INTRODUZIONE ALL'ANALISI NON LINEARE

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. In queste note intendiamo fornire un'introduzione (quasi) elementare ai principi dell'analisi non lineare e alle sue applicazioni nel campo delle equazioni alle derivate parziali ellittiche non lineari. Dapprima presentiamo in sintesi la teoria dei punti critici: teoremi di minimo, di min-max, teoria di Morse. Quindi la teoria del grado topologico: grado di Brouwer, sua estensione a operatori monotoni e a operatori gradienti. Segue una panoramica sul problema di Dirichlet per equazioni non lineari imperniate sul laplaciano: soluzioni deboli, cenni di teoria della regolarità, autovalori e autofunzioni. Infine passiamo in rassegna alcuni classici risultati di esistenza e molteplicità per le soluzioni del problema di Dirichlet con diverse reazioni, attraverso metodi variazionali e topologici.

INDICE

Versione del 26 febbraio 2023

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
VIA OSPEDALE 72, 09124 CAGLIARI, ITALY
antonio.iannizzotto@unica.it

Notazioni

Introduciamo qui alcune notazioni che saranno usate in seguito. Poniamo

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},\ \mathbb{N}_0 = \{1, 2, \dots\}.$$

Per ogni $N \in \mathbb{N}_0$ poniamo

$$\mathbb{B}^N = \big\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1\big\},\ \mathbb{S}^{N-1} = \big\{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\big\}.$$

Di solito, X denota uno spazio di Hilbert (reale) con prodotto scalare $\langle x, y\rangle$ e norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}.$$

In virtù del Teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet, identificheremo il duale X^* con X. Denotiamo $\mathcal{L}(X, Y)$ (X, Y spazi di Hilbert) lo spazio degli operatori lineari continui da X in Y, $\mathcal{K}(X, Y)$ il sottospazio (chiuso) formato dagli operatori compatti. Poniamo inoltre $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$.

Per ogni $U \subseteq X$ denotiamo $\mathrm{int}(U)$ l'interno di U, $\overline{U}$ la chiusura, ∂U la frontiera (adottiamo tacitamente la topologia forte). In particolare, per ogni $x \in X$, $\rho > 0$ poniamo

$$B_\rho(x) = \big\{y \in X : \|x - y\| < \rho\big\},\ \overline{B}_\rho(x) = \big\{y \in X : \|x - y\| \leqslant \rho\big\},$$
$$\partial B_\rho(x) = \big\{y \in X : \|x - y\| = \rho\big\}.$$

Per ogni $\Phi : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\Phi^c = \big\{x \in X : \Phi(x) \leqslant c\big\},\ \Phi_c = \big\{x \in X : \Phi(x) \geqslant c\big\},$$

e per $a \leqslant b$

$$\Phi_a^b = \big\{x \in X : a \leqslant \Phi(x) \leqslant b\big\}.$$

Per ogni $U \subset X$, $x \in X$ poniamo

$$\mathrm{dist}(x, U) = \inf_{y \in U} \|x - y\|,$$
$$\mathrm{diam}(U) = \sup_{x,y \in U} \|x - y\|.$$

Indichiamo con $\to$ la convergenza forte in X, con $\rightharpoonup$ la convergenza debole.

Detti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, $p \geqslant 1$, denotiamo la norma di $L^p(\Omega)$

$$\|u\|_p = \Big[\int_\Omega |u|^p\, dx\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

La norma di $L^\infty(\Omega)$ è invece

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{esssup}_\Omega |u|.$$

La misura adottata in Ω sarà sempre la misura di Lebesgue N-dimensionale. Se $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni misurabili, $u \leqslant v$ in Ω significa $u(x) \leqslant v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ (e simili).

Nelle dimostrazioni, $C > 0$ denoterà spesso diverse costanti (quando non sia necessario distinguerle).

1. Introduzione: equazioni, funzionali e operatori

Most results for nonlinear problems are still obtained via linear ones, i.e. despite the fact that the problems are nonlinear, not because of it.
L. Nirenberg

Le equazioni alle derivate parziali (nel seguito EDP) non lineari, di solito, sono prive di una formula risolutiva esplicita. Inoltre, diversamente dal caso lineare, una EDP non lineare può ammettere una, diverse, infinite o anche nessuna soluzione, non legate fra loro da alcuna relazione elementare. D'altra parte, tali EDP hanno grande importanza nelle applicazioni fisiche, biologiche, economiche etc. in quanto i modelli che descrivono i fenomeni naturali e sociali sono generalmente di tipo non lineare.

Il problema della risoluzione esplicita di una EDP non lineare viene spesso affrontato per via indiretta, ricorrendo a linearizzazioni o approssimazioni numeriche che forniscono soluzioni non esatte: al crescere del grado di approssimazione, la soluzione approssimata 'dovrebbe' tendere a quella esatta, a patto che essa *esista* e *sia unica*. Per questo è importante conoscere *a priori* alcune informazioni sulle soluzioni di una EDP non lineare, quali: numero, segno, regolarità, stime.

L'analisi non lineare è lo studio di queste proprietà (con la possibile eccezione dei problemi avanzati di regolarità) attraverso strumenti tratti dall'analisi funzionale e dalla topologia, e procede dal lavoro di numerosi autori fra cui A. Ambrosetti, H. Brezis, P.L. Lions, J. Mawhin, D. Motreanu, L. Nirenberg, R. Palais, N.S. Papageorgiou, P. Pucci, P.H. Rabinowitz, J. Serrin, S. Smale, M. Willem (e molti altri). La maggior parte dei problemi trattati da questa disciplina può essere rappresentata come segue:

$$L(u) = N(u). \tag{1.1}$$

L'interpretazione dell'equazione (1.1) è la seguente: X è uno spazio funzionale, i cui elementi sono cioè funzioni definite in un dominio Ω, avente la struttura di spazio di Banach; X^* è il duale di X; $L : X \to X^*$ è un operatore differenziale ellittico (non necessariamente lineare); $N : X \to X^*$ è una mappa di sovrapposizione non lineare (operatore di Nemytskii). Dunque (1.1) è un'eguaglianza in X^*, i cui elementi sono 'anche' funzioni definite su Ω.

Un esempio tipico di problema della classe (1.1) è il seguente problema di Dirichlet per un'EDP ellittica non lineare:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$ è un dominio (aperto connesso) di frontiera $\Gamma = \partial\Omega$, Δ denota l'operatore laplaciano, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione non lineare rispetto alla seconda variabile (per i dettagli ved. Sezione 4).

