

Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Equazioni differenziali

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23.

DEFINIZIONE:

UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA HA LA FORMA

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

DOVE $F(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ È UNA DATA FUNZIONE DELLE $n+2$ VARIABILI INDIPENDENTI x, y_0, y_1, \dots, y_n , $n \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^+$ È DETTO **ORDINE** DELL'EQUAZIONE, E $y(x)$ È LA FUNZIONE INCOGNITA.

DEFINIZIONE:

UNA **SOLUZIONE** DELLA SUDETTA EQUAZIONE IN UN INTERVALLO (a, b) È UNA FUNZIONE $y: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, DERIVABILE ALMENO n VOLTE, TALE CHE RISULTI

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \text{ PER OGNI } x \in (a, b).$$

ESEMPI

1. L'EQUAZIONE $y' = y$, CIOÈ $y' - y = 0$.

POSTO $F(x, y_0, y_1) = y_1 - y_0$, L'EQUAZIONE DATA SI PUÒ SCRIVERE $F(x, y(x), y'(x)) = 0$

COME RICHIESTO DALLA DEFINIZIONE. LE **SOLUZIONI** SONO LE FUNZIONI $y(x)$ LA CUI DERIVATA $y'(x)$ COINCIDE CON $y(x)$ IN OGNI PUNTO DI UN DATO INTERVALLO (a, b) .

2. L'EQUAZIONE $y' = 0$.

QUI POSSIAMO INTRODURRE $F(x, y_0, y_1) = y_1$

PER SCRIVERE L'EQUAZIONE DATA SOTTO LA FORMA

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0. \text{ LE } \text{SOLUZIONI}$$

SONO LE FUNZIONI **DERIVABILI** $y(x)$ TALI CHE

$$y'(x) = 0 \text{ IN TUTTI I PUNTI } x \in (a, b).$$

3. L'EQUAZIONE $y' = f(x)$, DOVE $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

È UNA FUNZIONE DATA. QUI $F(x, y_0, y_1) =$

$$= y_1 - \int f(x). \text{ LE } \text{SOLUZIONI} \text{ SONO LE FUNZIONI}$$

$y: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILI E TALI CHE

$$y'(x) = f(x) \text{ PER OGNI } x \in (a, b).$$

4. L'EQUAZIONE DEI MOTI ARMONICI:

$$y'' = -y, \text{ CHE È DEL SECONDO ORDINE.}$$

QUI $F(x, y_0, y_1, y_2) = y_2 + y_0$. UNA

SOLUZIONE È UNA FUNZIONE $y(x)$ DERIVABILE

DUE VOLTE ALMENO, LA CUI DERIVATA SECONDA

$y''(x)$ COINCIDE CON $-y(x)$ IN OGNI

PUNTO DI UN DATO INTERVALLO (a, b) .

5. L'EQUAZIONE DEL PENDOLO $y'' = -\sin y$

6. L'EQUAZIONE DELLA LOGISTICA

$$y' = y(1-y)$$

7. L'EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE:

$\vec{F} = m \vec{a}$. QUI INDICHIAMO LA VARIABILE INDIPENDENTE CON t ANZICHÉ CON x , E LA FUNZIONE INCOGNITA CON $\vec{x}(t)$:

ESSA RAPPRESENTA LA POSIZIONE DEL

PUNTO MATERIALE DI MASSA m ALL'ISTANTE

t . COME È NOTO, $\vec{a}(t) = \vec{x}''(t)$, MENTRE

$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{x}_0, \vec{v}_1)$. DI SOLITO

$\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ MA NULLA VIETA DI PENSARE

$\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^k$ CON $k \in \mathbb{Z}^+$, QUINDI \vec{F} DIPENDE DA $2k+1$ VARIABILI E RAPPRESENTA

UN DATO CAMPO DI FORZE.

PÙ IN GENERALE, DUNQUE, SI CONSIDERANO

EQUAZIONI $F(x, \vec{x}(x), \vec{x}'(x), \dots, \vec{x}^{(n)}(x)) = 0$

LA CUI INCOGNITA È UNA FUNZIONE $\vec{x}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^k$

CON $k \in \mathbb{Z}^+$, OPPURE ANCHE

$\vec{F}(x, \vec{x}(x), \vec{x}'(x), \dots, \vec{x}^{(n)}(x)) = \vec{0}$. SE

INDICHIAMO CON F_1, \dots, F_p LE COMPONENTI

SCALARI DI \vec{F} , QUEST'ULTIMA EQUAZIONE

RAPPRESENTA IL SISTEMA

$$\begin{cases} F_1(x, \dots, \vec{x}^{(n)}(x)) = 0 \\ \dots \\ F_p(x, \dots, \vec{x}^{(n)}(x)) = 0 \end{cases}$$

UN DISCORSO A PARTE È IL CASO $x \in \mathbb{R}^d$ CON $d \in \{2, 3, 4, \dots\}$: IN QUESTO CASO LA FUNZIONE INCOGNITA $y(x_1, \dots, x_d)$ DIPENDE DA d VARIABILI

E L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE COINVOLVE LE DERIVATE PARZIALI $\frac{\partial^{|\alpha|} y}{\partial x^\alpha}$: QUI $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

$\in \mathbb{N}^d$ E $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. ESEMPIO:

SE $d=3$, $\alpha = (0, 1, 4)$, ALLORA $\frac{\partial^{|\alpha|} y}{\partial x^\alpha} =$

$$= \frac{\partial^5 y}{\partial x_1^0 \partial x_2^1 \partial x_3^4} = \frac{\partial^5 y}{\partial x_2 \partial x_3^4}$$

RISOLVERE LE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

È, IN GENERALE, MOLTO PIÙ DIFFICILE CHE

RISOLVERE LE EQUAZIONI ORDINARIE. UN

TIPICO ESEMPIO È L'EQUAZIONE DI LAPLACE

$$\Delta u = 0$$

DOVE u (UNKNOWN) È LA FUNZIONE INCOGNITA

E Δ È L'OPERATORE DI LAPLACE

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

TORNANDO ALLE EQUAZIONI ORDINARIE, PER QUANTO RIGUARDA LA RISOLUZIONE LO SCENARIO È MOLTO AMPIO. AD ESEMPIO, L'EQUAZIONE $y' = y$ HA LE INFINITE SOLUZIONI $y(x) = Ce^x$, CON $C \in \mathbb{R}$. QUI È

IMPORTANTE CHIEDERSI SE VI SIANO ALTRE SOLUZIONI. INVECE L'EQUAZIONE $y' = 0$ NON HA SOLUZIONI. PONIAMO ADESSO

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{FUNZIONE A GRADINO DI HEAVISIDE})$$

E CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE

$y' = f(x)$ LE EVENTUALI SOLUZIONI $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DEVONO SODDISFARE $y'(x) = 0$ SE

$x \in (-\infty, 0)$ QUINDI $y(x) = C$ PER $x < 0$, DEVONO ESSERE CONTINUE (PERCHÉ DERIVABILI)

QUINDI $y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = C$ E PER

$x \geq 0$ SI DEVE AVERE $y(x) - y(0) =$

$$= \int_0^x y'(t) dt \quad \text{PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: SE}$$

$y \in C^1([a, b])$ CIÒÈ SE y È CONTINUA IN

$[a, b]$, DERIVABILE IN $[a, b]$, E y' È

ANCH'ESSA CONTINUA, ALLORA y' È IN-

TEGRABILE E SI HA $\int_a^b y'(t) dt = y(b) - y(a)$.

$$\int_a^b y'(t) dt = y(b) - y(a)$$

SI NOTI CHE ESISTONO $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILI TALI CHE y' NON È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN: ESEMPIO DI VITO VOLTERRA DEL 1881.

UN ALTRO ENUNCIATO DEL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:

SE $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $[a, b]$

ALLORA POSSIÈDE INFINITE PRIMITIVE E, INDICATA CON $Z(x)$ UNA QUALUNQUE DI ESSE,

$$\text{SI HA } \int_a^b z(t) dt = Z(b) - Z(a).$$

NESSO: $z(t) = y'(t)$; $Z(x) = y(x)$

UNA TERZA FORMULAZIONE: SE $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $[a, b]$ ALLORA LA FUNZIONE

$$Z(x) = \int_a^x z(t) dt \quad (\text{FUNZIONE INTEGRALE})$$

È DERIVABILE IN $[a, b]$ E RISULTA CHE

$$Z'(x) = z(x) \quad \text{IN OGNI PUNTO } x \in [a, b].$$

PROSEGUIAMO IL TENTATIVO DI RISOLVERE

$$\text{L'EQUAZIONE } y'(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ABBIAMO GIÀ STABILITO CHE $y(x) = C$ PER

$x \leq 0$, ESSENDO C UNA COSTANTE INCOGNITA.

SICCOME $y'(x) = 1$ PER $x \geq 0$ PER IPOTESI,

$$\text{DEVE AVERSI } y(x) - y(0) = \int_0^x y'(t) dt =$$

$$= \int_0^x 1 dt = x \quad \text{PER } x \in (0, +\infty)$$

CONCLUSIONE: LE EVENTUALI SOLUZIONI DI

$$y'(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ SONO DA RICER-}$$

CERSI FRA LE FUNZIONI AVENTI LA FORMA

$$y(x) = \begin{cases} C, & x \leq 0 \\ C+x, & x > 0 \end{cases}$$

DOVE C È UNA COSTANTE INCOGNITA. DERI-

VANDO L'ESPRESSIONE QUI SOPRA NEL PUNTO

$x_0 = 0$ TROVIAMO:

$$y'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{C - C}{x} = 0$$

$$y'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{C+x - C}{x} = 1$$

POSSIAMO QUINDI AFFERMARE CHE L'EQUAZIONE

$$y'(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ NON HA SOLUZIONI IN}$$

NESSUN INTORNO DELL'ORIGINE.

UN TEOREMA DI ESISTENZA: PONENDO $f(x) = z(x)$

NELLA FORMULAZIONE AVANCIATA DEL TEORE-

MA FONDAMENTALE SI OTTIENE CHE SE f :

$(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ È CONTINUA ALLORA L'EQUAZIONE

$y' = f(x)$ HA INFINITE SOLUZIONI (LE PRIMITIVE

DI f).

SFIDA: TROVARE f DISCONTINUA TALE CHE
L'EQUAZIONE $y' = f$ ABBIА SOLUZIONI!

SFIDA: TROVARE UN'EQUAZIONE DIFFE-
RENZIALE CHE ABBIА UNA E UNA SOLA
SOLUZIONE.

