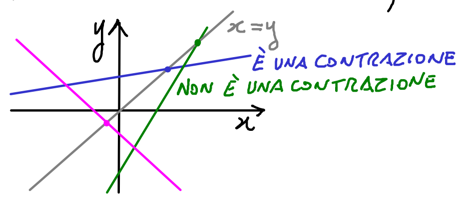
ESERCIZIO: per ogni $f\in C^\circ([a,b])$ indichiamo con $F(f)$ la funzione $g\in C^\circ([a,b])$ definita ponendo $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Stabilire se F è una contrazione su $C^\circ([a,b])$.

MA 09 MAG 2023

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI (BANACH)

Se X è uno spazio metrico completo, e $F: X\longrightarrow X$ è una contrazione, allora esiste uno e un solo $x_0\in X$ tale che $F(x_0)=x_0$ (x_0 è un punto fisso per F).

ESEMPIO: $X=\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo. La funzione $F(x)=mx+q$ con $m\neq 1$ ha uno e un solo punto fisso, che è $x_0=\frac{q}{1-m}$.



ESERCIZIO (il caso $m=1$): sappiamo che $F(x)=x+q$ non è una contrazione. Trovare gli eventuali punti fissi.

ME 10 MAG 2023

L'unicità è la parte facile del teorema:

Se $F: X\to X$ è una contrazione, e ci sono $x,y\in X$ tali che $F(x)=x$ e $F(y)=y$, allora, a prescindere dall'eventuale completezza di X, risulta $d(x,y)=d(F(x),F(y))$ per ipotesi, e quindi $d(x,y)\le \alpha\, d(x,y)$ con $\alpha\in(0,1)$ perché F è una contrazione, quindi $0\le(1-\alpha)\,d(x,y)\le 0$ da cui $d(x,y)=0$ e perciò $x=y$.

ME 10 MAG 2023

OSSERVAZIONE: LE FUNZIONI LIPSCHITZIANE $F: X \to Y$ (E QUINDI A MAGGIOR RAGIONE LE CONTRAZIONI) SONO SEQUENZIALMENTE CONTINUE: INFATTI SE PRENDO UNA SUCCESSIONE DI $x_k \in X$ CONVERGENTE A $x_0 \in X$ HO CHE $d_Y(F(x_k), F(x_0)) \leq L\, d_X(x_k, x_0) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, QUINDI $F(x_k) \to F(x_0)$.

DIMOSTRIAMO L'ESISTENZA DEL PUNTO FISSO PER UNA CONTRAZIONE $F: X \to X$ COMPLETO.

ESSENDO $X \neq \emptyset$ PER DEFINIZIONE, PRENDO $x_0 \in X$ E DEFINISCO PER RICORRENZA $x_{k+1} = F(x_k)$ PER $k \in \mathbb{N}$. ESSENDO F UNA CONTRAZIONE, LA SUCCESSIONE (x_k) È FONDAMENTALE: SI HA INFATTI $d(x_{k+1}, x_k) = d(F(x_k), F(x_{k-1})) \leq$ $\leq \alpha\, d(x_k, x_{k-1})$ PER OGNI $k \geq 1$. SI DIMOSTRA PER INDUZIONE CHE $d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k d(x_1, x_0)$ PER OGNI $k \geq 0$. INFINE, PRESO $i > j$, PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SI HA $d(x_i, x_j) \leq$

$$\leq \sum_{k=j}^{i-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^j d(x_1, x_0) \sum_{n=0}^{i-j-1} \alpha^n <$$

$$< \frac{\alpha^j d(x_1, x_0)}{1-\alpha} \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0 \quad \text{PERCHÉ } \alpha \in (0,1).$$

PER LA COMPLETEZZA DI X, ESISTE UN PUNTO $\bar{x} \in X$ TALE CHE $x_k \to \bar{x}$, CIOÈ $d(x_k, \bar{x}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

PER CONCLUDERE LA DIMOSTRAZIONE, VERIFICHIAMO CHE $\bar{x} = F(\bar{x})$: PER DEFINIZIONE, SI HA $x_{k+1} = F(x_k)$ PER OGNI k. ESSENDO F CONTINUA, LA LA TESI SEGUE PASSANDO AL LIMITE PER $k \to +\infty$.