Per studiare problemi quali l'esistenza, la molteplicità (o al contrario l'unicità), e le proprietà delle soluzioni di (1.1), l'analisi non lineare dispone di due possibili strategie:

- (a) Nei *metodi variazionali* si definisce un funzionale $\Phi : X \to \mathbb{R}$, derivabile (in un senso opportuno), t.c. $\Phi'(u) = L(u) - N(u)$, quindi si studia la geometria di Φ (massimi, minimi, punti di sella, comportamento asintotico) per determinarne i punti critici, che coincidono con le soluzioni di (1.1).
- (b) Nei *metodi topologici* si studia l'operatore $A = L - N : X \to X^*$, determinando i suoi invarianti topologici (estensioni del grado di Brouwer) per contare gli zeri di A, ovvero le soluzioni di (1.1).

Ovviamente, i due metodi (a) e (b) possono essere combinati tenendo conto dell'identità

$$\Phi' = A.$$

In queste note esporremo una versione semplificata della teoria: infatti, supporremo che L sia lineare, che X sia uno spazio di Hilbert (da cui $X^* = X$), e che N sia derivabile, abbreviando così le dimostrazioni di diversi risultati. Precisamente, nella Sezione 2 forniremo le nozioni basilari di teoria dei punti critici; nella Sezione 3 esporremo la teoria del grado; nella Sezione 4 introdurremo alcuni risultati tecnici sul problema di Dirichlet; e nelle Sezioni 5, 6 applicheremo a questo problema i risultati astratti visti in precedenza, seguendo i metodi variazionali (a) e topologici (b).

Per una trattazione esauriente della materia, rimandiamo alle monografie [1, 4, 6, 9, 16, 17]. In questa esposizione daremo per scontate le conoscenze elementari sull'analisi funzionale e le EDP lineari esposte in [11–14] (ved. anche [3]).

2. Teoria dei punti critici

Taking Tiger Mountain (by strategy).
B. Eno

Lo studio dei punti critici di un funzionale Φ, definito su uno spazio di Hilbert astratto (di dimensione infinita) corrisponde al familiare esercizio dello 'studio di funzione' dei corsi di analisi elementare – con la differenza che in questo caso il 'paesaggio' disegnato dal grafico di Φ non è rappresentabile graficamente. Pertanto, ci si riduce all'esame delle soluzioni della seguente *equazione di Eulero-Lagrange*:

$$\Phi'(x) = 0. \tag{2.1}$$

Inauguriamo questa sezione introducendo le nozioni basilari del *calcolo differenziale* per funzionali $\Phi : X \to \mathbb{R}$, definiti in uno spazio di Hilbert X (in particolare, $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach riflessivo):

Definizione 2.1. *Siano $\Phi : X \to \mathbb{R}$, $x \in X$: Φ è derivabile (secondo Fréchet) in x se esiste $h \in X$ t.c.*

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \langle h, y\rangle}{\|y\|} = 0.$$

Il vettore h è detto gradiente e denotato $\Phi'(x)$. Se $U \subseteq X$ e Φ è derivabile in ogni punto di U, diremo che Φ è derivabile in U. Se $\Phi' \in C(U, X)$, allora $\Phi \in C^1(U)$.

Chiaramente il vettore $\Phi'(x)$, se esiste, è unico. Se Φ è derivabile in x, in particolare per ogni $y \in X$ è definita la derivata direzionale (di Gâteaux)

$$\langle \Phi'(x), y\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(x+ty) - \Phi(x)}{t}.$$

Inoltre:

Lemma 2.2. *Sia Φ derivabile in x. Allora Φ è continuo in U.*

Dimostrazione. Dalla Definizione 2.1 abbiamo per ogni $y \neq 0$

$$\Phi(x+y) - \Phi(x) = \frac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \langle \Phi'(x), y\rangle}{\|y\|} \|y\| + \langle \Phi'(x), y\rangle,$$

e questo tende a 0 per $\|y\| \to 0$. Dunque Φ è continuo in x. □

I seguenti esempi sono relativi a casi comuni:

Esempio 2.3. Poniamo per ogni $x \in X$

$$\Phi(x) = \frac{\|x\|^2}{2}.$$

Allora $\Phi \in C^1(X)$ con $\Phi'(x) = x$. Infatti si ha per ogni $y \neq 0$

$$\frac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \langle x, y\rangle}{\|y\|} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle}{2\|y\|} = \frac{\|y\|}{2},$$

e questo tende a 0 per $\|y\| \to 0$. Per esempio, in $L^2(\Omega)$ il funzionale

$$u \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega u^2\, dx$$

ha in u derivata data da

$$v \mapsto \int_\Omega uv\, dx.$$

Esempio 2.4. (Funzionale lineare) Fissiamo $h \in X$ e poniamo per ogni $x \in X$
$$\Phi(x) = \langle h, x\rangle.$$
Si vede facilmente che $\Phi \in C^1(X)$ con $\Phi'(x) = h$ (costante).

Ai funzionali derivabili si estendono molti risultati classici del calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$, per esempio: la somma di funzionali derivabili è derivabile, la composizione di un funzionale derivabile con una funzione differenziabile è derivabile, etc. Inoltre:

Proposizione 2.5. *Siano $\Phi : X \to \mathbb{R}$ derivabile, $x, y \in X$. Allora esiste $\tau \in [0, 1]$ t.c.*
$$\Phi(x + y) - \Phi(x) = \langle \Phi'(x + \tau y), y\rangle.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $\tau \mapsto \Phi(x + \tau y)$. □

Introduciamo la nozione principale di questa sezione:

Definizione 2.6. *Siano $U \subseteq X$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ derivabile in U. Un punto $x \in U$ è un punto critico di Φ se $\Phi'(x) = 0$, in tal caso $c = \Phi(x)$ è un valore critico.. Denotiamo*
$$K(\Phi) = \big\{x \in U : \Phi'(x) = 0\big\},$$
$$K_c(\Phi) = \big\{x \in U : \Phi'(x) = 0,\ \Phi(x) = c\big\}.$$
Inoltre, se $a \leqslant b$ poniamo
$$K_a^b(\Phi) = \big\{x \in K(\Phi) : a \leqslant \Phi(x) \leqslant b\big\}$$

Equivalentemente, i punti critici di Φ sono le soluzioni dell'*equazione di Eulero-Lagrange* (2.1). In particolare, i punti di estremo locale sono critici:

Proposizione 2.7. *Siano $\Phi : X \to \mathbb{R}$ derivabile, $x \in X$ un punto di estremo locale per Φ. Allora $\Phi'(x) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che Φ abbia un minimo locale in x, ovvero che esista $\rho > 0$ t.c. $\Phi(x + y) \geqslant \Phi(x)$ per ogni $y \in \overline{B}_\rho(0)$, da cui
$$\frac{\Phi(x + y) - \Phi(x)}{\|y\|} \geqslant 0.$$
Dalla Definizione 2.1 segue allora
$$\langle \Phi'(x), y\rangle \geqslant 0.$$
Sostituendo y con $-y$ si ha $\Phi'(x) = 0$. Il caso del massimo locale si tratta analogamente. □