IL PROBLEMA AI VALORI INIZIALI,
DETTO ANCHE PROBLEMA DI CAUCHY

CON RIFERIMENTO ALLA DINAMICA DEL PUNTO
MATERIALE (ESEMPIO 7) RICORDIAMO CHE LA
TRAIETTORIA È DETERMINATA DA:

1) LA LEGGE $\vec{F} = m\vec{a}$;

2) LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \text{ (POSIZIONE INIZIALE)}$$

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \text{ (VELOCITÀ INIZIALE)}$$

DEFINIZIONE: DATA UN'EQUAZIONE DIFFE-
RENZIALE IN FORMA NORMALE, COE'

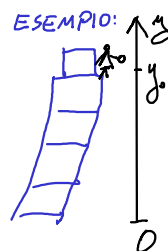
$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

SCELTO UN Istante INIZIALE x_0 E ASSEGNA-
TI I VALORI INIZIALI $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$,

IL PROBLEMA DI CAUCHY È IL SISTEMA

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

$$y''(x) = -g - ky'(x)$$



$$\begin{cases} y''(x) = -g \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY PER L'INCOGNITA $\bar{y}(x)$
 E \mathbb{R}^k :

$$\begin{cases} \bar{y}^{(n)}(x) = \bar{f}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \dots, \bar{y}^{(n-1)}(x)), \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \\ \bar{y}'(x_0) = \bar{y}_1 \\ \dots \\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_{n-1} \end{cases} \quad \bar{a} = \bar{y}''(x) = \frac{1}{m} \bar{F}$$

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA E L'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

PER SEMPLICITÀ CI RIFERIAMO AL PROBLEMA

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} f(x, y) = \\ = y \\ (x_0, y_0) = (0, 1) \end{matrix}$$

SUPPONIAMO CHE

$f: [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $a, b > 0$, SIA DI CLASSE C^1 , CIOÈ $\frac{\partial f}{\partial x}$

E $\frac{\partial f}{\partial y}$ CONTINUE NEL DOMINIO

$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. È SUFFI-

CIENTE LA CONTINUITÀ DI f E DI $\frac{\partial f}{\partial y}$. È

SUFFICIENTE LA CONTINUITÀ DI f E LA CONDIZIONE

DI LIPSCHITZ RISPETTO ALLA y . **TESI:** ESI-

STE $\delta > 0$ TALE CHE NELL'INTERVALLO

$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ IL PROBLEMA DI CAUCHY HA

UNA E UNA SOLA SOLUZIONE. IN GENERALE SI

HA $\delta \leq a$ (ESISTENZA IN PICCOLO)

ESEMPIO: IL PROBLEMA DI CAUCHY $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

SI RISOLVE IMMEDIATAMENTE PERCHÉ LE SOLUZIONI DI $y' = y$ SONO $y(x) = C e^x$, $C \in \mathbb{R}$, E,

FRA QUESTE, QUELLA CHE SODDISFA $y(0) = 1$ È $y(x) = e^x$. NE APPROFITTIAMO PER DARE RISCON-

TRO AL TEOREMA DI CAUCHY: QUI $f(x, y) = y$ E

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ SONO CONTINUE IN \mathbb{R}^2 .

PRENDO UN RETTANGOLO $[-a, a] \times [1-b, 1+b]$ ED

HO CHE ESISTE $\delta \in (0, a]$ TALE CHE NELL'INTERVALLO $[-\delta, \delta]$ IL PROBLEMA DATO HA UNA E UNA SOLA SOLUZIONE.

DIMOSTRIAMO L'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL

PROBLEMA $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ESERCIZIO: SOSTITUIRE $y(0) = 1$ CON $y(x_0) = y_0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

PRIMA PARTE: SE UNA FUNZIONE DERIVABILE $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ SODDISFA $\varphi'(x) = 0$ PER OGNI $x \in (a, b)$

ALLORA, FISSATO $x_0 \in (a, b)$ E PRESO x_1 A PIACERE IN (a, b) RISULTA $\varphi(x_1) = \varphi(x_0)$ (φ È

COSTANTE). INFATTI, APPLICANDO IL TEOREMA

FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE NELLA

FORMULAZIONE BLU TROVIAMO

$$\int_{x_0}^{x_1} 0 dt = \int_{x_0}^{x_1} \varphi'(t) dt = \varphi(x_1) - \varphi(x_0)$$

MA $\int_{x_0}^{x_1} 0 dt = \inf_{\Delta} S(\Delta) = \sup_{\Delta} s(\Delta) = 0$

QUINDI $\varphi(x_1) = \varphi(x_0)$.

SECONDA PARTE: PRENDO UNA SOLUZIONE $y(x)$

DEL PROBLEMA $\begin{cases} y' = f \\ y(0) = 1 \end{cases}$ E STUDIO LA FUNZIONE

$\varphi(x) = y(x) e^{-x}$ PER VERIFICARE CHE $\varphi \equiv 1$.

SI VEDE PER SOSTITUZIONE CHE $\varphi(0) = 1$. INOL-

TRE, DERIVANDO, SI TROVA $\varphi'(x) = y'(x) e^{-x} +$

$$- y(x) e^{-x} = (y'(x) - y(x)) e^{-x} = 0$$

MA ALLORA φ È COSTANTE E LA CONCLUSIONE SEGUE.

PER DIMOSTRARE L'UNICITÀ PIÙ IN GENERALE,

VEDIAMO LA **FORMULAZIONE INTEGRALE** DEL

PROBLEMA DI CAUCHY $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

CHE È

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

LEMMA 1: SE f È CONTINUA IN $[x_0 - a, x_0 + a]$

$\times [y_0 - b, y_0 + b]$ E $y: [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$

SODDISFA $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ALLORA PER O-

gni $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ RISULTA

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

DIMOSTRAZIONE: y È CONTINUA IN $[x_0 - a, x_0 + a]$

IN QUANTO DERIVABILE, QUINDI LA FUNZIONE COM-

POSTA $f(x, y(x))$ È CONTINUA. MA ALLORA ANCHE

$y'(x) = f(x, y(x))$ È CONTINUA.

QUINDI PER IL TEOREMA FONDAMENTALE SI HA

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$$

DA CUI SEGUE $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$.

LEMMA 2: SE $y: [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$

È CONTINUA E SODDISFA

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \text{ ALLORA È}$$

ANCHE DERIVABILE E RISOLVE IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE: ESSENDO $f(x, y)$ **CONTINUA PER**

IPOTESI, LA FUNZIONE INTEGRANDA $z(t) = f(t, y(t))$

È CONTINUA E SI PUÒ APPLICARE IL TEOREMA

FONDAMENTALE (FORMULAZIONE ABANCONONE):

LA FUNZIONE INTEGRALE $Z(x) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

È DERIVABILE E $Z'(x) = f(x, y(x))$. SICCOME

PER IPOTESI $y(x) = y_0 + Z(x)$, NE SEGUE

CHE $y(x)$ È DERIVABILE E $y'(x) = f(x, y(x))$.

INFINE, POSTO $x = x_0$ SI VEDE CHE $y(x_0) = y_0$.

OSSERVAZIONE: LA SOLA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE $f: [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b] \rightarrow \mathbb{R}$ NON ASSICURA L'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY.

TEOREMA: SE $f: [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b] \rightarrow \mathbb{R}$ È CONTINUA INSIEME A $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$,

ALLORA IL PROBLEMA $y' = f(x, y)$
 $y(x_0) = y_0$

AMMETTE TUTTALPIÙ UNA SOLA SOLUZIONE IN QUALUNQUE INTERVALLO $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\delta \in (0, a]$.

DIMOSTRAZIONE: LA CONTINUITÀ DI $\frac{\partial f}{\partial y}$ NEL COMPATTO $K = [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$

ASSICURA L'ESISTENZA DI $L = \max_K \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$.

SIANO $y(x), z(x)$ DUE SOLUZIONI. VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE LA DIFFERENZA $w(x) = y(x) - z(x)$ È IDENTICAMENTE NULLA. DAL LEMMA 1 SAPPIAMO

CHE $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt$ QUINDI

$w(x) = \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) dt$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE, PER OGNI t SI HA

$\frac{f(t, y(t)) - f(t, z(t))}{y(t) - z(t)} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi)$

CON UN ξ NELL'INTERVALLO AVENTE PER ESTREMI $y(t) = z(t)$.

QUINDI $\left| \frac{f(t, y(t)) - f(t, z(t))}{y(t) - z(t)} \right| \leq L$.

MA ALLORA

$|w(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) dt \right| \leq$

$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \right| \leq$

$\leq L \left| \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| dt \right|$ DUNQUE

$|w(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |w(t)| dt \right|$: CIÒ

IMPLICA $w(x) \equiv 0$. PER VEDERLO, PONIAMO

$\|w\|_\infty = \max_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} |w|$ E DEDUCIAMO CHE

$|w(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x \|w\|_\infty dt \right| =$

$= L \|w\|_\infty |x - x_0|$. MA ALLORA ITERO IL

RAGIONAMENTO:

$|w(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x L \|w\|_\infty |t - x_0| dt \right|$

$\leq L^2 \|w\|_\infty \frac{|x - x_0|^2}{2}$. ESERCIZIO: DIMO-

STRATE PER INDUZIONE CHE

$|w(x)| \leq \|w\|_\infty \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!}$ PER OGNI $k \in \mathbb{N}$.

NE SEGUE CHE (PERMANENZA DEL SEGNO)

$|w(x)| \leq \|w\|_\infty \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} = 0$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

OSSERVAZIONE: IL RAGIONAMENTO CONTINUA A VALERE ANCHE SE LA DERIVATA $\partial f / \partial y$ NON ESISTE, PURCHÉ ESISTA $L \in [0, +\infty)$ TALE

CHE
$$\left| \frac{f(t, y(t)) - f(t, z(t))}{y(t) - z(t)} \right| \leq L.$$

DEFINIZIONE: SI DICE CHE LA FUNZIONE $f(x, y)$ SODDISFA LA **CONDIZIONE DI LIPSCHITZ** RISPETTO ALLA y , O CHE È **LIPSCHITZIANA** RISPETTO AD y SE ESISTE $L \in [0, +\infty)$ TALE CHE PER OGNI $(x, y_1), (x, y_2)$ RISULTI

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq L |y_1 - y_2|.$$

OSSERVAZIONE: SE $\frac{\partial f}{\partial y}$ È CONTINUA NEL RETTANGOLO $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ ALLORA f È IVI LIPSCHITZIANA RISPETTO ALLA y .

SFIDA: TROVARE $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ DOTATA DELLA DERIVATA $\partial f / \partial y$ NEL RETTANGOLO $[a, b] \times [c, d]$ E NON LIPSCHITZIANA.

OSSERVAZIONE: SE $f(x, y)$ NON È LIPSCHITZIANA RISPETTO ALLA y , IL PROBLEMA
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PÙÒ AVERE DUE O PIÙ SOLUZIONI.

ESEMPIO (PAG. 177 NUOVA EDIZIONE)

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 = y_0 \end{cases}$$

ESERCIZI: SOSTITUIRE L'EQUAZIONE $y' = 2\sqrt{|y|}$ CON $y' = \sqrt{|y|}$ O CON $y' = \sqrt[3]{y}$.

INNAZZITUTTO VEDIAMO

SE LA $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$

È CONTINUA IN UN INTORNO $[-a, a] \times [b, b]$ DEL PUNTO $(0, 0)$ (**CERTO**). POI VEDIAMO SE LO È LA

DERIVATA
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \text{sgn}(y)}{\sqrt{|y|}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|y|}}, & y > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{|y|}}, & y < 0 \end{cases}$$

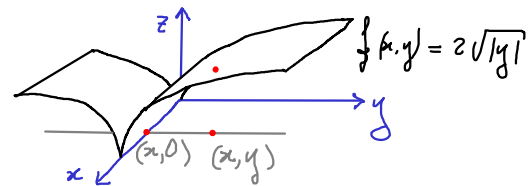
VERAMENTE $f(x, y)$ NON È DERIVABILE NEI PUNTI $(x, 0)$ QUINDI IL DISCORSO È CHIUSO. **RIPIEGHIAMO SULLA**

CONDIZIONE DI LIPSCHITZ E VEDIAMO

SE ESISTE $L \in [0, +\infty)$ TALE CHE PER

OGNI $(x, y_1), (x, y_2)$ RISULTI

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq L |y_1 - y_2|.$$



LA DISUGUAGLIANZA SOVRASTANTE SI PÙÒ RISCRIVERE

$$\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq L \text{ PER } y_1 \neq y_2$$

ESSA DUNQUE ESPRIME LA LIMITATEZZA DEL RAPPORTO

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

MA SICCOME $\lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{2\sqrt{|y|}}{y} \right| = +\infty$ VEDIAMO CHE NON LO È.

PASSIAMO ADESSO A VERIFICARE CHE LE FUNZIONI $y(x) \equiv 0$ E $z(x) = x|x|$ SONO SOLUZIONI DI

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ENTRAMBE SODDISFANO LA CONDIZIONE INIZIALE.

INOLTRE LA $y(x) \equiv 0$ SODDISFA $y'(x) \equiv 0$ E

QUINDI $y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

PER QUANTO RIGUARDA $z(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

$$\text{ABBIAMO } z'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} = \sqrt{|z(x)|} =$$

$= \sqrt{x^2} = |x|$ PER $x \in \mathbb{R}$ QUINDI $z' = 2\sqrt{|z|}$ PER OGNI $x \neq 0$. RESTA DA VERIFICARE CHE $z'(0) = 0$.

