Universitá degli studi di Cagliari

Dipartimento di Matematica e Informatica
Teoria dei Giochi

Un esempio di gioco non super-additivo: il gioco dell'aeroporto

Giorgia Nieddu

Docente:
Prof. Antonio Iannizzotto

Anno accademico 2022/2023

Indice

1 Introduzione

L'argomento di questo testo sarà il valore di Shapley, che osserveremo in particolare nel gioco dell'aeroporto; si parla quindi di giochi cooperativi. Dopo una breve trattazione generale, si analizzerà il gioco (R_k, v_k) che fornisce un metodo per suddividere il costo di una pista per una coalizione. Si mostrerà poi come calcolare il valore di Shapley per un numero n di giocatori nel gioco considerato; è importante notare che in questo caso la funzione di utilità rappresenta un costo e non una ricompensa, quindi anche il valore di shapley manterrà questa caratteristica. Si passerà infine ad alcuni calcoli su esempi pratici.

2 Il Valore di Shapley

Dato un gioco cooperativo (P, v), il valore di Shapley di un giocatore $i \in P$ è un numero che rappresenta il contributo medio che i può dare alle coalizioni di cui fa parte. Per capire come ottenere tale numero, bisogna fare diverse premesse.

Sia $P!$ l' insieme delle permutazioni di P. Se $\sigma \in P!$, possiamo definire

$$S(i, \sigma) = \{j \in P \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$$

cioè una coalizione costituita da tutti i giocatori che precedono i in σ. Definiamo ora

$$M(i, \sigma) = v(S(i, \sigma) \cup \{i\}) - v(S(i, \sigma))$$

Quest'ultimo prende il nome di *contributo marginale di i rispetto a σ*, e rappresenta l'incremento di utilità che il giocatore i fornisce alla coalizione $S(i, \sigma)$.

Il Valore di Shapley di i è così definito:

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} M(i, \sigma)$$

Si può mostrare che questa formula ha una forma equivalente data da:

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{i \notin S} |S|!(n - 1 - |S|)! \, (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

2.1 proprietà

Enunciamo ora, senza dimostrarle, le proprietà necessarie per il capitolo successivo.

Definizione 2.1. Un'imputazione per un gioco (P, v) è un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ tale che

- $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(P)$
- $x_i \geq v(i) \ \ \forall \ i \in \{1, \dots, n\}$

Si può mostrare che il valore di Shapley è un'imputazione; in particolare, più avanti ci servirà la prima proprietà.
Parliamo ora della proprietà di additività:

Teorema 2.2. *Dati due giochi $\Gamma = (P, v)$ e $\Gamma' = (P, v')$, detti ϕ e ϕ' i valori di Shapley relativi ai due giochi, e $\phi_{\Gamma+\Gamma'}$ il valore di Shapley della loro somma, si ha che*

$$\phi_{\Gamma+\Gamma'} = \phi + \phi'$$

Questa proprietà ci servirà perchè calcoleremo il valore di Shapley utilizzando dei giochi ausiliari.

3 Il gioco dell'aeroporto

Nel gioco dell'aeroporto si considerano aerei diversi, che necessitano quindi di piste più o meno lunghe. Gli aerei $P = \{1, 2, \dots, n\}$ sono ordinati dal più piccolo al più grande. c_j rappresenta il costo di una pista di atterraggio per l'aereo j. Essendo gli aerei ordinati, si ha che $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. L'utilità (in questo caso il costo) relativa ad ogni coalizione è

$$v(S) = max\{c_j \mid S \cap \{j\} \neq \emptyset\}$$

e cioè il costo relativo all'aereo più grande.
Ma come suddividere il costo di un pista tra tutti gli aerei di una coalizione?

- Si divide il costo c_1 del primo tratto tra tutta la coalizione;
- il costo $c_2 - c_1$ del secondo tratto tra gli aerei della coalizione da 2 in poi;

...e così via.

Nel capitolo successivo, vediamo che questo gioco è equivalente alla somma di n giochi (R_k, v_k), con $k \in \{1, \dots, n\}$; cioè $v(S) = \sum_{k=1}^{n} v_k(S)$

3.1 Il gioco (R_k, v_k)

Sia $R_k = \{k, k+1, \dots, n\}$ e

$$v_k(S) = \begin{cases} c_k - c_{k-1} & R_k \cap S \neq \emptyset \\ 0 & R_k \cap S = \emptyset \end{cases}$$

Mostriamo che, data una coalizione S, $v(S) = \sum_{k=1}^{n} v_k(S)$

procediamo per induzione su n, numero di aerei:
per n=1,

$$\sum_{k=1}^{1} v_k(S) = v_1(S)$$

Considerato che $S = \emptyset$ oppure $S = \{1\}$ otteniamo nel primo caso $S \cap R_1 = \emptyset$ e cioè $v_1(S) = 0 = v(S)$;
Nel secondo caso, $v_1(S) = c_1 - c_0 = c_1 = v(S)$.

Supponiamo che la formula valga per $n-1$, e dimostriamola per n.

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(S) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(S) + v_n(S)$$

se $n \notin S$

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k(S) + v_n(S) = v(S) + 0 = v(S)$$

poichè i contributi v_k rimangono invariati (si può quindi usare l'ipotesi induttiva) e $S \cap R_n = \emptyset$.

Se invece $n \in S$,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(S) = c_1 - c_0 + c_2 - c_1 + \cdots + c_n - c_{n-1} = c_n$$
$$= \max\{c_j \mid S \cap \{j\} \neq \emptyset\} = v(S)$$

poichè $n \in R_k, \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$.