La Definizione 2.1 si estende, con qualche cautela, al caso di un operatore $A : X \to Y$ (X, Y spazi di Hilbert): A è derivabile (secondo Fréchet) in $x \in X$ se esiste un operatore $H \in \mathcal{L}(X, Y)$ t.c.
$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|A(x + y) - A(x) - \langle H(x), y\rangle\|}{\|y\|} = 0.$$
L'operatore H (unico) prende il nome di *gradiente* di A ed è denotato $A'(x)$. In questo modo possiamo definire le derivate di ordine superiore per un funzionale:

Definizione 2.8. *Siano $\Phi \in C^1(U)$, $x \in U$ t.c. $\Phi' : X \to X$ è derivabile in x. Allora diremo che Φ è derivabile due volte in x con derivata seconda $\Phi''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X))$ definita da*
$$\Phi''(x) = (\Phi')'(x).$$
Se Φ è derivabile due volte in ogni punto di U, diremo che Φ è derivabile due volte in U. Se $\Phi'' \in C(U, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X)))$, allora $\Phi \in C^2(U)$.

La rappresentazione della derivata seconda introdotta nella Definizione 2.8 non è unica. È anche possibile definire $\Phi''(x) : X \times X \to \mathbb{R}$ come una forma bilineare ponendo per ogni $y, z \in X$

$$\Phi''(x)(y,z) = \langle \Phi''(x)(y), z \rangle$$

(ved. [11]). In generale $\Phi''(x)$ è una forma bilineare continua e simmetrica, ma non coerciva.

Esercizio 2.9. Estendere i risultati di questa sezione agli spazi di Banach riflessivi.

Esercizio 2.10. Sia $\Phi : X \to \mathbb{R}$ derivabile secondo Gâteaux, con $\Phi' : X \to X$ continuo. Dimostrare che Φ è derivabile secondo Fréchet.

Esercizio 2.11. Sia (a_n) una successione limitata, e sia per ogni $(x_n) \in \ell^2$

$$\Phi(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^2.$$

Calcolare, se esiste, la derivata di Φ.

Esercizio 2.12. Sia $\Phi \in C^2(X)$ convesso. Dimostrare che $\Phi''(x)$ è semi-definita positiva per ogni $x \in X$.

2.1. **Metodi diretti del calcolo delle variazioni.** La risoluzione di un problema differenziale mediante ricerca dei minimi di un funzionale rientra nei cosiddetti metodi diretti del calcolo delle variazioni (ne abbiamo visto alcuni esempi in [11, 13], per una trattazione approfondita rimandiamo a [5]). Il problema dell'esistenza di una soluzione per EDP ellittiche lineari si risolve spesso in questo modo, ma come vedremo anche diversi problemi non lineari si prestano a questo studio. In virtù della Proposizione 2.7, si tratta di un caso particolare della teoria dei punti critici.

Richiamiamo il più semplice teorema di minimo, per un funzionale coercivo e sequenzialmente debolmente semi-continuo debolmente:

Teorema 2.13. *Sia $\Phi : X \to \mathbb{R}$ c t.c.*

(i) $\lim_{\|x\| \to \infty} \Phi(x) = \infty$;

(ii) *per ogni successione (x_n) t.c. $x_n \rightharpoonup x$ si ha* $\liminf_n \Phi(x_n) \geqslant \Phi(x)$.

Allora esiste $\bar{x} \in X$ t.c.

$$\Phi(\bar{x}) = \inf_{x \in X} \Phi(x).$$

Dimostrazione. Poniamo

$$m = \inf_{x \in X} \Phi(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Esiste una successione (x_n) in X t.c. $\Phi(x_n) \to m$. Fissato $c > m$, per (i) esiste $\rho > 0$ t.c. $\Phi(x) > c$ per ogni $x \in X$, $\|x\| > \rho$, mentre per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande $\Phi(x_n) < c$. Dunque (x_n) è limitata.

Per [3, Theorem 3.18], passando se necessario a una sotto-successione si ha $x_n \rightharpoonup \bar{x}$. Per (ii) si ha

$$\Phi(\bar{x}) \leqslant \liminf_n \Phi(x_n) = m,$$

ovvero $\Phi(\bar{x}) = m$ (in particolare, $m \in \mathbb{R}$). □

Osservazione 2.14. La condizione (ii) richiede una semi-continuità di tipo *sequenziale*. Se $\dim(X) = \infty$, tale proprietà è più debole della semi-continuità inferiore, perché in generale la topologia debole di X non è metrizzabile (ved. [3, p. 60]). Nelle applicazioni alle EDP non lineari, in effetti, il funzionale dell'energia spesso è solo sequenzialmente debolmente semi-continuo inferiormente, mentre nel caso delle EDP lineari esso è globalmente debolmente semi-continuo inferiormente (essendo convesso, ved. [13]).

Quando non è possibile determinare direttamente un punto di minimo, si ricorre alla ricerca di punti di *quasi-minimo*, sfruttando il seguente risultato astratto:

Teorema 2.15. (principio variazionale di Ekeland) *Siano* (X, d) *uno spazio metrico completo,* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *semi-continuo inferiormente,* $x_0 \in X$*,* $\varepsilon, \delta > 0$ *t.c.*

$$\Phi(x_0) < \inf_{x \in X} \Phi(x) + \varepsilon.$$

Allora esiste $\bar{x} \in X$ *con le seguenti proprietà:*

(*i*) $\Phi(\bar{x}) \leqslant \Phi(x_0)$;
(*ii*) $d(\bar{x}, x_0) \leqslant \delta$;
(*iii*) *per ogni* $x \in X \setminus \{\bar{x}\}$ *si ha*

$$\Phi(\bar{x}) < \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, \bar{x}).$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che Φ è inferiormente limitato. Introduciamo su X un ordinamento parziale così definito

$$x \preceq y \iff \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, y) \leqslant \Phi(y).$$

Questa relazione è riflessiva, in quanto

$$\Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, x) = \Phi(x).$$

È antisimmetrica, in quanto da $x \preceq y$, $y \preceq x$ segue

$$\Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, y) \leqslant \Phi(y) \leqslant \Phi(x) - \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, y),$$

da cui $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$. È transitiva, in quanto da $x \preceq y$, $y \preceq z$ segue