METODO 1 (DEFINIZIONE DELLA DERIVATA):

$$z'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z(x) - z(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = 0.$$

METODO 2 (TEOREMA DI LAGRANGE): $\frac{z(x) - z(0)}{x}$

$$= z'(\xi) = 2|\xi| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ PERCHÉ } 0 < |\xi| < |x|.$$

È IL LIMITE DI z'

DIMOSTRIAMO L'ESISTENZA IN PICCOLO CON IL METODO DI PEANO-PICARD (ITERAZIONI SUCCESSIVE):

DEFINIAMO PER RICORRENZA LE FUNZIONI y_i :

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ CON } \delta = a \text{ SE } f \equiv 0$$

$$\text{E } \delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \text{ SE } M = \max_{x \in [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]} |f|$$

> 0 :

$$\begin{cases} y_0(x) \equiv y_0 & f: [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R} \\ y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_i(t)) dt, \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

SE $f \equiv 0$ IL PROBLEMA $\begin{cases} y' = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ HA LA SOLUZIONE

$y(x) \equiv y_0$ CHE ESISTE IN GRANDE. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ANCHE QUANDO $M > 0$ LE $y_i(x)$ CONVERGONO, E CHE, INDICATA CON $y(x)$ LA FUNZIONE LIMITE, ESSA RISOLVE IL PROBLEMA.

BUONA POSTURA DELLA DEFINIZIONE DI $y_{i+1}(x)$:
VERIFICHIAMO CHE $y_i(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ PER OGNI $i \in \mathbb{N}$ ED OGNI $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. BASE DELL'INDUZIONE: $i = 0$. PASSO INDUTTIVO: SUPPONIAMO CHE $y_i(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ E VEDIAMO $y_{i+1}(x)$.

$$|y_{i+1}(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_i(t))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq M \frac{b}{M} = b$$

OSSERVAZIONE: LE y_i SONO DERIVABILI (TEOREMA FONDAMENTALE) E QUINDI CONTINUE. USANDO LA COMPLETEZZA DI \mathbb{R} FAREMO VEDERE CHE CONVERGONO.

INDICATA CON $y(x)$ LA FUNZIONE LIMITE, FACENDO TENDERE i A $+\infty$ NELL'UGUAGLIANZA

$$y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_i(t)) dt$$

SI TROVA $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

QUINDI $y(x)$ RISOLVE IL PROBLEMA (LEMMA 2).

DOVREMO VERIFICARE CHE

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f(t, y_i(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

ESEMPIO DI ESISTENZA LOCALE (173 N.E.):

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad f(x, y) = 1 + y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$a, b \in (0, +\infty); f: [-a, a] \times [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$M = \max(1 + y^2) = 1 + b^2$

$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{1+b^2}\right\} \leq \frac{1}{2}$

SI VEDE CHE LA SOLUZIONE È $y(x) = \tan x$ IL

CUI DOMINIO È L'INTERVALLO APERTO $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

IL CUI RAGGIO È $\frac{\pi}{2}$ (RAGGIO MASSIMALE DI ESISTENZA)

NOTA: IL TEOREMA DI CAUCHY VALE ANCHE PER

IL SISTEMA DEL PRIMO ORDINE
$$\begin{cases} \bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y}(x)) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

DOVE L'INCOGNITA È $\bar{y}: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$

E \bar{y}_0 È UN VETTORE FISSATO IN \mathbb{R}^k . IL DOMINIO

DI \bar{f} È IL CILINDRO $[x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_b(\bar{y}_0)$

CON $\bar{B}_b(\bar{y}_0) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^k : \|\bar{y} - \bar{y}_0\| \leq b\}$

ENUNCIATO: SE $\bar{f}: [x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_b(\bar{y}_0) \rightarrow \mathbb{R}^k$

È CONTINUA E SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ:

ESISTE $L \in [0, +\infty)$ TALE CHE PER OGNI $(x, \bar{y}_1),$

$(x, \bar{y}_2) \in [x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_b(\bar{y}_0)$ SI HA

$$\|\bar{f}(x, \bar{y}_1) - \bar{f}(x, \bar{y}_2)\| \leq L \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|,$$

ALLORA ESISTE $\delta \in (0, a]$ TALE CHE IL PROBLE-

MA DI CAUCHY AMMETTE UNA E UNA SOLA SO-

LUZIONE NELL'INTERVALLO $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ È SODDISFATTA, AD

ESEMPIO, SE LE DERIVATE PARZIALI

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_k} \text{ SONO CONTINUE, OVVERO SE}$$

LA MATRICE JACOBIANA DI $\bar{f}(x, \bar{y})$ RISPETTO A \bar{y}

È CONTINUA IN $[x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_b(\bar{y}_0)$.

ESERCIZIO: DIMOSTRARLO.

LA DIMOSTRAZIONE È ANALOGA: SI DEFINISCE

$$\begin{cases} \bar{y}_0(x) \equiv \bar{y}_0 \\ \bar{y}_{i+1}(x) = \bar{y}_0 + \int_{x_0}^x \bar{f}(t, \bar{y}_i(t)) dt, \quad i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

DOVE L'INTEGRALE RAPPRESENTA IL VETTORE DI \mathbb{R}^k

LE CUI COMPONENTI SONO $\int_{x_0}^x f_1(t, \bar{y}_i(t)) dt, \dots,$

$\int_{x_0}^x f_k(t, \bar{y}_i(t)) dt$ ESSENDO f_1, \dots, f_k LE COMPONENTI DI \bar{f} .

ESERCIZIO: TROVARE $\delta \in (0, a]$ TALE CHE

$\bar{y}_i(x) \in \bar{B}_b(\bar{y}_0)$ PER OGNI $i \in \mathbb{N}$ E PER OGNI $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

PER DIMOSTRARE L'UNICITÀ SI PROCEDE COME VISTO IL 10/03 TENENDO CONTO DEL FATTO CHE

SE UNA $\bar{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ È INTEGRABILE ALLORA

LA FUNZIONE SCALARE $\|\bar{f}(x)\| = \sqrt{f_1^2(x) + \dots + f_k^2(x)}$

È INTEGRABILE E SI HA CHE

$$\left\| \int_a^b \bar{f}(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|\bar{f}(x)\| dx$$

IL PROBLEMA DI CAUCHY PER L'EQUAZIONE

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

FISSATO $\bar{y}_0 = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^m$ E $x_0 \in \mathbb{R}$

SUPPONIAMO CHE $f(x, \bar{y})$ SIA CONTINUA NEL

CILINDRO $[x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_b(\bar{y}_0)$ E SODDISFI

$|f(x, \bar{y}_1) - f(x, \bar{y}_2)| \leq L \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$ CON UNA L OPPORTUNA. ALLORA ESISTE $\delta \in (0, a]$

TALE CHE IL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

AMMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE NELL'INTERVALLO $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. PER LA DIMOSTRAZIONE,

SI TRASFORMA IL PROBLEMA IN UN SISTEMA DEL PRIMO ORDINE. **PRIMA PARTE.** SUPPONIAMO CHE

$y(x)$ SIA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DATO. DEFINIAMO

$z_0(x) = y(x), z_1(x) = y'(x), \dots, z_{n-1}(x)$

$= y^{(n-1)}(x)$. ALLORA LA FUNZIONE $\bar{z}(x) = (z_0(x), \dots, z_{n-1}(x)) \in \mathbb{R}^m$ È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA

$$\begin{cases} z_0'(x) = z_1(x) \\ z_1'(x) = z_2(x) \\ \dots \\ z_{n-2}'(x) = z_{n-1}(x) \\ z_{n-1}'(x) = f(x, z_0(x), z_1(x), \dots, z_{n-1}(x)) \end{cases}$$

CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} z_0(x_0) = y_0 \\ z_1(x_0) = y_1 \\ \dots \\ z_{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

SECONDA PARTE. SE $\bar{z}(x) = (z_0(x), \dots, z_{n-1}(x)) \in \mathbb{R}^m$

È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA DEL PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} z_0'(x) = z_1(x) \\ z_1'(x) = z_2(x) \\ \dots \\ z_{n-2}'(x) = z_{n-1}(x) \\ z_{n-1}'(x) = f(x, z_0(x), z_1(x), \dots, z_{n-1}(x)) \end{cases}$$

OVVERO $z'(x) = \bar{F}(x, \bar{z}(x))$ DOVE $\bar{F}(x, \bar{z}) =$

$$= (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, f(x, \bar{z})), \text{ SODDISFACENTE}$$

LA CONDIZIONE INIZIALE

$$\begin{cases} z_0(x_0) = y_0 \\ z_1(x_0) = y_1 \\ \dots \\ z_{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

OVVERO $\bar{z}(x_0) = \bar{z}_0$ DOVE $\bar{z}_0 = (y_0, \dots, y_{n-1})$,

ALLORA LA FUNZIONE $y(x) = z_0(x)$ RISOLVE IL

PROBLEMA

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

VERIFICA. DALL'EQUAZIONE $z_0'(x) = z_1(x)$ SEGUE CHE $z_1(x) = y_1'(x)$. DA $z_1'(x) = z_2(x)$ SEGUE $z_2(x) = y_1''(x), \dots$, E DALL'EQUAZIONE $z_{n-2}'(x) = z_{n-1}(x)$ SEGUE $z_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x)$.

INFINE, DALL'ULTIMA EQUAZIONE:

$$z_{n-1}'(x) = f(x, z_0(x), z_1(x), \dots, z_{n-1}(x))$$

SEGUE CHE $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$.

LA CONDIZIONE INIZIALE

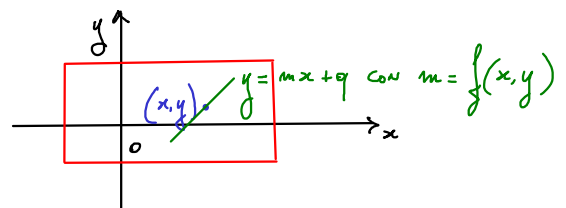
$$\begin{cases} z_0(x_0) = y_0 \\ z_1(x_0) = y_1 \\ \dots \\ z_{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

EQUIVALE EVIDENTEMENTE A

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'EQUAZIONE $y' = f(x, y)$

LA FUNZIONE $f: [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$ DEFINISCE UN CAMPO DI DIREZIONI NEL RETTANGOLO $[x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$



ESEMPIO ILLUSTRATIVO:
$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

QUI $f(x, y) = y$ È DEFINITA IN \mathbb{R}^2

POSSO QUINDI APPLICARE IL TEOREMA DI ESISTENZA

NEL RETTANGOLO $[-a, a] \times [1-b, 1+b]$ CON a, b

ARBITRARI. TESI: ESISTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE

NELL'INTERVALLO $[-\delta, \delta]$ CON $\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$

ESSENDO $M = \max |y| = 1+b$ QUINDI

$$\delta \leq \frac{b}{M} = \frac{b}{1+b} < 1.$$

ALTRO ESEMPIO:
$$\begin{cases} y' = 1+y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

QUI $f(x, y) = 1+y^2$ PER $(x, y) \in \mathbb{R}$ QUINDI

CONSIDERO IL RETTANGOLO $[-a, a] \times [-b, b]$

CON a, b ARBITRARI E HO L'ESISTENZA E L'U-

NICITÀ NELL'INTERVALLO $[-\delta, \delta]$ CON $\delta =$

$\min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ ESSENDO $M = \max_{[-a, a] \times [-b, b]} (1+y^2)$

$$= 1+b^2 \text{ QUINDI } \delta \leq \frac{b}{M} = \frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{2} \text{ (13/03)}$$

CRITERIO DI CAUCHY

UNA SUCCESSIONE NUMERICA (S_n) CONVER-

GE AD UN LIMITE FINITO $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

SE E SOLO SE $\lim_{i, j \rightarrow +\infty} (S_i - S_j) = 0$

NOTARE CHE LA DEFINIZIONE DI LIMITE:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |S_n - S| < \varepsilon$$

FA INTERVENIRE IL LIMITE STESSO

SOMMA DI UNA SERIE NUMERICA

SI SCRIVE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$ SE,

POSTO $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ RISULTA $S_n \rightarrow S$

CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE

LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGE AD UNA SOMMA

FINITA SE E SOLO SE $\lim_{i, j \rightarrow +\infty} (S_i - S_j) =$

$$= \lim_{i, j \rightarrow +\infty} \sum_{k=j+1}^i a_k = 0 \quad (\text{SUPPONGO } i > j)$$

DIMOSTRIAMO CHE LE ITERATE DI PEANO-PICARD CONVERGONO

ABBIAMO $f: [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b] \rightarrow \mathbb{R}$
CONTINUA E TALE CHE $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq$
 $\leq L |y_1 - y_2|$ CON UNA $L \in [0, +\infty)$ OPPORTUNA
(INDIPENDENTE DA x, y_1, y_2). PRENDO $x \in [x_0 - \delta,$
 $x_0 + \delta]$ CON $\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ ESSENDO $M =$

$$= \max_{[x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]} |f| > 0. \text{ SE } M=0$$

IL PROBLEMA È BANALE. DEFINIAMO

$$\begin{cases} y_0^{(x)} \equiv y_0 \\ y_{i+1}^{(x)} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_i(t)) dt, \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE PER OGNI $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

LA SUCCESSIONE $(y_i^{(x)})$ CONVERGE. USIAMO IL CRITERIO DI CAUCHY: VEDIAMO SE

$$\lim_{i, j \rightarrow +\infty} (y_i^{(x)} - y_j^{(x)}) = 0. \text{ PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE}$$

$$\begin{aligned} \text{SI HA } |y_i^{(x)} - y_j^{(x)}| &\leq |y_i^{(x)} - y_{i-1}^{(x)}| + \\ &+ |y_{i-1}^{(x)} - y_{i-2}^{(x)}| + \dots + |y_{j+1}^{(x)} - y_j^{(x)}| = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=j}^{i-1} |y_{k+1}^{(x)} - y_k^{(x)}|$$

$$\text{ANDIAMO A STIMARE } |y_{k+1}^{(x)} - y_k^{(x)}|$$

PROCEDEREMO PER INDUZIONE. $k=0$:

$$|y_1^{(x)} - y_0^{(x)}| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \right| \leq M_0 |x - x_0|$$

$$\text{DOVE } M_0 = \max_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f(t, y_0)|.$$

$$k=1: |y_2^{(x)} - y_1^{(x)}| \leq$$

$$\left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))| dt \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt \right| \leq L M_0 \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

$$k=2: |y_3^{(x)} - y_2^{(x)}| \leq$$

$$\left| \int_{x_0}^x |f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))| dt \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_2(t) - y_1(t)| dt \right| \leq L^2 M_0 \frac{|x - x_0|^3}{3!}$$

ESERCIZIO: DIMOSTRARE PER INDUZIONE CHE

$$|y_{k+1}^{(x)} - y_k^{(x)}| \leq \frac{M_0 (L |x - x_0|)^{k+1}}{L (k+1)!}$$

CHE SUCCEDE SE $L=0$? $f(x, y_1) = f(x, y_2)$

PER OGNI x, y_1, y_2 : $f = f(x)$ E IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \text{ HA LA SOLUZIONE } y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

UTILIZZANDO LA STIMA APPENA RICAVATA, POSSIAMO SCRIVERE

$$|y_i(x) - y_j(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=j}^{i-1} \frac{M_0 (L|x-x_0|)^{k+1}}{L (k+1)!} =$$

$$= \frac{M_0}{L} \sum_{k=j}^{i-1} \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}$$

PER FINIRE, RICORDIAMO CHE $e^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$

PER OGNI α REALE (LA SERIE CONVERGE) QUINDI

$$\sum_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha^k}{k!} \xrightarrow{i,j \rightarrow +\infty} 0. \text{ MA ALLORA PONGO}$$

$$\alpha = L|x-x_0| \text{ ED HO CHE } |y_i(x) - y_j(x)| \leq$$

$$\leq \frac{M_0}{L} \sum_{k=j}^{i-1} \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow{i,j \rightarrow +\infty} 0$$

E PERCIÒ LA SUCCESSIONE $(y_i(x))$ CONVERGE AD

UN LIMITE FINITO $y(x)$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

TEOREMA DI ESISTENZA IN GRANDE

CONSIDERIAMO IL PROBLEMA
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

CON f CONTINUA NELLA STRISCIA $[x_0-a, x_0+a] \times \mathbb{R}$ ($f(x, y) = 1+y^2$) POSSIAMO DEFINIRE

$$\begin{cases} y_0(x) \equiv y_0 \\ y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_i(t)) dt, \quad i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

PER OGNI $x \in [x_0-a, x_0+a]$. LA DIMOSTRAZIONE

DI CONVERGENZA APPENA SVOLTA SI PUÒ ANCORA

FARE PURCHÉ $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq$

$$\leq L|y_1 - y_2| \text{ CON UNA } L \in [0, +\infty) \text{ OPPORTUNA}$$

E INDIPENDENTE DA x, y_1, y_2 .

LA $f(x, y) = 1+y^2$ NON HA QUESTA PROPRIETÀ:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| |y_1 - y_2|$$

È IL RAPPORTO $\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| = |y_1 + y_2|$ È

ILLIMITATO. SE f È GLOBALMENTE LIPSCHITZIANA

RISPETTO ALLA y SI DIMOSTRA CHE IL PROBLEMA DI

CAUCHY HA UNA E UNA SOLA SOLUZIONE $y: [x_0-a, x_0+a] \rightarrow \mathbb{R}$. LA TESI VALE ANCHE SE

f È LOCALMENTE LIPSCHITZIANA E SUBLINEARE NELLA y : $|f(x, y)| \leq A + B|y|$

UNA TIPICA APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI ESISTENZA IN GRANDE È QUELLA ALLE

EQUAZIONI LINEARI. UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE **LINEARE** DI ORDINE n HA LA FORMA

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$$

CON $a_k(x)$, $f(x)$ FUNZIONI ASSEGNATE.

ESEMPLI: SONO LINEARI LE EQUAZIONI $y' = f(x)$,

$$y' = y, \quad y'' = -y$$

CONTROESEMPLI: NON SONO LINEARI LE EQUAZIONI $y'' = -\sin y$ E $y' = y(1-y)$

SIANO DATE LE FUNZIONI $a_k, f: [x_0-a, x_0+a] \rightarrow \mathbb{R}$ E I VALORI INIZIALI y_0, \dots, y_{m-1} .

IL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ \dots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$$

AMMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE y :

$[x_0-a, x_0+a] \rightarrow \mathbb{R}$ SE I COEFFICIENTI $a_k(x)$ E IL TERMINE NOTO $f(x)$

SONO CONTINUI IN $[x_0-a, x_0+a]$ E $a_n(x)$

NON SI ANNULLA IN NESSUN $x \in [x_0-a, x_0+a]$.

PER APPLICARE IL TEOREMA CHE ABBIAMO VISTO SERVE SCRIVERE L'EQUAZIONE NELLA FORMA

$$y^{(n)}(x) = \frac{1}{a_n(x)} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) \right)$$

IL CHE RICHIEDE $a_n(x) \neq 0$ IN $[x_0-a, x_0+a]$.

NON LO SI PUÒ FARE SE $a_n(x) \neq 0$ PER CERTI $x \in [x_0-a, x_0+a]$ E $a_n(x) = 0$ NEGLI ALTRI $x \in [x_0-a, x_0+a]$.

FATTO QUESTO, VEDIAMO SE LA FUNZIONE

$$(x, y_0, \dots, y_{m-1}) \mapsto \frac{1}{a_n(x)} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y_k \right)$$

È CONTINUA, E LO È SE LO SONO $a_k(x)$, $f(x)$.

IL DOMINIO È LO STRATO $[x_0-a, x_0+a] \times \mathbb{R}^m$.

INFINE, CONSTATIAMO CHE LE DERIVATE PARZIALI

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{a_n(x)} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y_k \right) = \frac{-a_i(x)}{a_n(x)}$$

SONO LIMITATE IN $[x_0-a, x_0+a] \times \mathbb{R}^m$ PER IL

TEOREMA DI WEIERSTRASS, QUINDI LA FUNZIONE

IN NERO È GLOBALMENTE LIPSCHITZIANA.

APPLICAZIONE: SE SONO SODDISFATTE LE IPOTESI TESTÉ ENUNCIATE, PRENDO COME DATO INIZIALE IL VETTORE $\bar{y}_0 = e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ESSENDO $\{e_1, \dots, e_n\}$ LA BASE CANONICA DI \mathbb{R}^n E OTTENGONO n CORRISPONDENTI SOLUZIONI $y_1(x), \dots, y_m(x)$. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $f(x) \equiv 0$ CIOÈ SE L'EQUAZIONE È $\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$

(EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA) ALLORA LE SUDDETTE SOLUZIONI $y_1(x), \dots, y_m(x)$ COSTITUISCONO UNA BASE DELLO SPAZIO VETTORIALE DI

TUTTE LE SOLUZIONI. IN ALTRI TERMINI, TALE SPAZIO È COSTITUITO DALLE FUNZIONI

$$y(x) = \sum_{k=1}^m C_k y_k(x).$$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE OMOGENEA

$y'' = -y$ DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI. PONIAMO $x_0 = 0$ E PRENDIAMO COME DATO INIZIALE IL VETTORE $\bar{y}_0 = e_1, e_2$ DOVE $e_1 = (1, 0)$ E $e_2 = (0, 1)$. NE RISULTANO DUE PROBLEMI DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

LE CUI SOLUZIONI SONO $y_1(x) = \cos x$ E $y_2(x) = \sin x$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LO SPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $y'' = -y$ È COSTITUITO DALLE FUNZIONI $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = A \cos x + B \sin x$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE OMOGENEA

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$$

È UNO SPAZIO VETTORIALE IL CUI VETTORE NULLO È LA FUNZIONE $y(x) \equiv 0$, LA FUNZIONE SOMMA $y_1 + y_2$ È DEFINITA DA $x \mapsto y_1(x) + y_2(x)$ E IL PRODOTTO λy È LA FUNZIONE $x \mapsto \lambda y(x)$.

VERIFICA: 1. LA FUNZIONE $y(x) \equiv 0$ SODDISFA BANALMENTE L'EQUAZIONE; 2. SE PRENDO DUE SOLUZIONI $y_1(x)$ E $y_2(x)$, CIOÈ SE

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y_1^{(k)}(x) = 0$$

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y_2^{(k)}(x) = 0$$

E PRENDO $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, MOLTIPLICO E TROVO

$$\lambda_1 \sum_{k=0}^m a_k(x) y_1^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^m a_k(x) \lambda_1 y_1^{(k)}(x) = 0$$

$$\lambda_2 \sum_{k=0}^m a_k(x) y_2^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^m a_k(x) \lambda_2 y_2^{(k)}(x) = 0$$

INFINE SOMMO MEMBRO A MEMBRO E OTTENGO

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) \left(\lambda_1 y_1^{(k)}(x) + \lambda_2 y_2^{(k)}(x) \right) = 0$$

DUNQUE LA FUNZIONE $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ È UNA SOLUZIONE COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

È QUESTA L'ORIGINE DEL CONCETTO DI SPAZIO VETTORIALE!

NOTA: L'EVENTUALE CONTINUITÀ DEI COEFFICIENTI ED IL LORO POSSIBILE ANNULLAMENTO NON INTERVENGONO! LA CONTINUITÀ DEI COEFFICIENTI E LA CONDIZIONE $a_m(x) \neq 0$ IN $[x_0-a, x_0+a]$ MI ASSICURANO CHE LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È UGUALE ALL'ORDINE DELL'EQUAZIONE.

Esercizio: CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE LINEARE

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$$

CHE LE SOLUZIONI DI $\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$

COSTITUISCONO UNO SPAZIO VETTORIALE V .

SUPPONIAMO CHE ESISTA UNA FUNZIONE $z_0(x)$

TALE CHE $\sum_{k=0}^m a_k(x) z_0^{(k)}(x) = f(x)$.