UN PUNTO DA PONDERARE: SE X NON È COMPLETO, LE CONTRAZIONI SU X AVRANNO PUNTI FISSI? CERTAMENTE IL PUNTO FISSO, SE ESISTE, È UNICO, MA... ESISTE? NON È DETTO! AD ESEMPIO $F(x) = \frac{x}{2}$ È UNA CONTRAZIONE SU $X = (0,1)$ PRIVA DI PUNTI FISSI.

FERMO RESTANDO IL FATTO CHE BANACH VISSE NEL NOVECENTO E CAUCHY NELL'OTTOCENTO, VEDIAMO COME IL TEOREMA DI BANACH SI PUÒ USARE PER DIMOSTRARE L'ESISTENZA IN PICCOLO DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

CON $f: [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ SODDISFACENTE $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$ E TALE CHE $M = \max_{[x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]} |f(x,y)| > 0$ (STIAMO SUPPONENDO f CONTINUA). SAPPIAMO DAL 13/03 CHE SE PRENDIAMO UNA FUNZIONE CONTINUA $y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to [y_0 - b, y_0 + b]$ CON $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ ALLORA RESTA BEN DEFINITA LA FUNZIONE $z: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ DATA DA $z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$

E DI CONSEGUENZA L'APPLICAZIONE $F: X \to X$, DOVE $X \subset C^0([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ È COSTITUITO DALLE FUNZIONI y A VALORI IN $[y_0 - b, y_0 + b]$, È DOTATO DELLA METRICA UNIFORME, ED F ASSOCIA z AD y.

 ME 10 MAG 2023

L'APPLICAZIONE F COSÌ DEFINITA PERMETTE DI ESPRIMERE LA FORMULAZIONE INTEGRALE DEL PROBLEMA DI CAUCHY (10/03)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

NELLA FORMA $y = F(y)$. PER DIMOSTRARE L'ESISTENZA E L'UNICITÀ DI UNA SOLUZIONE BASTA VERIFICARE CHE X È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO (ESERCIZIO) E CHE F È UNA CONTRAZIONE.

APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE: PRENDO $y_1, y_2 \in X$, CHIAMO $z_1 = F(y_1)$ E $z_2 = F(y_2)$, DUNQUE

$$z_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt,$$

$$z_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt,$$

ED ESAMINO $d(z_1, z_2) = \max\limits_{[x_0-\delta,\, x_0+\delta]} |z_1(x) - z_2(x)|$.

PER OGNI $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ SI HA CHE $|z_1(x) - z_2(x)| \leq$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right| dt \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \left| y_1(t) - y_2(t) \right| dt \right| \leq L\delta\, d(y_1, y_2)$$

QUINDI $d(z_1, z_2) \leq L\delta\, d(y_1, y_2) = \alpha\, d(y_1, y_2)$

CON $\alpha = L\delta < 1$ A CONDIZIONE DI PRENDERE $\delta < \frac{1}{L}$.

ESERCIZIO: DATA UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $f_k \in C^1([a,b])$ CONVERGENTE UNIFORMEMENTE AD UNA $f \in C^1([a,b])$, SI PUÒ CONCLUDERE CHE $f_k \longrightarrow f$ NELLA METRICA DI $C^1([a,b])$?

SUGGERIMENTO: $f_k(x) = \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$ PER $x \in [0, \pi]$

ESERCIZIO: LO SPAZIO $C^1([a,b])$ CON LA DISTANZA $d(f,g) = \max\limits_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$ È COMPLETO?

LA NORMA $\|f\|_0 = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|$ SULLO SPAZIO $C^1([a,b])$ EQUIVALE ALLA NORMA CANONICA?

(VEDERE L'ESEMPIO DEL 24 APRILE)