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, z) &\leqslant \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta}\big(d(x, y) + d(y, z)\big) \\ &\leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(y, z) \leqslant \Phi(z), \end{aligned}$$

ovvero $x \preceq z$. Definiamo ora una successione non-crescente (x_n) in X, soddisfacente per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi(x_{n+1}) \leqslant \inf_{x \preceq x_n} \Phi(x) + \frac{1}{n+1}. \tag{2.2}$$

Procediamo ricorsivamente. Sia

$$L_0 = \big\{x \in L_0 : \, x \preceq x_0\big\}.$$

Il funzionale Φ è inferiormente limitato in L_0, quindi esiste $x_1 \in L_0$ t.c.

$$\Phi(x_1) \leqslant \inf_{x \in L_0} \Phi(x) + 1.$$

Definiamo poi

$$L_1 = \big\{x \in X : \, x \preceq x_1\big\},$$

e troviamo $x_2 \in L_1$ t.c.

$$\Phi(x_2) \leqslant \inf_{x \in L_1} \Phi(x) + \frac{1}{2},$$

e così via. Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $L_{n+1} \subseteq L_n$ e l'insieme L_n è chiuso (questo segue dalla semi-continuità inferiore di Φ). Inoltre si ha

$$\lim_n \operatorname{diam}(L_n) = 0. \tag{2.3}$$

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in L_{n+1}$ abbiamo $x \preceq x_{n+1} \preceq x_n$, da cui (usando anche (2.2))

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\delta} d(x_{n+1}, x) &\leqslant \Phi(x_{n+1}) - \Phi(x) \\ &\leqslant \inf_{y \in L_n} \Phi(y) + \frac{1}{n+1} - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

da cui

$$\operatorname{diam}(L_{n+1}) = \sup_{x,y \in L_{n+1}} d(x,y) \leqslant \frac{2\delta}{\varepsilon(n+1)},$$

che a sua volta implica (2.3). Poiché X è completo, per il Teorema di intersezione di Cantor (ved. [10, p. 595]) esiste $\bar{x} \in X$ t.c.

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} L_n = \{\bar{x}\}. \tag{2.4}$$

In particolare abbiamo $\bar{x} \in L_0$, cioè $x \preceq x_0$, da cui

$$\Phi(\bar{x}) \leqslant \Phi(x_0) - \frac{\varepsilon}{\delta} d(\bar{x}, x_0) \leqslant \Phi(x_0),$$

il che prova (i). Inoltre

$$\begin{aligned}d(\bar{x}, x_0) &\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\big[\Phi(x_0) - \Phi(\bar{x})\big] \\ &\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\Big[\inf_{x \in X} \Phi(x) + \varepsilon - \Phi(\bar{x})\Big] \leqslant \delta,\end{aligned}$$

da cui (ii). Infine, $\bar{x}$ è un elemento minimale di $(X, \preceq)$. Infatti, per ogni $x \in X$ t.c. $x \preceq \bar{x}$ si ha $x \preceq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui per (2.4) segue $x = \bar{x}$. Pertanto, per ogni $x \in X \setminus \{\bar{x}\}$ si ha $x \npreceq \bar{x}$ ovvero

$$\Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, \bar{x}) > \Phi(\bar{x}),$$

da cui (iii). □

Osservazione 2.16. Il Teorema 2.15 assicura l'esistenza di un punto di minimo globale per una *perturbazione* di Φ, vicino al punto x_0. I due parametri $\varepsilon, \delta > 0$ hanno ruoli complementari: se ε è piccolo e δ grande abbiamo una buona approssimazione di Φ ma una localizzazione di $\bar{x}$ poco precisa, mentre se ε è grande e δ piccolo la situazione si inverte.

Applicando il Teorema 2.15 a un funzionale derivabile su uno spazio di Hilbert, otteniamo punti *quasi-critici*:

Corollario 2.17. *Siano $\Phi \in C^1(X)$ inferiormente limitato, $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{x} \in X$ t.c.*

- (i) $\Phi(\bar{x}) \leqslant \inf_{x \in X} \Phi(x) + \varepsilon$;
- (ii) $\|\Phi'(x)\| \leqslant \varepsilon$.

Dimostrazione. Lo spazio X, con la metrica indotta dalla norma, è completo. Sia $x_0 \in X$ t.c.

$$\Phi(x_0) \leqslant \inf_{x \in X} \Phi(x) + \varepsilon.$$

Applichiamo il Teorema 2.15 con $\delta = 1$, trovando $\bar{x} \in \overline{B}_1(x_0)$ t.c. $\Phi(\bar{x}) \leqslant \Phi(x_0)$, da cui (i), e per ogni $x \in X$

$$\Phi(\bar{x}) \leqslant \Phi(x) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|.$$

Fissato $y \in X$, si ha

$$\begin{aligned}\langle \Phi'(\bar{x}), y \rangle &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(\bar{x}+ty) - \Phi(\bar{x})}{t} \\ &\geqslant \lim_{t \to 0^+} \frac{-\varepsilon \|ty\|}{t} = -\varepsilon \|y\|,\end{aligned}$$

e analogamente

$$\langle \Phi'(\bar{x}), y \rangle = -\langle \Phi'(\bar{x}), -y \rangle \leqslant \varepsilon \|y\|,$$

da cui (ii). □

Applicando il Corollario 2.17 con $\varepsilon = 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, si dimostra l'esistenza di una successione (x_n) in X t.c.

$$\Phi(x_n) \to \inf_{x \in X} \Phi(x), \ \|\Phi'(x_n)\| \to 0.$$

Tuttavia, in generale, (x_n) non è convergente. Per questo si introducono condizioni di *compattezza* che consentano il passaggio al limite:

Definizione 2.18. (condizione di Palais-Smale) *Sia* $\Phi \in C^1(X)$*:*

(i) *per ogni* $c \in \mathbb{R}$*, diciamo che* Φ *soddisfa* $(PS)_c$ *se ogni successione* (x_n) *in* X *t.c.* $\Phi(x_n) \to c$, $\Phi'(x_n) \to 0$ *ha una sotto-successione convergente;*

(ii) *diciamo che* Φ *soddisfa* (PS) *se soddisfa* $(PS)_c$ *per ogni* $c \in \mathbb{R}$*.*

La condizione (ii) si riformula come segue: *ogni successione* (x_n) *t.c.* $(\Phi(x_n))$ *è limitata e* $\Phi'(x_n) \to 0$ *ha una sotto-successione convergente.* Dal Corollario 2.17 ricaviamo immediatamente il seguente:

Corollario 2.19. *Siano* $\Phi \in C^1(X)$ *inferiormente limitato, soddisfacente* (PS)*. Allora esiste* $\bar{x} \in K(\Phi)$*.*

Esercizio 2.20. Siano $X = \mathbb{R}$, $\Phi(x) = e^x$. È soddisfatta (PS)?