Questa formula esplicita il fatto che (come detto anche nel capitolo precendente) nel calcolo del costo di una pista idonea per una certa coalizione S vengano sommati i costi di ogni tratto di pista (da suddividere tra i giocatori che utilizzano quel determinato tratto). Ogni aereo k paga quindi una quota per ogni tratto da esso utilizzato, e cioè:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i - c_{i-1}}{|S \cap R_i|}$$

Sommando per k si ottiene il costo della pista, che corrisponde a

$$v(S) = max\{c_j \mid S \cap \{j\} \neq \emptyset\}$$

4 Il valore di Shapley nel gioco dell'aeroporto

Per calcolare il valore di Shapley, ci basterà usare la proprietà di additività, ricordando che il gioco considerato è equivalente alla somma dei giochi (R_k, v_k) con $k = 1, \dots, n$; calcoliamo quindi $\phi_i(v_k)$.

$$\begin{aligned} \phi_i(v_k) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} M(i, \sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} \big(v_k(S_{(i,\sigma)} \cup \{i\}) - v_k(S_{(i,\sigma)})\big) \end{aligned}$$

Ci sono due diversi casi:

- $i < k$

$$\begin{aligned} &(S_{(i,\sigma)} \cup \{i\}) \cap R_k = S_{(i,\sigma)} \cap R_k \implies \\ &v_k\left(S_{(i,\sigma)} \cup \{i\}\right) = v_k\left(S_{(i,\sigma)}\right) \implies \\ &\phi_i(v_k) = 0 \end{aligned}$$

- $i \geq k$

$$v_k\left(S_{(i,\sigma)} \cup \{i\}\right) = c_k - c_{k-1}$$

  Questo vale per ogni $i \geq k$, per cui

$$\begin{aligned} \phi_i(v_k) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} \big(v_k(S_{(i,\sigma)} \cup \{i\}) - v_k(S_{(i,\sigma)})\big) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} v_k(S_{(i,\sigma)} \cup \{i\}) - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P!} v_k(S_{(i,\sigma)}) \end{aligned}$$

  dove entrambi gli addendi risultano essere sempre uguali per $i \geq k$ (il primo per il ragionamento fatto sopra, il secondo perchè la somma non dipende dall'effettivo valore di i).
  Si ha quindi:

$\phi_i(v_k) = \phi_j(v_k)$ per $i, j \geq k$. Quindi vale l'uguaglianza:

$$\begin{aligned}
\phi_i(v_k) &= \frac{1}{n-(k-1)} \cdot \sum_{j=k}^{n} \phi_j(v_k) \\
&= \frac{1}{n-k+1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \phi_j(v_k) \\
&= \frac{v_k(P)}{n-k+1} \\
&= \frac{c_k - c_{k-1}}{n-k+1}
\end{aligned}$$

dove nella seconda riga abbiamo aggiunto i termini da 1 a $k-1$ che sono nulli, e nella terza abbiamo usato che il valore di Shapley è un'imputazione.

Avendo trovato il valore di shapley per i giochi del tipo (R_k, v_k), possiamo usare l'additività, per cui

$$\begin{aligned}
\phi_i &= \sum_{k=1}^{n} \phi_i(v_k) \\
&= \sum_{k=1}^{i} \phi_i(v_k) \\
&= \sum_{k=1}^{i} \frac{c_k - c_{k-1}}{n-k+1}
\end{aligned}$$

dove abbiamo eliminato gli ultimi $n-i$ termini, essendo questi nulli.

Possiamo dire quindi che il valore di Shapley corrisponde alla suddivisione dei costi vista nella sezione 3.1 se si considera la coalizione $S = P$, e cioè ϕ_i è uguale alla quota pagata dall'aereo i per una pista idonea a tutti gli aerei del gioco.

5 Alcuni esempi

5.1 Esempio 1

Consideriamo un aeroporto in cui in un anno atterrano due aerei, uno dei due più grande dell'altro. Il costo della pista per 10 anni per l'aereo più piccolo è di 100 milioni, per l'aereo più grande è di 200 milioni (questa pista ovviamente è idonea anche per l'altro aereo). Trascurando fattori di sconto e distribuendo il costo su 10 anni, calcoliamo il valore di Shapley per un anno.

In un anno si ha $c_1 = \frac{100}{10}ml = 10ml$ e $c_2 = \frac{200}{10}ml = 20ml$. $n = 2$ per cui avremo

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \sum_{k=1}^{1} \frac{c_k - c_{k-1}}{n-k+1} \\ &= \frac{c_1 - c_0}{2} = 5ml\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{c_k - c_{k-1}}{n-k+1} \\ &= \frac{c_1 - c_0}{2} + c_2 - c_1 \\ &= 5ml + 10ml = 15ml\end{aligned}$$

5.2 Esempio 2

Se invece vogliamo calcolare il valore di Shapley su due anni, si pone $c_1 = \frac{100}{5}ml = 20ml$ e $c_2 = \frac{200}{5}ml = 40ml$.

Si avrà quindi

$$\phi_1 = \frac{c_1 - c_0}{2} = 10ml$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{c_1 - c_0}{2} + c_2 - c_1 \\ &= 10ml + 20ml = 30ml\end{aligned}$$

Coerentemente con quanto detto il valore di Shapley su due anni è il doppio rispetto a quello in un anno (infatti in due anni il costo sarà il doppio di quello precedente).

6 Bibliografia

1. A. Iannizzotto, *Introduzione alla teoria dei giochi*, capitolo 5

2. Ferguson, cap. IV, es.15, pag.19

3. Patrone, problema 48, pag. 244