DIMOSTRARE CHE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI

$$z(x) \text{ DI } \sum_{k=0}^m a_k(x) z^{(k)}(x) = f(x) \text{ È}$$

$$\text{L'INSIEME } \left\{ z(x) : \exists y \in V; z = y + z_0 \right\}$$

DIMOSTRIAMO CHE LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È UGUALE ALL'ORDINE DELL'EQUAZIONE. IPOTESI: I COEFFICIENTI $a_k(x)$

SONO CONTINUI IN $[x_0-a, x_0+a]$ E $a_m(x)$ NON SI ANNULLA IN NESSUN $x \in [x_0-a, x_0+a]$.

TESI: LO SPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI

DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$

HA DIMENSIONE n .

OSSERVAZIONE: LA TESI SI PUÒ APPLICARE NELL'INTERVALLO $[\alpha, \beta]$ PONENDO $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$

E $a = \frac{\beta - \alpha}{2}$ IN QUANTO $[\alpha, \beta] = [x_0 - a, x_0 + a]$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: COSTRUIAMO

n GENERATORI LIBERI, CIOÈ n SOLUZIONI $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ DELL'EQUAZIONE DATA TALI CHE:

- 1) SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI;
- 2) QUALUNQUE SOLUZIONE $y(x)$ DELLA STESSA EQUAZIONE SI PUÒ SCRIVERE SOTTO LA FORMA

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j(x) \text{ PRENDENDO CO-}$$

STANTI OPPORTUNE C_j .

LE FUNZIONI $y_j(x)$ SI DEFINISCONO COME LE

n SOLUZIONI DEL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) &= 0 \\ \begin{pmatrix} y(x_0) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} &= \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

CON $\bar{y}_0 = e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ (BASE CANONICA)

PRIMA PARTE: VERIFICHIAMO CHE LE FUNZIONI $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

DOBBIAMO ESCLUDERE CHE ESISTANO n SCALARI $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq \bar{0} \in \mathbb{R}^n$ TALI CHE LA COMBINAZIONE LINEARE $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j$ SIA IL

VETTORE NULLO. **SE FOSSE**

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j(x) = 0 \text{ PER OGNI } x, \text{ ALLORA AVREMMO}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j^{(i)}(x) = 0$$

PER OGNI $i = 0, \dots, n-1$. LO SCRIVO IN

FORMA MATRICIALE: LA MATRICE $\begin{pmatrix} y_j^{(i)}(x) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} y_0(x) & \dots & y_{n-1}(x) \\ y_0'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) \\ \dots & & \dots \\ y_0^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \text{ NON È INVERTIBILE IN}$$

NESSUN PUNTO x PERCHÉ LE COLONNE

$$\begin{pmatrix} y_j(x) \\ y_j'(x) \\ \dots \\ y_j^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

SONO LESATE (NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI). MA SE PONGO $x = x_0$ LA SUDETTA MA-

TRICE DIVENTA

$$\begin{pmatrix} y_0(x_0) & \dots & y_{n-1}(x_0) \\ y_0'(x_0) & \dots & y_{n-1}'(x_0) \\ \dots & & \dots \\ y_0^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = (e_1 \dots e_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

CHE È INVERTIBILE. DUNQUE LE $y_j(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

SECONDA PARTE: INDICO CON $y(x)$ UNA SOLUZIONE QUALUNQUE DELL'EQUAZIONE DATA.

INDIVIDUO COEFFICIENTI C_0, \dots, C_{n-1} TALI

$$\text{CHE RISULTI } y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j(x) \text{ PER}$$

OGNI x . SE VOGLIO CHE VALGA TALE UGUA-

GLIANZA, DOVRÒ NECESSARIAMENTE AVERE

$$y^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j^{(i)}(x) \text{ PER } i = 0, \dots, n-1.$$

PONENDO $x = x_0$ TROVIAMO UNA CONDIZIONE NECESSARIA CHE LE C_j DEVONO SODDISFARE: CON $i = 0$

$$\text{SI TROVA } y(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j(x_0) = C_0,$$

$$\text{CON } i = 1 \text{ SI TROVA } y'(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j'(x_0)$$

$$= C_1, \text{ ECCETERA. DUNQUE } C_j = y_j^{(j)}(x_0).$$

CON TALI $C_j = y_j^{(j)}(x_0)$ MI COSTRUISCO LA FUN-

$$\text{ZIONE } \tilde{y}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j^{(j)}(x_0) y_j(x)$$

E VERIFICO CHE $y(x) = \tilde{y}(x)$ PER OGNI x .

OSSERVIAMO CHE $\tilde{y}(x)$ È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DATA PERCHÉ È COMBINAZIONE LINEARE

DELLE SOLUZIONI $y_j(x)$. INOLTRE, DERIVANDO LA

$$\text{DEFINIZIONE } \tilde{y}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j^{(j)}(x_0) y_j(x) \text{ TROVO}$$

$$y^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j^{(j)}(x_0) y_j^{(i)}(x) \text{ PER } i = 0, \dots, n-1.$$

IN PARTICOLARE, ALL'ISTANTE INIZIALE $x = x_0$ TROVO

$$y^{(i)}(x_0) = \sum_{j=0}^{i-1} y^{(j)}(x_0) y_j^{(i)}(x_0). \text{ PONENDO } i=0$$

VEDO CHE $\tilde{y}(x_0) = y(x_0) y_0(x_0) = y(x_0)$. PONE-

DO $i=1$ VEDO CHE $\tilde{y}'(x_0) = y'(x_0) y_1'(x_0) =$

$= y'(x_0)$, E, IN GENERALE, $\tilde{y}^{(i)}(x_0) = y^{(i)}(x_0)$

PER $i=0, \dots, n-1$. QUINDI RISULTA $\tilde{y}(x) =$

$= y(x)$ PER OGNI x IN VIRTU' DEL TEOREMA DI

UNICITA' (10 MARZO / 14 MARZO).

ESEMPI: $y' = 0, y' = y, y'' = -y,$
 $xy' = 0, xy' = y, y' = 1.$

L'EQUAZIONE $y' = 0$. PONIAMO $x_0 = 0$. IL PRO-

BLEMA $\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ HA LA SOLUZIONE $y(x) \equiv 1$.

OGNI SOLUZIONE DI $y' = 0$ SI PUO' SCRIVERE $y(x)$

$= C_0 y_0(x)$ PRENDENDO $C_0 = y(0)$. SI HA

DUNQUE $y(x) = y(0) y_0(x)$ PER OGNI x .

L'EQUAZIONE $y' = y$. PONIAMO $x_0 = 0$. IL PRO-

BLEMA $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ HA LA SOLUZIONE $y(x) = e^x$.

OGNI SOLUZIONE DI $y' = y$ SI PUO' SCRIVERE $y(x)$

$= C_0 y_0(x)$ PRENDENDO $C_0 = y(0)$. SI HA

DUNQUE $y(x) = y(0) y_0(x)$ PER OGNI x .

INFATTI $y(x) = y(0) e^x$.

FISSANDO UN ARBITRARIO $x_0 \in \mathbb{R}$, IL PROBLEMA

$\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$ HA LA SOLUZIONE $y(x) = e^{x-x_0}$.

OGNI SOLUZIONE DI $y' = y$ SI PUO' SCRIVERE $y(x)$

$= C_0 y_0(x)$ PRENDENDO $C_0 = y(x_0)$. SI HA

DUNQUE $y(x) = y(x_0) y_0(x)$ PER OGNI x .

INFATTI $y(x) = y(x_0) e^{x-x_0}$.

OSSERVAZIONE: SE $y(x)$ SODDISFA L'E-

QUAZIONE $\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$ IN

UN INTERVALLO (c, d) CON COEFFICIENTI

IVI CONTINUI E CON $a_n(x) \neq 0$ PER OGNI x ,

SE $y(x) = 0$ PER OGNI $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$

$C(c, d)$ ALLORA $y(x) = 0$ PER OGNI $x \in (c, d)$.

DIMOSTRAZIONE: SAPPIAMO DALLA LEZIONE DI
IERI CHE LA SOLUZIONE $y(x)$ SI PUÒ RAPPRE-

SENTARE COME $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y^{(j)}(x_0) y_j(x)$

DOVE LE $y_j(x)$ SONO LE FUNZIONI GENERATRICI

CHE ABBIAMO DEFINITO. SICCOME PER IPOTESI

SI HA $y(x) = 0$ IN UN INTORNO DI x_0 , SI A-

Vrà $y^{(j)}(x) = 0$ NELLO STESSO INTORNO, E

QUINDI $y^{(j)}(x_0) = 0$ PER OGNI $j \in \mathbb{N}$. L'OSSERVAZIONE SEGUE.

OSSERVAZIONE: SE $y(x)$ SODDISFA L'E-

QUAZIONE $\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$ IN

UN INTERVALLO (c, d) CON COEFFICIENTI

IVI CONTINUI E CON $a_n(x) \neq 0$ PER OGNI x ,

SE RISULTA $y^{(j)}(x_0) = 0$ PER $j = 0, \dots, n-1$

IN UN QUALCHE PUNTO $x_0 \in (c, d)$ ALLORA

$y(x) \equiv 0$ IN TUTTO L'INTERVALLO (c, d) .

CASO PARTICOLARE $n=1$: SE $y(x)$ SODDISFA

$\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$, CON $a_k(x)$ CONTI-

NUI E $a_1(x) \neq 0$ IN (c, d) ALLORA SCRIVO

L'EQUAZIONE NELLA FORMA $y'(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} y(x)$

E L'OSSERVAZIONE ESPRIME IL FATTO CHE LA SOLU-

ZIONE DI $\begin{cases} y'(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} y(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$ È $y(x) \equiv 0$.

VOGLIAMO SCRIVERE TUTTE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $y'(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} y(x)$, CHE È UN'EQUA-

ZIONE DEL PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARA-

BILI, CIOÈ HA LA FORMA $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$.

STUDIAMO QUESTO TIPO DI EQUAZIONE.

① LE EVENTUALI SOLUZIONI COSTANTI $y(x) \equiv y_0$

SI DICONO SOLUZIONI BANALI. L'EQUAZIONE

$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ HA LA SOLUZIONE COSTAN-

TE $y(x) \equiv y_0$ SE E SOLO SE $f(x) \cdot g(y_0) = 0$

PER OGNI x , QUINDI O $g(y_0) = 0$ (y_0 È

UNO ZERO DI g) OPPURE $f(x) \equiv 0$ NEL QUAL

CASO L'EQUAZIONE È $y' = 0$ CHE SAPPIAMO RI-

SOLVERE.

APPLICAZIONE: L'EQUAZIONE $y'(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} y(x)$

HA $g(y) = y$ E LA SOLUZIONE BANALE $y(x) = 0$.

IL NUMERO $y_0 = 0$ È L'UNICO ZERO DI g . SE

$a_0(x) \equiv 0$ L'EQUAZIONE È $y' = 0$.

② SE $f(x)$ E $g(y)$ SONO FUNZIONI CONTINUE,

SI POSSONO TROVARE LE SOLUZIONI NON BANALI

DELL'EQUAZIONE $y'(x) = f(x) g(y(x))$

CON IL METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI.