Esercizio 2.21. La *condizione di Cerami* è una versione più generale della condizione di Palais-Smale: *ogni successione* (x_n) *t.c.* $(\Phi(x_n))$ *è limitata e* $(1 + \|x_n\|)\|\Phi'(x_n)\| \to 0$ *ha una sotto-successione convergente.* Quali risultati di questa sotto-sezione valgono anche sotto questa ipotesi?

Esercizio 2.22. Sia $\Phi \in C^1(X)$ coercivo, inferiormente limitato: dimostrare che Φ soddisfa (PS). È vero l'inverso?

Esercizio 2.23. Dimostrare il Corollario 2.19.

2.2. **Metodi di min-max.** Oltre ai punti di minimo (locale o globale), un funzionale $\Phi \in C^1(X)$ può avere anche punti critici di diversa natura. Trascurando i punti di massimo (che sono punti di minimo di $-\Phi$), ci concentriamo qui sull'analisi dei livelli critici individuati da formule di *min-max*, ovvero

$$c = \inf_{G \in \Gamma} \sup_{x \in G} \Phi(x), \tag{2.5}$$

dove Γ è una famiglia di sottoinsiemi di X caratterizzati da un'opportuna proprietà topologica (per approfondimenti rimandiamo a [19–21]). L'attenzione è quindi puntata sul *livello* $c \in \mathbb{R}$, e sui modi in cui esso influenza la 'forma' dei sottolivelli $\Phi^{c \pm \varepsilon}$ (per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo). Per semplicità, svolgeremo la teoria per funzionali di classe C^2 definiti su uno spazio di Hilbert.

Cominciamo con un importante risultato tecnico:

Lemma 2.24. (di deformazione/1) *Siano* $\Phi \in C^2(X)$*,* $c \in \mathbb{R}$ *t.c.* $K_c(\Phi) = \emptyset$ *e* Φ *soddisfa* $(PS)_c$*. Allora, per ogni* $\varepsilon > 0$ *abbastanza piccolo esistono* $\delta \in (0, \varepsilon]$ *e una funzione* $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ *t.c.*

(*i*) $\eta(0,x) = x$ *per ogni* $x \in X$*;*
(*ii*) $\eta(t,x) = x$ *per ogni* $(t,x) \in [0,1] \times X$*,* $|\Phi(x) - c| \geqslant \varepsilon$*;*
(*iii*) $\Phi(\eta(1,x)) \leqslant c - \delta$ *per ogni* $x \in \Phi^{c+\delta}$*.*

Dimostrazione. Per ipotesi, c è un *valore regolare* (non critico) di Φ. Per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo esiste $\sigma \in (0,1)$ t.c. per ogni $x \in X$ vale la seguente implicazione:

$$|\Phi(x) - c| \leqslant \varepsilon \ \Rightarrow \ \|\Phi'(x)\| \geqslant \sigma. \tag{2.6}$$

Altrimenti, esiste una successione (x_n) t.c. $\Phi(x_n) \to c$, $\|\Phi'(x_n)\| \to 0$. Per $(PS)_c$, passando a una sotto-successione si ha $x_n \to x$, da cui per continuità

$$\Phi(x) = c, \ \Phi'(x) = 0,$$

assurdo.
Fissiamo $\varepsilon, \sigma > 0$ verificanti (2.6) e $\delta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$0 < \delta < \min\Big\{\varepsilon, \frac{\sigma^2}{2}\Big\}.$$

Quindi definiamo

$$C_0 = \big\{x \in X : |\Phi(x) - c| \geqslant \varepsilon\big\}, \ C_1 = \big\{x \in X : |\Phi(x) - c| \leqslant \delta\big\},$$

sottoinsiemi chiusi di X t.c. $C_0 \cap C_1 = \emptyset$. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$g(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, C_0)}{\mathrm{dist}(x, C_0) + \mathrm{dist}(x, C_1)}.$$

Chiaramente $g : X \to \mathbb{R}$ è localmente lipschitziana e verifica $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ per ogni $x \in X$, oltre a

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C_0 \\ 1 & \text{se } x \in C_1. \end{cases}$$

Poniamo inoltre per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{t} & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Anche $h : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ è localmente lipschitziana. Infine poniamo per ogni $x \in X$

$$f(x) = \begin{cases} -g(x)h(\|\Phi'(x)\|)\Phi'(x) & \text{se } x \notin K(\Phi) \\ 0 & \text{se } x \in K(\Phi). \end{cases}$$

Per composizione, anche $f : X \to X$ è localmente lipschitziana (osserviamo che $\Phi' \in C^1(X,X)$ è una mappa localmente lipschitziana). Fissiamo ora $x \in X$ e consideriamo ora il seguente problema di Cauchy in X:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dy} = f(u) & \text{in } [0,1] \\ u(0) = x \end{cases} \tag{2.7}$$

(dello stesso tipo di quelli visti in [14]). Per il Teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard (ved. [3, Theorem 7.3]), esiste un'unica soluzione $u \in C^1([0,1], X)$ del problema (2.7), che dipende con continuità dal dato iniziale x. Poniamo dunque per ogni $t \in [0,1]$

$$\eta(t,x) = u(t).$$

Abbiamo così definito una funzione continua $\eta : [0,1] \times X \to X$. Ovviamente, per ogni $x \in X$, da (2.7) si ha $\eta(0,x) = x$ (*i*).

Inoltre, se $x \in C_0$ abbiamo $f(x) = 0$, da cui (per unicità della soluzione di (2.7)) segue $\eta(t,x) = x$ per ogni $t \in [0,1]$ *(ii)*.

Proviamo ora *(iii)*. Per ogni $(t,x) \in [0,1] \times X$, da (2.7) abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(\eta(t,x)) &= \langle \Phi'(\eta(t,x)), f(\eta(t,x))\rangle \\ &= -g(\eta(t,x))h(\|\Phi'(\eta(t,x))\|)\|\Phi'(\eta(t,x))\|^2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

Dunque, per ogni $x \in X$ la funzione $t \mapsto \Phi(\eta(t,x))$ è non-crescente in $[0,1]$. Fissiamo ora $x \in X$ t.c. $\Phi(x) \leqslant c + \delta$, e distinguiamo due casi:

(*a*) Se $\Phi(x) \leqslant c - \delta$, allora per la monotonia di $t \mapsto \Phi(\eta(t,x))$ e *(ii)* abbiamo

$$\Phi(\eta(1,x)) \leqslant \Phi(x) \leqslant c - \delta,$$

ovvero vale *(iii)*.

(*b*) Se $\Phi(x) > c - \delta$, allora procediamo per assurdo: assumiamo $\Phi(\eta(1,x)) > c - \delta$. Per la monotonia provata sopra abbiamo per ogni $t \in [0,1]$

$$\Phi(\eta(t,x)) > c - \delta,$$

da cui ricaviamo $\eta(t,x) \in C_1$. Per definizione di g ne segue $g(\eta(t,x)) = 1$, inoltre per (2.6) (ricordando che $\delta < \varepsilon$) abbiamo $\|\Phi'(\eta(t,x))\| \geqslant \sigma$. Collegando queste relazioni alle precedenti otteniamo

$$\frac{d}{dt}\Phi(\eta(t,x)) \leqslant -h(\|\Phi'(\eta(t,x))\|)\|\Phi'(\eta(t,x))\|^2,$$

che per la definizione di h implica

$$\frac{d}{dt}\Phi(\eta(t,x)) \leqslant \begin{cases} -\|\Phi'(\eta(t,x))\|^2 \leqslant -\sigma^2 & \text{se } \|\Phi'(\eta(t,x))\| \leqslant 1 \\ -\|\Phi'(\eta(t,x))\| \leqslant -\sigma < -\sigma^2 & \text{se } \|\Phi'(\eta(t,x))\| > 1. \end{cases}$$

Integrando in $[0,1]$ e ricordando le ipotesi su δ, ricaviamo

$$\begin{aligned}\Phi(\eta(1,x)) &= \Phi(x) + \int_0^1 \frac{d}{dt}\Phi(\eta(t,x))\,dt \\ &\leqslant (c+\delta) - \sigma^2 < c - \delta,\end{aligned}$$

assurdo. Ciò prova *(iii)*.

La dimostrazione è ora conclusa. □

Il Lemma 2.24 è uno degli strumenti fondamentali nella teoria del min-max (l'altro è la condizione di Palais-Smale, ved. Definizione 2.18): esso stabilisce che, in prossimità di un valore regolare di Φ, i sottolivelli sono legati da deformazioni continue lungo le quali Φ è monotono. Usando questi due strumenti, si dimostra che sotto opportune ipotesi di carattere geometrico il funzionale Φ ammette un valore critico definito da (2.5). Nei teoremi seguenti applichiamo tale metodo a diverse situazioni che differiscono sostanzialmente per la 'geometria', ovvero la scelta della famiglia di insiemi Γ da utilizzare.

Il primo risultato è dovuto ad Ambrosetti-Rabinowitz. In esso la famiglia Γ è formata dai cammini continui congiungenti due punti:

Teorema 2.25. (del passo di montagna) *Siano $\Phi \in C^2(X)$ verificante (PS), $x_0, x_1 \in X$, $0 < \rho < \|x_1 - x_0\|$ t.c.*

$$\inf_{\|x-x_0\|=\rho} \Phi(x) = a > \max\{\Phi(x_0),\, \Phi(x_1)\}.$$

Siano inoltre

$$\Gamma = \big\{\gamma \in C([0,1],X) :\, \gamma(0) = x_0,\, \gamma(1) = x_1\big\},$$

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)).$$

Allora si ha $c \geqslant a$ *e* $K_c(\Phi) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\Phi(x_0) \geqslant \Phi(x_1)$. Osserviamo che per ogni $\gamma \in \Gamma$ esiste $\bar{t} \in [0,1]$ t.c.

$$\|\gamma(\bar{t}) - x_0\| = \rho.$$

Ne segue

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geqslant \Phi(\gamma(\bar{t})) \geqslant a.$$

Passando all'estremo inferiore rispetto a $\gamma \in \Gamma$, si ha $c \geqslant a$.
Proviamo ora che c è un livello critico di Φ, procedendo per assurdo: sia $K_c(\Phi) = \emptyset$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo t.c.

$$0 < \varepsilon < a - \Phi(x_0).$$

Esistono allora $\delta \in (0, \varepsilon]$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ come nel Lemma 2.24. Fissiamo inoltre $\gamma \in \Gamma$ t.c.

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)) \leqslant c + \delta,$$

quindi poniamo per ogni $t \in [0,1]$

$$\tilde{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t)).$$

Chiaramente $\tilde{\gamma} \in C([0,1], X)$, inoltre per la scelta di ε abbiamo

$$|\Phi(x_i) - c| \geqslant \varepsilon \ (i = 0, 1),$$

da cui per il Lemma 2.24 *(ii)* segue

$$\tilde{\gamma}(i) = \eta(1, x_i) = x_i.$$

Pertanto $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Inoltre, per la scelta di γ, abbiamo per ogni $t \in [0,1]$ $\Phi(\gamma(t)) \leqslant c + \delta$, da cui per il Lemma 2.24 *(iii)*

$$\Phi(\tilde{\gamma}(t)) \leqslant c - \delta.$$

Ne segue

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi(\tilde{\gamma}(t)) < c,$$

assurdo. Dunque $K_c(\Phi) \neq \emptyset$. □

Un tipico caso di applicazione del Teorema 2.25 è il seguente: siano $x_0 \in X$ un punto di minimo locale *proprio* di Φ, $x_1 \in X$ t.c. $\Phi(x_1) \leqslant \Phi(x_0)$, allora (usando (PS)) si trova $\rho \in (0, \|x_1 - x_0\|)$ verificante l'ipotesi (ovvero la *geometria del passo di montagna*) e pertanto un ulteriore punto critico $\bar{x} \neq x_0$.
Il seguente, dovuto a Pucci-Serrin, è un caso particolare di grande utilità nelle applicazioni: esso rappresenta il più semplice risultato di *molteplicità* nella teoria dei punti critici.

Teorema 2.26. (dei tre punti critici) *Siano* $\Phi \in C^2(X)$ *verificante* (PS), $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$ *punti di minimo locale di* Φ. *Allora esiste* $x_2 \in K(\Phi) \setminus \{x_0, x_1\}$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo $\Phi(x_1) \leqslant \Phi(x_0)$, quindi distinguiamo due casi:

(a) Se x_0 è un punto di minimo locale *proprio*, esiste $\rho \in (0, \|x_1 - x_0\|)$ t.c. $\Phi(x) > \Phi(x_0)$ per ogni $x \in \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$. Inoltre si ha

$$\inf_{\|x-x_0\|=\rho} \Phi(x) > \Phi(x_0). \tag{2.8}$$

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista una successione (y_n) t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|y_n - x_0\| = \rho, \ \Phi(y_n) \leqslant \Phi(x_0) + \frac{1}{n}.$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e applichiamo il Teorema 2.15 nello spazio metrico completo $\overline{B}_\rho(x_0)$ con $\varepsilon = 1/n$, $\delta = 1/\sqrt{n}$: esiste pertanto $z_n \in \overline{B}_\rho(x_0)$ t.c.