DI SOLITO IL METODO SI APPLICA MANIPOLANDO I DIFFERENZIALI COME SEGUE: SCRIVO L'EQUA-

ZIONE COME $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y(x))$ E POI SE-

PARO LE VARIABILI, OTTENENDO

$\frac{dy}{g(y(x))} = f(x) dx$ DOPODI CHE INTEGRO

$$\int \frac{dy}{g(y(x))} = \int f(x) dx. \quad \text{ESEMPIO: PARTO DA}$$

$$y'(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} y(x), \quad \text{LA RISCRIVO } \frac{dy}{y} =$$

$$= -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} y(x), \quad \text{SEPARO LE VARIABILI E}$$

$$\text{OTTENGO } \frac{dy}{y} = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx, \quad \text{E INTEGRO}$$

$$\text{AMBO I MEMBRI: } \int \frac{dy}{y} = \log |y| + C$$

$$\text{L'INTEGRALE } \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx \quad \text{LO LASCIO INDICATO}$$

$$\text{E SCRIVO } \log |y| = -\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx \quad \text{DA CUI}$$

$$\text{RICOVO } y(x) = \pm e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} \quad (\text{SOLUZIONI NON BANALI}).$$

RAPPRESENTIAMO TUTTE LE SOLUZIONI CON UNA SOLA FORMULA. INDICHIAMO CON $A(x)$ UNA PRIMITIVA DI $\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, COSICCHÉ POSSIAMO SCRIVERE

$$\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx = A(x) + C \quad \text{E LE SOLUZIONI NON BANALI SONO } y(x) = \pm e^{-A(x) - C}$$

$$= \pm e^{-C} e^{-A(x)} \quad \text{CON } C \in \mathbb{R}. \quad \text{AL VARIARE DI } C \in \mathbb{R} \text{ IL COEFFICIENTE } \pm e^{-C}$$

DESCRIVE $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. MA ALLORA CONVIENE SCRIVERE $y(x) = k e^{-A(x)}$ CON $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

DUNQUE L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI È DATO DA $y(x) = k e^{-A(x)}$ CON $k \in \mathbb{R}$.

GIUSTIFICAZIONE TEORICA DEL METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI.

PRENDIAMO UNA SOLUZIONE $y(x)$ NON BANALE,

QUINDI TALE CHE $g(y(x))$ NON SI ANNULLA IDENTICAMENTE, QUINDI ESISTE x_0 TALE CHE $g(y(x_0))$

$\neq 0$ E, PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO $g(y(x)) \neq 0$ IN UN INTORNO I DI x_0 .

ESECIZIO: DIMOSTRARE CHE SE UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $y'(x) = f(x) g(y(x))$

RENDE $g(y(x))$ IDENTICAMENTE NULLA, ALLORA $y(x)$ È UNA SOLUZIONE BANALE.

NEL SUDDETTO INTORNO I SI PUÒ DIVIDERE PER

$$g(y(x)) \text{ E SCRIVERE } \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x). \quad \text{ES-}$$

SENDO $f(x)$ E $g(y)$ CONTINUE PER IPOTESI,

$$\text{NE SEGUE CHE } \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$$

ESECIZIO: DIMOSTRARE CHE IL RAPPORTO $\frac{y'(x)}{g(y(x))}$ AMMETTE PRIMITIVA

AL PRIMO MEMBRO EFFETTUIAMO LA SOSTITUZIONE $t = y(x)$ USANDO PROPRIO LA SOLUZIONE $y(x)$ E

$$\text{TROVIAMO } \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int \frac{dt}{g(t)}$$

$$\text{PER PROSEGUIRE, SCRIVIAMO } \int \frac{dt}{g(t)} = G(t) + C$$

$$= G(y(x)) + C \quad \text{E } \int f(x) dx = F(x) + C$$

UGUAGLIANDO I DUE INTEGRALI OTTENIAMO

$$G(y(x)) = F(x) + C. \text{ OSSERVIAMO}$$

CHE $G(t)$ È INVERTIBILE PERCHÉ $G'(t)$

$$= \frac{1}{g(t)} \neq 0: \text{ INDICATA CON } G^{-1} \text{ LA SUA}$$

INVERSA, POSSIAMO ESPLICITARE $y(x)$ E SCRIVERE

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C):$$

OGNI SOLUZIONE NON BANALE AVRÀ QUESTA FORMA. VERIFICHIAMO CHE LE FUNZIONI

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C) \text{ SODDISFANO}$$

$$y'(x) = f(x) g(y(x)). \text{ DERIVANDO LA FUN-$$

ZIONE COMPOSTA, TROVIAMO $y'(x) =$

$$(G^{-1})'(F(x) + C) \cdot f(x). \text{ PER LA RESO-$$

LA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA,

$$\text{SI HA } (G^{-1})'(F(x) + C) = \frac{1}{G'(t)}$$

DOVE t E $F(x) + C$ SONO LEGATE FRA LORO

DALLA RELAZIONE $G^{-1}: F(x) + C \mapsto t$

$$G: t \mapsto F(x) + C$$

$$\text{QUINDI } (G^{-1})'(F(x) + C) = \frac{1}{G'(G^{-1}(F(x) + C))}$$

$$= g(G^{-1}(F(x) + C)) = g(y(x)) \text{ PERCHÉ ABBIAMO}$$

MA PRESO $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$. LA TESI

SEGUE.

ESEMPIO: RISOLVIAMO L'EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA A COEFFICIENTI CONTINUI $xy' = y$.

È UN'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI SULL'INTERVALLO $(-\infty, 0)$ E SULL'INTERVALLO

$(0, +\infty)$. È DEL PRIMO ORDINE ($n=1$) E IL

COEFFICIENTE $Q_n(x) = Q_1(x)$ VALE x . HA

LA SOLUZIONE BANALE $y(x) \equiv 0$. SUGLI INTERVALLI

SUDDETTI SI PUÒ SCRIVERE L'EQUAZIONE

NELLA FORMA $y'(x) = f(x) g(y(x))$ CON

$f(x) = \frac{1}{x}$ E $g(y) = y$. PER TROVARE LE SOLU-

ZIONI NON BANALI, SEPARIAMO LE VARIABILI E

L'EQUAZIONE DIVENTA $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$. INTEGRANDO

AMBO I MEMBRI OTTENIAMO

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| = \log|x| + C$$

DA CUI SI RICAVALA $y = \pm e^C |x|$, $C \in \mathbb{R}$.

IN CONCLUSIONE LE SOLUZIONI SONO LE FUNZIONI

$y(x) = k|x|$, CON $k \in \mathbb{R}$ E $x \in (-\infty, 0)$

OPPURE $x \in (0, +\infty)$. AL VALORE $k=0$ CORRIS-

SPONDE LA SOLUZIONE BANALE. LE FUNZIONI INDI-

CATE IN BLU SI POSSONO EQUIVALENTEMENTE RAPPRE-

SENTARE SOTTO LA FORMA $y(x) = Cx$, $C \in \mathbb{R}$.

Esercizio: VERIFICARLO.

Esercizio 2: TROVARE LE EVENTUALI SOLUZIONI AVANTI PER DOMINIO L'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$.

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE
NON OMOGENEE IN FORMA NORMALE

$$y'(x) = a(x)y(x) + f(x)$$

SE $a(x), f(x)$ SONO FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO, LE SOLUZIONI SI POSSONO TROVARE PER INTEGRAZIONE CON IL METODO DELLA VARIAZIONE

DELLA COSTANTE ARBITRARIA. PRIMA SI SCRIVONO

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE OMOGENEA AS-

SOCIATA $y'(x) = a(x)y(x)$, CHE SONO

$$y(x) = k e^{A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad A(x) \text{ UNA PRI-}$$

MITIVA DI $a(x)$. VERIFICHIAMO CHE, PREN-

DENDO OPPORTUNAMENTE UNA FUNZIONE $\varphi(x)$,

IL PRODOTTO $y(x) = \varphi(x) e^{A(x)}$ SODDISFA

L'EQUAZIONE: SI HA INFATTI $y'(x) = \varphi'(x) e^{A(x)} +$

$+ a(x)y(x)$ QUINDI L'EQUAZIONE DIFFEREN-

ZIALE $y'(x) = a(x)y(x) + f(x)$ È SODDISFATTA

SE E SOLO SE $\varphi'(x) e^{A(x)} = f(x)$ PER OGNI x .

BASTA QUINDI FARE IN MODO CHE $\varphi'(x) = f(x) e^{-A(x)}$

E CIOÈ BASTA PRENDERE $\varphi(x) = \int f(x) e^{-A(x)} dx$.

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE NON OMOGENEA SONO

$$\text{DUNQUE } y(x) = e^{A(x)} \int f(x) e^{-A(x)} dx.$$

VERIFICHIAMO CHE, PONENDO $f(x) \equiv 0$ NELLA FOR-

MULA $y(x) = e^{A(x)} \int f(x) e^{-A(x)} dx$, SI

OTTENGO LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE

$y'(x) = a(x)y(x)$. ESSENDO $\int 0 dx = C$,

LA FORMULA SI RIDUCE A $y(x) = C e^{A(x)}$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

APPLICHIAMO ORA ALL'EQUAZIONE $y'(x) =$

$= a(x)y(x) + f(x)$ LE CONSIDERAZIONI DEL

17/03 SULLA STRUTTURA DELL'INSIEME DELLE

SOLUZIONI. PER FARLO, SCRIVIAMO

$$\int f(x) e^{-A(x)} dx = F(x) + C \text{ CON}$$

$F(x)$ UNA PRIMITIVA DI $f(x) e^{-A(x)}$. LE

SOLUZIONI DI $y'(x) = a(x)y(x) + f(x)$ SI

POSSONO SCRIVERE $y(x) = C e^{A(x)} + z_0(x)$

CON $z_0(x) = F(x) e^{A(x)}$ SOLUZIONE PARTI-

COLARE. SI HA INFATTI $z_0'(x) = F'(x) e^{A(x)} +$
 $+ a(x) z_0(x) = a(x) z_0(x) + f(x) e^{-A(x)} e^{A(x)}$
 $= a(x) z_0(x) + f(x)$.

ESEMPIO: RISOLVIAMO L'EQUAZIONE $xy' = y - x$ SULL'INTERVALLO $(0, +\infty)$. L'EQUAZIONE EQUIVALE A $y' = \frac{1}{x}y - 1$ E LE SOLUZIONI SONO $y(x) = Cx + z_0(x)$, CON $z_0(x) = \varphi_0(x)x$ E $\varphi_0(x)$ DA DETERMINARSI PER SOSTITUZIONE.

SI TROVA $z_0'(x) = \varphi_0'(x)x + \varphi_0(x) = \varphi_0'(x)x + \frac{1}{x}z_0(x)$ QUINDI BASTA PRENDERE $\varphi_0(x)$ TALE CHE $\varphi_0'(x)x = -1$ PER OGNI x , DUNQUE PRENDIAMO $\varphi_0(x) = -\log|x|$ DA CUI SEGUE $z_0(x) = -x \log|x|$.

VERIFICA: $z_0'(x) = -\log|x| - 1 = \frac{1}{x}z_0(x) - 1$.

QUINDI LE SOLUZIONI DI $xy' = y - x$ SULL'INTERVALLO $(0, +\infty)$ SONO $y(x) = Cx - x \log|x|$.

Esercizio 1: TROVARE LE SOLUZIONI SULL'INTERVALLO $(-\infty, 0)$

Esercizio 2: TROVARE LE SOLUZIONI SULL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$.