$$\Phi(z_n) \leqslant \Phi(y_n), \ \|z_n - y_n\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

e per ogni $x \in \overline{B}_\rho(x_0)$

$$\Phi(z_n) \leqslant \Phi(x) + \frac{\|x - z_n\|}{\sqrt{n}}.$$

Dalle relazioni precedenti segue che $\Phi(z_n) \to \Phi(x_0)$, $\|z_n - x_0\| \to \rho$, e (ragionando come nel Corollario 2.17) per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\|\Phi'(z_n)\| \leqslant 1/\sqrt{n}$, da cui $\Phi'(z_n) \to 0$. Per (PS), passando a una sotto-successione abbiamo $z_n \to \bar{z} \in \overline{B}_\rho(x_0)$. Più precisamente,

$$\|\bar{z} - x_0\| = \lim_n \|z_n - x_0\| = \rho,$$

e per continuità $\Phi(\bar{z}) = \Phi(x_0)$, assurdo. Dunque vale (2.8). A questo punto possiamo applicare il Teorema 2.25, definendo la quota $c > \Phi(x_0)$ e trovando un punto $x_2 \in K_c(\Phi)$. Per (2.8) abbiamo

$$\Phi(x_2) \geqslant \inf_{\|x-x_0\|=\rho} \Phi(x) > \Phi(x_0) \geqslant \Phi(x_1),$$

da cui $x_2 \neq x_0$, x_1.

(b) Se x_0 non è un punto di minimo locale proprio, allora esistono $\rho \in (0, \|x_1 - x_0\|)$, $x_2 \in B_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$ t.c. per ogni $x \in B_\rho(x)$

$$\Phi(x) \geqslant \Phi(x_2) = \Phi(x_0).$$

Pertanto $x_2 \neq x_0$, x_1 è anch'esso un punto di minimo locale di Φ, da cui per la Proposizione 2.7 segue $\Phi'(x_2) = 0$.

In ogni caso abbiamo un punto critico $\bar{x} \in K(\Phi) \setminus \{x_0, x_1\}$. □

Un altro importante teorema basato sul metodo di min-max è il seguente, dovuto a Rabinowitz (esso però richiede per la dimostrazione qualche nozione di *teoria del grado*, ved. Sezione 3):

Teorema 2.27. (del punto di sella) *Siano $\Phi \in C^2(X)$ verificante (PS), $Y \subset X$ un sottospazio t.c. $0 < \dim(Y) < \infty$, $U \subset Y$ un intorno limitato di 0 in Y, $a < b$ numeri reali, t.c.*

(i) *$\Phi(x) \leqslant a$ per ogni $x \in \partial U$;*
(ii) *$\Phi(x) \geqslant b$ per ogni $x \in Y^\perp$.*

Siano inoltre

$$\Gamma = \big\{\gamma \in C(\overline{U}, X) : \gamma(x) = x \text{ per ogni } x \in \partial U\big\},$$

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{x \in \overline{U}} \Phi(\gamma(x)).$$

Allora si ha $c \geqslant b$ e $K_c(\Phi) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Poiché X è uno spazio di Hilbert, abbiamo la decomposizione $X = Y \oplus Y^\perp$ e la proiezione ortogonale $\Pi \in C(X, Y)$ (ved. [11]). Fissato $\gamma \in \Gamma$, la mappa $\Pi \circ \gamma \in C(\overline{U}, Y)$ soddisfa per ogni $x \in \partial U$

$$\Pi(\gamma(x)) = x \neq 0.$$

Dunque, per le proprietà del grado di Brouwer (normalizzazione e dipendenza dalla frontiera, ved. Proposizione 3.3 *(i)* *(vii)*) abbiamo

$$\deg_B(\Pi \circ \gamma, U, 0) = \deg_B(\mathrm{id}, U, 0) = 1.$$

Per la proprietà di soluzione (Proposizione 3.3 *(v)*) esiste $x \in U$ t.c.

$$\Pi(\gamma(x)) = 0,$$

da cui per decomposizione $\gamma(x) \in Y^\perp$. Da *(ii)* segue allora

$$\Phi(\gamma(x)) \geqslant b.$$

Dunque, per ogni $\gamma \in \Gamma$ abbiamo

$$\max_{x \in \overline{U}} \Phi(\gamma(x)) \geqslant b.$$

Passando all'estremo inferiore su $\gamma \in \Gamma$, otteniamo $c \geqslant b$.
Proviamo ora che c è un livello critico di Φ, per assurdo: sia $K_c(\Phi) = \emptyset$. Scegliamo

$$0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}.$$

Siano $\delta \in (0, \varepsilon]$, $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ come nel Lemma 2.24. Fissiamo $\gamma \in \Gamma$ t.c.

$$\max_{x \in \overline{U}} \Phi(\gamma(x)) \leqslant c + \delta. \tag{2.9}$$

Per ogni $x \in \overline{U}$ poniamo

$$\tilde{\gamma}(x) = \eta(1, \gamma(x)).$$

Chiaramente $\tilde{\gamma} \in C(\overline{U}, X)$. Proviamo che $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Infatti, per ogni $x \in \partial U$ abbiamo $\gamma(x) = x$. Per *(i)*, la scelta di ε, e la relazione $c \geqslant b$, abbiamo

$$\Phi(x) \leqslant a < a + \varepsilon < b - \varepsilon \leqslant c - \varepsilon.$$

Dalle proprietà di η (Lemma 2.24 *(ii)*) segue

$$\tilde{\gamma}(x) = \eta(1, x) = x.$$

Concludiamo usando il Lemma 2.24 *(iii)* e (2.9), che implicano

$$\max_{x \in \overline{U}} \Phi(\tilde{\gamma}(x)) \leqslant c - \delta,$$

contro la definizione di c. Dunque $K_c(\Phi) \neq \emptyset$. □

Osservazione 2.28. Tutti i risultati di questa sotto-sezione si estendono al caso in cui X è uno spazio di Banach riflessivo, e $\Phi \in C^1(X)$ soddisfa (PS) (o un'analoga condizione di compattezza, ved. Esercizio 2.21). A tal fine occorre dimostrare che il gradiente $\Phi' \in C(X, X^*)$ si può 'approssimare' mediante una funzione $V \in C(X, X)$ localmente lipschitziana, detta *campo vettoriale pseudo-gradiente* (ved. [19, Appendix A]).