ESTENSIONE ALLE EQUAZIONI DI ORDINE SUPERIORE: METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^n a_k(x)y^{(k)}(x) = f(x)$ CON $a_k(x), f(x)$ FUNZIONI CONTINUE E $a_n(x) \neq 0$ PER OGNI x . SAPPIAMO CHE LE SOLUZIONI DI $\sum_{k=0}^n a_k(x)y^{(k)}(x) = 0$ SONO $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j(x)$ CON $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$

UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI E C_j COSTANTI OPPORTUNE. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LE SOLUZIONI DI $\sum_{k=0}^n a_k(x)y^{(k)}(x) = f(x)$ SI POSSONO SCRIVERE NELLA FORMA $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j(x)$ CON $\varphi_j(x)$ INDIVIDUATE DALLA CONDIZIONE $\varphi_j'(x) = \psi_j(x)$ E LE $\psi_j(x)$ SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) y_j^{(i)}(x) = 0, & i=0, \dots, n-2 \\ \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) y_j^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

Esercizio: PORRE $n=2$, CONSIDERARE L'EQUAZIONE $y'' = x - y$, TROVARE LE SOLUZIONI PROCEDENDO COME SOPRA

BUONA POSITURA DELLA DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI ψ_j

LE FUNZIONI ψ_j SONO DEFINITE COME LE SOLUZIONI DEL SISTEMA

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) y_j^{(i)}(x) = 0, & i=0, \dots, n-2 \\ \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) y_j^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

LA CUI MATRICE DEI COEFFICIENTI È $\begin{pmatrix} y_j^{(i)}(x) \end{pmatrix}$

VERIFICHIAMO CHE LA MATRICE $\begin{pmatrix} y_j^{(i)}(x) \end{pmatrix}$ È n -

VERTIBILE QUALUNQUE SIA x . CHE SUCCEDA SE E-

SISTE UN PUNTO x_0 TALE CHE LA MATRICE

$\begin{pmatrix} y_j^{(i)}(x_0) \end{pmatrix}$ NON È INVERTIBILE? ESISTONO n

SCALARI $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq \bar{0} \in \mathbb{R}^n$ TALI CHE

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j^{(i)}(x_0) = 0 \text{ PER } i=0, \dots, n-1.$$

CON TALI λ_j DEFINISCO $\tilde{y}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j(x)$

E VEDO CHE $\tilde{y}^{(i)}(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j^{(i)}(x_0) = 0$

PER $i=0, \dots, n-1$. QUINDI, PER L'OSSERVAZIONE

DEL 22/03 SI HA $\tilde{y}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j(x) = 0$

PER OGNI x , DUNQUE LE FUNZIONI $y_j(x)$ NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

REGOLARITÀ DELLE FUNZIONI $\psi_j(x)$

LE SOLUZIONI $\psi_j(x)$ SONO DATE DA

$$\begin{pmatrix} \psi_0(x) \\ \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_j^{(i)}(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \text{ DOVE LE } y_j^{(i)}(x)$$

SONO DERIVABILI E $\frac{f(x)}{a_n(x)}$ È UNA FUNZIONE CONTINUA,

QUINDI OGNI $\psi_j(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA.

CONSEGUENZA: LA FUNZIONE $\varphi_j(x) = \int \psi_j(x) dx$ È BEN DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE ADDITIVA.

VERIFICA FINALE

VERIFICHIAMO, PER SOSTITUZIONE, CHE LA FUN-

ZIONE $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j(x)$ SODDISFA

L'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$.

DERIVANDO $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j(x)$ TRO-

VIAMO $y'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x) y_j(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) y_j(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j'(x)$.

SIMILMENTE SI TROVA $y''(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x) y_j'(x) +$
 $+ \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j''(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j'(x) y_j'(x) +$
 $+ \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j''(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j''(x)$

PERCHÉ $\sum_{j=0}^{n-1} \psi_j'(x) y_j'(x) = 0$ PER LA SECONDA
 EQUAZIONE ($i=1$) DEL SISTEMA CHE DEFINISCE $\psi_j(x)$.

PROCEDENDO IN QUESTO MODO, SI TROVA

$$y^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j^{(i)}(x) \text{ PER } i = 0, \dots, n-1$$

$$E \ y^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) y_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j^{(n)}(x)$$

$$= \frac{f(x)}{a_n(x)} + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j^{(n)}(x). \text{ RICORDANDO CHE}$$

$$y_j^{(n)}(x) = \frac{-1}{a_n(x)} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y_j^{(k)}(x) \text{ SI CONCLUDE}$$

$$\text{CHE } a_n(x) y^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y_j^{(k)}(x)$$

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j^{(k)}(x) =$$

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) \text{ DUNQUE}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) \text{ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.}$$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE $y'' = x - y$.
 L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA È $y'' = -y$ LE
 CUI SOLUZIONI SONO $A \cos x + B \sin x$. CERCHIAMO
 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ TALI CHE LA FUNZIONE $y(x) = \varphi_0(x) \cos x +$
 $+ \varphi_1(x) \sin x$ SODDISFI $y''(x) = x - y(x)$.

INNANZITUTTO DETERMINO LE SOLUZIONI $\psi_0(x), \psi_1(x)$
 DEL SISTEMA $\begin{cases} \psi_0(x) \cos x + \psi_1(x) \sin x = 0 \\ -\psi_0(x) \sin x + \psi_1(x) \cos x = x \end{cases}$

CHE SONO

$$\begin{pmatrix} \psi_0(x) \\ \psi_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}$$

LE INTEGRO E TROVO $\varphi_0(x) = -\int x \sin x \, dx =$
 $= x \cos x - \int \cos x \, dx = x \cos x - \sin x + A$

E $\varphi_1(x) = \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$
 $= x \sin x + \cos x + B$. CON ESSE, SCRIVO

LE SOLUZIONI $y(x) = (x \cos x - \sin x + A) \cos x +$
 $+ (x \sin x + \cos x + B) \sin x = x \cos^2 x + B \sin x +$

DELL'EQUAZIONE $y'' = x - y$. SI CONSTATA CHE LA
 FUNZIONE $z_0(x) = x$ È UNA SOLUZIONE PARTICOLARE,
 E $A \cos x + B \sin x$ È L'INTEGRALE GENERALE DI $y'' = -y$.

N.B. « INTEGRALE » È SINONIMO DI « SOLUZIONE ».

OSSERVAZIONE: POSTO $\varphi_j(x) = \int_j^x f_j(x) + C_j$ CON

$\int_j^x f_j(x)$ UNA FISSATA PRIMITIVA DI $f_j(x)$ SI HA

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) y_j'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^x f_j(x) y_j'(x) + \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j'(x) = z_0(x) + \sum_{j=0}^{n-1} C_j y_j'(x).$$

ME 29 MAR 2023

UNA DELLE DIFFICOLTÀ A TRADURRE IN PRATICA IL METODO RISIEDA NELLA DETERMINAZIONE DELLA BASE $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ DELLO SPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = 0 \quad (\text{CFR. LEZ. 21/03}).$$

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $a_k(x) \equiv a_k$ PER $k=0, \dots, m$, $a_m \neq 0$, EULERO MISE IN LUCE UNA RELAZIONE FRA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$\sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}(x) = 0 \quad \text{E L'EQUAZIONE ALGEBRICA}$$

$$\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = 0 \quad \text{NELL'INCOGNITA } \lambda \in \mathbb{C}.$$

TEOREMA: SE $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = 0$ DI MOLTEPLICITÀ m

ALLORA LE FUNZIONI $y(x) = x^p e^{\lambda_0 x}$ SONO SOLUZIONI DI $\sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}(x) = 0$ PER $p = 0, \dots, m-1$.

ESEMPIO: $y'' = 0$ HA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 = 0$ CHE HA LA SOLUZIONE $\lambda_0 = 0$

DI MOLTEPLICITÀ $m=2$ QUINDI LE FUNZIONI

$$y_0(x) = x^0 e^{0 \cdot x} \text{ E } y_1(x) = x^1 e^{0 \cdot x}, \text{ CIOÈ}$$

$$y_0(x) \equiv 1 \text{ E } y_1(x) = x, \text{ SONO UNA BASE}$$

DELLO SPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI, IL QUALE DUNQUE È COSTITUITO DALLE FUNZIONI

$$y(x) = C_0 y_0(x) + C_1 y_1(x) = C_0 + C_1 x$$

COME SI VEDE IMMEDIATAMENTE.

ESEMPIO: $y'' = -y$ HA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 = -\lambda^0$ CIOÈ $\lambda^2 = -1$ LE CUI SOLUZIONI SONO $\pm i$ ED HANNO MOLTEPLICITÀ $m=1$ QUINDI LE FUNZIONI $y_0(x) = e^{ix}$ E $y_1(x) = e^{-ix}$

SONO UNA BASE DELLO SPAZIO VETTORIALE DELLE

$$\text{SOLUZIONI } y(x) = C_0 e^{ix} + C_1 e^{-ix},$$

$C_0, C_1 \in \mathbb{C}$. PER RICAVARE LE SOLUZIONI

A VALORI REALI SCRIVAMO $C_0 = A_0 + i B_0$,

$$C_1 = A_1 + i B_1 \text{ CON } A_0, B_0, A_1, B_1 \in \mathbb{R}$$

E $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ E OTTENIAMO

$$\begin{aligned} y(x) &= (A_0 + i B_0) (\cos x + i \sin x) + (A_1 + i B_1) (\cos x - i \sin x) = \\ &= (A_0 + A_1) \cos x + (B_1 - B_0) \sin x + i \left((B_0 + B_1) \cos x + (A_0 - A_1) \sin x \right) \end{aligned}$$

LA SUDDETTA FUNZIONE $y(x)$ È A VALORI REALI

$$\text{SE } \begin{cases} B_0 + B_1 = 0 \\ A_0 - A_1 = 0 \end{cases}$$

IN TAL CASO ESSA ASSUME LA FORMA

$$y(x) = 2A_0 \cos x + 2B_1 \sin x \\ = A \cos x + B \sin x$$

CHE È QUELLA NOTA.

PER SVOLGERE LA **DIMOSTRAZIONE** DEL TEOREMA

OSSERVIAMO CHE, DATA UNA MATRICE $(a_{ik})_{i,k=0,\dots,n}$

LA SOMMA $\sum_{i \leq k} a_{ik}$ DEGLI ELEMENTI DELLA SOT-

TO-MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE DESTRA SI

$$\text{PUÒ SCRIVERE } \sum_{i \leq k} a_{ik} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_{ik} =$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_{ik}.$$

ESERCIZIO: 1) VERIFICARE CHE SE $\lambda \in \mathbb{R}$ E $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ CON $p_1 \neq p_2$ LE FUNZIONI $x^{p_1} e^{\lambda x}$ E $x^{p_2} e^{\lambda x}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI;

2) VERIFICARE CHE SE $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ CON $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ALLORA LE FUNZIONI $x^{p_1} e^{\lambda_1 x}$ E $x^{p_2} e^{\lambda_2 x}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI PER OGNI p_1, p_2 ;

3) VERIFICARE CHE SE $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ È UNA SOLUZIONE DELL'E-

QUAZIONE $\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = 0$ ALLORA LA FUNZIONE

$$y(x) = e^{\lambda_0 x} \text{ SODDISFA } \sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}(x) = 0$$

PER SVOLGERE LA **DIMOSTRAZIONE** DEL TEOREMA

OSSERVIAMO CHE SE λ_0 È UNA SOLUZIONE DI $\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = 0$ DI MOLTEPLICITÀ m ALLORA

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$$

CON UN POLINOMIO $Q(\lambda)$ OPPORTUNO.

RICORDIAMO LA **FORMULA DI LEIBNIZ**:

$$(f(x)g(x))^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

IPOTESI: f, g DERIVABILI k VOLTE. LA TESI

SI DIMOSTRA PER INDUZIONE. BASE DELL'INDUZIONE:

$k=1$. IN TAL CASO LA FORMULA DIVENTA

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

PASSO INDUTTIVO: **SVOLGERE PER ESERCIZIO.**

CONSIDERIAMO ADESSO UN POLINOMIO

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$$

E CALCOLIAMO $P^{(i)}(\lambda_0)$ PER $i=0, \dots, m-1$.

USANDO LA FORMULA DI LEIBNIZ TROVIAMO

$$P^{(i)}(\lambda) = \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \frac{d^h}{d\lambda^h} (\lambda - \lambda_0)^m Q^{(i-h)}(\lambda)$$

OSSERVIAMO CHE $h \leq i < m$ QUINDI

$$\frac{d^h}{d\lambda^h} (\lambda - \lambda_0)^m = m(m-1)\dots(m-h+1)(\lambda - \lambda_0)^{m-h}$$

E SI ANNULLA QUANDO $\lambda = \lambda_0$ PERCHÉ $h < m$.

CONCLUSIONE: $P^{(i)}(\lambda_0) = 0$ PER $i=0, \dots, m-1$.

DMOSTRIAMO CHE SE $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = 0$ DI MOLTEPLICITÀ m

ALLORA LE FUNZIONI $y(x) = x^p e^{\lambda_0 x}$ SONO SOLUZIONI DI $\sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}(x) = 0$ PER $p = 0, \dots, m-1$. PROCEDIAMO PER SOSTITUZIONE.

PER LA REGOLA DI LEIBNIZ SI HA CHE

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{d^i}{dx^i} x^p \right) \cdot \lambda_0^{k-i} e^{\lambda_0 x}$$

$$\begin{aligned} \text{QUINDI } \sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}(x) &= \\ &= e^{\lambda_0 x} \sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{d^i}{dx^i} x^p \right) \cdot \lambda_0^{k-i} \\ &= e^{\lambda_0 x} \sum_{i=0}^m \left(\frac{d^i}{dx^i} x^p \right) \cdot \sum_{k=i}^m a_k \binom{k}{i} \lambda_0^{k-i} \end{aligned}$$

DISTINGUIAMO DUE CASI: SE $i > p$ ALLORA

$$\frac{d^i}{dx^i} x^p \equiv 0. \text{ SE, INVECE, } i \leq p < m$$

$$\text{ALLORA } \sum_{k=i}^m a_k \binom{k}{i} \lambda_0^{k-i} = 0 \text{ PER LA CAR}$$

RATTERIZZAZIONE ANALITICA DELLA MOLTEPLICITÀ:

$$\text{INFATTI } P^{(i)}(\lambda) = \sum_{k=i}^m a_k k(k-1)\dots(k-i+1) \lambda^{k-i}$$

$$\text{QUINDI } \frac{P^{(i)}(\lambda_0)}{i!} = \sum_{k=i}^m a_k \binom{k}{i} \lambda_0^{k-i} = 0.$$

$$\text{NE SEGUE CHE } \sum_{k=0}^m a_k y^{(k)}(x) = 0 \text{ COME}$$

VOLEVASI DIMOSTRARE.

CENNI ALLE EQUAZIONI DEL TIPO DI EULERO

SONO EQUAZIONI LINEARI I CUI COEFFICIENTI $a_k(x)$ HANNO LA FORMA $a_k(x) = a_k x^k$

CIOÈ SONO LE EQUAZIONI DELLA FORMA

$$\sum_{k=0}^m a_k x^k y^{(k)}(x) = f(x).$$

SE $a_m \neq 0$ HANNO ORDINE n PER $x \in (-\infty, 0)$

E PER $x \in (0, +\infty)$. SI TRASFORMANO IN

EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI CON IL

CAMBIAMENTO DI VARIABILE $x = e^t$, OV-

VERO $t = \log x$ PER $x \in (0, +\infty)$, E $x =$

$= -e^t$, DUNQUE $t = \log(-x)$ PER $x < 0$.

LA FUNZIONE INCOGNITA DIVENTA $z(t) = y(e^t)$

NEL PRIMO CASO, E $z(t) = y(-e^t)$ NEL SECONDO.

IL TERMINE NOTO SARÀ $g(t) = f(e^t)$, OVVERO

$g(t) = f(-e^t)$. PER FISSARE LE IDEE, CONSI-

DERIAMO $x > 0$. L'EQUAZIONE

$$\sum_{k=0}^m a_k x^k y^{(k)}(x) = f(x), \quad x > 0$$

DIVENTA $\sum_{k=0}^m a_k e^{kt} y^{(k)}(e^t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}$

PER ESPRIMERLA IN TERMINI DELLA FUNZIONE

$z(t) = y(e^t)$, DETERMINIAMO $z^{(k)}(t)$ PER

DERIVAZIONE. TROVAMO $z'(t) = e^t y'(e^t)$

QUINDI IL TERMINE CORRISPONDENTE A $k=1$

CHE È $a_1 e^t y'(e^t)$ DIVENTA $a_1 z'(t)$

N.B. PER $k=0$ SI HA $a_0 y(e^t) = a_0 z(t)$.

PER PROSEGUIRE, DERIVIAMO $z'(t) = e^t y'(e^t)$
E TROVIAMO $z''(t) = z'(t) + e^{2t} y''(e^t)$.

QUINDI IL TERMINE CORRISPONDENTE A $k=2$,
CHE È $a_2 e^{2t} y''(e^t)$ SI PUÒ SCRIVERE

$$a_2 (z''(t) - z'(t)) = a_2 z''(t) - a_2 z'(t).$$

PER PROSEGUIRE, DERIVIAMO $z'''(t) = z''(t) +$

$$+ e^{2t} y''(e^t) \text{ E OTTENIAMO } z'''(t) = z''(t) +$$

$$+ 2(z''(t) - z'(t)) + e^{3t} y'''(e^t),$$

QUINDI IL TERMINE CORRISPONDENTE A $k=3$

CHE È $a_3 e^{3t} y'''(e^t)$ SI SCRIVE $a_3 z'''(t) +$

$$- 3a_3 z''(t) + 2a_3 z'(t), \text{ ECCETERA,}$$

FINCHÉ SI OTTENE UN'EQUAZIONE AVENTE

$$\text{LA FORMA } \sum_{k=0}^n b_k z^{(k)}(t) = g(t) \text{ CHE}$$

È A COEFFICIENTI COSTANTI. RISOLTA QUESTA,

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DATA SONO,

$$\text{OVVIAMENTE, } y(x) = z(\log x) \text{ PER } x > 0.$$

ESEMPIO: L'EQUAZIONE $xy' = y$ È UN'EQUAZIONE DEL TIPO DI EULERO, CON $a_1 = 1$, $a_0 = -1$.

RISOLVIAMOLA SULL'INTERVALLO $(-\infty, 0)$ CON LA SOSTITUZIONE $x = -e^t$. PONIAMO QUINDI

$$z(t) = y(-e^t) \text{ PER } t \in \mathbb{R}. \text{ DERIVANDO, OTTENIAMO } z'(t) = -e^t y'(-e^t) \text{ QUINDI L'E-}$$

$$\text{QUAZIONE } xy'(x) = y(x) \text{ DIVENTA } -e^t y'(-e^t) =$$

$$= y(-e^t) \text{ OVVERO } z'(t) = z(t).$$

LE SOLUZIONI DI $z'(t) = z(t)$ SONO $z(t) =$

$$= k e^t \text{ E PERCIÒ QUELLE DI } xy' = y \text{ SULL'INTERVALLO } (-\infty, 0) \text{ SONO } y(x) = z(\log(-x)) =$$

$$= k e^{\log(-x)} = -kx, k \in \mathbb{R}. \text{ CONVIENE}$$

PORRE $C = -k$ E SCRIVERE $y(x) = Cx$,

$$C \in \mathbb{R}.$$

NOTA: UN ALTRO CAMBIAMENTO DI VARIABILE, SEMPLICE ED UTILE, PUÒ ESSERE $z(x) = y'(x)$:

IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE $\sum_{k=1}^n a_k(x) y^{(k)}(x)$

$$= f(x), \text{ PRIVA DEL TERMINE } a_0(x) y(x), \text{ DIVENTA}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k(x) z^{(k-1)}(x) = f(x) \text{ CHE}$$

$$\text{SI PUÒ SCRIVERE } \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(x) z^{(i)}(x) = f(x)$$

ED È DI ORDINE INFERIORE. RISOLTA QUESTA,

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DATA SONO OVVIAMENTE

$$y(x) = \int z(x) dx.$$

EESERCIZIO: RISOLVERE L'EQUAZIONE $y'' + y' = 0$.

CENNI AL METODO DI SOMIGLIANZA

SERVE PER TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE

$z_0(x)$ DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = f(x)$

LINEARE, NON OMOGENEA, A COEFFICIENTI COSTANTI, CON TERMINE NOTO $f(x)$ DI TIPO ESPONENZIALE, CIRCOLARE O POLINOMIALE.

IL METODO SI BASA SUL FATTO CHE, SE $y(x)$ È UNA FUNZIONE DEL TIPO SUDDETTO, ALLORA ANCHE

LA FUNZIONE $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x)$ LO È.

QUINDI PER TROVARE UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = f(x)$ CON f DEL TIPO

SUDDETTO, CERCO $y(x)$ DELLO STESSO TIPO LIMITANDOMI A DETERMINARE, PER SOSTITUZIONE, I SUOI PARAMETRI.

ESEMPIO: RISOLVIAMO $y'' = x - y$. QUI $f(x) = x$ È UN POLINOMIO DI PRIMO GRADO. QUINDI CERCO I PARAMETRI $m, q \in \mathbb{R}$ TALI CHE LA FUNZIONE

$z_0(x) = mx + q$ SODDISFI L'EQUAZIONE:

SI HA $z_0'(x) = m$ E $z_0''(x) = 0$, QUINDI OCCORRE E BASTA CHE $0 = x - (mx + q)$ PER OGNI x . MA ALLORA PRENDO $m = 1$ E $q = 0$,

DUNQUE $z_0(x) = x$ E POSSO RAPPRESENTARE TUTTE LE SOLUZIONI CON $y(x) = x + A \cos x + B \sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO: $y'' = e^x - y$. CERCO $z_0(x) = \alpha e^x$ CON α DA DETERMINARSI PER SOSTITUZIONE. SI HA $z_0''(x) = \alpha e^x$ QUINDI OCCORRE E BASTA CHE $\alpha e^x = e^x - \alpha e^x$ DUNQUE PRENDO $\alpha = \frac{1}{2}$ E CIOÈ $z_0(x) = \frac{1}{2} e^x$.

L'INTEGRALE GENERALE È PERTANTO $y(x) = \frac{1}{2} e^x + A \cos x + B \sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO: $y'' = y - \sin 2x$. L'EQUAZIONE OMOGENEA $y'' = y$ HA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 = \lambda^0$ CIOÈ $\lambda^2 = 1$ CHE HA LE SOLUZIONI $\lambda_{1,2} = \pm 1$ SEMPLICI E REALI, DUNQUE IL SUO INTEGRALE GENERALE È $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$.

PER TROVARE $z_0(x)$ SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE COMPLETA CERCO FRA LE FUNZIONI $z_0(x) = \alpha \sin 2x$. SI HA $z_0''(x) = -4\alpha \sin 2x$ QUINDI OCCORRE E BASTA CHE $-4\alpha \sin 2x = \alpha \sin 2x - \sin 2x$ DUNQUE PRENDO α SOLUZIONE DI $-4\alpha = \alpha - 1$ E CIOÈ $\alpha = \frac{1}{5}$, CON IL QUALE INDIVIDUO $z_0(x) = \frac{1}{5} \sin 2x$ E PERCIÒ L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE DATA È $y(x) = \frac{1}{5} \sin 2x + Ae^x + Be^{-x}$.

ESEMPIO: $y'' = -y + \sin x$. QUI AVVIENE

CHE OGNI $y(x) = \alpha \sin x$ SODDISFA $y'' = -y$

E NON SODDISFA $y'' = -y + \sin x$. PONIAMO

ALLORA $z_0(x) = \alpha x \sin x$ E OTTENIAMO

$$z_0'(x) = \alpha \sin x + \alpha x \cos x \text{ E } z_0''(x) =$$

$$= 2\alpha \cos x - \alpha x \sin x. \text{ ABBIAMO BISOGNO CHE } 2\alpha \cos x - \alpha x \sin x = -\alpha x \sin x +$$

$+ \sin x$ E NON C'È VERSO. INTRODUCIAMO

ALLORA ANCHE $\cos x$ E USIAMO DUE PARAMETRI

A, B ANZICHÉ UNO: PONIAMO $z_0(x) =$

$$= x (A \cos x + B \sin x) \text{ COSÌ CHE } z_0'(x) =$$

$$= (A \cos x + B \sin x) + x (-A \sin x + B \cos x)$$

$$\text{E } z_0''(x) = 2(-A \sin x + B \cos x) +$$

$$-x (A \cos x + B \sin x) \text{ E CERCHIAMO } A, B$$

$$\text{TALI CHE } 2(-A \sin x + B \cos x) - x (A \cos x + B \sin x)$$

$$= -x (A \cos x + B \sin x) + \sin x \text{ DUNQUE}$$

$$A = -\frac{1}{2} \text{ E } B = 0 \text{ VALE A DIRE } z_0(x) =$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos x. \text{ L'INTEGRALE GENERALE}$$

DELL'EQUAZIONE DATA È PERTANTO $y(x) =$

$$= -\frac{1}{2} x \cos x + A \cos x + B \sin x.$$