Osservazione 2.29. Non trattiamo, in questi appunti, l'interessante tema dei metodi variazionali per funzionali con *simmetrie*. Per esempio, supponiamo che $\Phi \in C^2(X)$ sia *pari*, ovvero per ogni $x \in X$ si abbia $\Phi(x) = \Phi(-x)$. Allora, $\Phi' \in C(X, X)$ è *dispari* ($\Phi'(x) = -\Phi'(-x)$), quindi i punti critici non banali (diversi da 0) di Φ si presentano a coppie $\{x, -x\}$. Nel caso di funzionali pari, si può dimostrare l'esistenza di *infiniti* punti critici (ved. [19, Theorem 9.12]). Più in generale, se Φ è invariante sotto l'azione di un gruppo di trasformazioni $\mathcal{G}$, può essere utile studiare la restrizione di Φ al sottospazio

$$X_{\mathcal{G}} = \big\{x \in X : g(x) = x \text{ per ogni } g \in \mathcal{G}\big\}.$$

Infatti, i punti critici di tale restrizione sono punti critici di Φ (principio della criticità simmetrica di Palais, ved. [16, Theorem 5.65]).

Esercizio 2.30. Sia $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione avente due punti di minimo locale proprio: dimostrare che Φ ha almeno un punto di massimo locale.

Esercizio 2.31. Il Lemma 2.24 è un caso particolare di [19, Theorem A.4], che fornisce ulteriori informazioni: dimostrare, per esempio, che per ogni $(t, x) \in [0, 1] \times X$ si ha $\Phi(\eta(t, x)) \leqslant \Phi(x)$.

Esercizio 2.32. Applicare il Teorema 2.25 alla funzione $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ definita da

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - x^3.$$

Esercizio 2.33. Il Teorema 2.27 trova applicazione nei casi in cui Φ è concavo in Y e convesso in $Y^\perp$ (da cui il nome): dimostrarlo.

2.3. **Teoria di Morse.** La teoria che esponiamo in questa sotto-sezione, sviluppata da M. Morse nel contesto della geometria differenziale e poi estesa da vari autori agli spazi di dimensione infinita, permette di classificare i punti critici di un funzionale mediante successioni di gruppi (*gruppi critici*). Gli ordini di tali gruppi, calcolati su tutti i punti critici di un funzionale, soddisfano certe relazioni algebriche (*identità di Morse*), che possono essere usate in una dimostrazione per assurdo per provare l'esistenza di ulteriori punti critici. Per una trattazione generale della teoria di Morse rimandiamo a [2, 4, 15, 18], mentre questa esposizione è basata su [16].

Preliminarmente ricordiamo alcune nozioni tratte dall'*algebra omologica*, adattate al nostro contesto. Sia X uno spazio di Hilbert, $\dim(X) = \infty$. Una *coppia topologica* in X è una coppia ordinata (A, B) t.c. $B \subseteq A \subseteq X$, una *mappa di coppie* $f : (A, B) \to (C, D)$ è una funzione $f \in C(A, C)$ t.c. $f(B) \subseteq D$, una *omotopia* tra due mappe $f, g : (A, B) \to (C, D)$ è una mappa $h : ([0, 1] \times A, [0, 1] \times B) \to (C, D)$ t.c. per ogni $x \in A$

$$h(0, x) = f(x), \;\; h(1, x) = g(x).$$

Due mappe f, g sono *omotopiche* se esiste un'omotopia tra f e g, in tal caso scriveremo $f \sim g$. Infine, due coppie (A, B), (C, D) sono *omotopicamente equivalenti* se esistono mappe $f : (A, B) \to (C, D)$, $g : (C, D) \to (A, B)$ t.c. $g \circ f \sim \mathrm{id}_{(A,B)}$, $f \circ g \sim \mathrm{id}_{(C,D)}$, in tal caso scriveremo $(A, B) \sim (C, D)$.

Nel caso in esame, attraverso una delicata costruzione (ved. [16, Theorem 6.40]) si delinea in X una *teoria dell'omotopia singolare*, ovvero si definiscono:

- (a) per ogni coppia (A, B) una successione di spazi vettoriali (reali) $H_k(A, B)$ $(k \in \mathbb{N})$;
- (b) per ogni mappa $f : (A, B) \to (C, D)$ una successione di omomorfismi $f_k : H_k(A, B) \to H_k(C, D)$ $(k \in \mathbb{N})$, che per semplicità denoteremo con f_*;
- (c) per ogni coppia (A, B) una successione di omomorfismi $\partial_k : H_k(A, B) \to H_{k-1}(B, \emptyset)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, che per semplicità denoteremo con ∂.

Chiameremo $H_k(A, B)$ *gruppo omologico* (additivo), trascurando in generale la sua struttura di spazio vettoriale. Le proprietà fondamentali della teoria dell'omologia sono le seguenti:

Proposizione 2.34. (assiomi di Eilenberg-Steenrod) *Valgono le seguenti proprietà (in cui il significato dei simboli è ovvio):*

- (i) *se* $f = \mathrm{id}_{(A,B)}$*, allora* $f_* = \mathrm{id}_{H_k(A,B)}$*;*
- (ii) *se* $f : (A, B) \to (C, D)$*,* $g : (C, D) \to (E, F)$*, allora* $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$*;*
- (iii) *se* $f : (A, B) \to (C, D)$*, allora* $\partial \circ f_* = (f|_B)_* \circ \partial$*;*

(*iv*) *se* $i : (B, \emptyset) \to (A, \emptyset)$, $j : (A, \emptyset) \to (A, B)$ *sono inclusioni, allora si ha la sequenza esatta*

$$\ldots \;\to\; H_k(B,\emptyset) \;\xrightarrow{i_*}\; H_k(A,\emptyset) \;\xrightarrow{j_*}\; H_k(A,B) \;\xrightarrow{\partial}\; H_{k-1}(B,\emptyset) \;\to\; \ldots$$

(*v*) *se* f, g *sono omotopiche, allora* $f_* = g_*$*;*

(*vi*) (escissione) *se* $B, C \subseteq A$, $A = \mathrm{int}(B) \cup \mathrm{int}(C)$, *e* $i : (B, B \cap C) \to (A, B)$ *è l'inclusione, allora* $i_* : H_k(B, B \cap C) \to H_k(A, B)$ *è un isomorfismo;*

(*vii*) *per ogni* $x \in X$ *si ha* $H_k(\{x\}, \emptyset) = \delta_{k0}\mathbb{R}$.

L'assioma (*vii*), nel caso $k = 0$, segue dalla costruzione specifica dell'omologia singolare (ved. [16, Proposition 6.38]). Osserviamo ora alcune semplici conseguenze della Proposizione 2.34 (per le dimostrazioni ved. [16, Chapter 6]). Per esempio, se $(A, B) \sim (C, D)$, dagli assiomi (*i*) (*ii*) (*v*) segue per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(A, B) = H_k(C, D).$$

Ricordiamo che B è un *retratto di deformazione* di A se $B \subseteq A$ ed esiste una mappa $\eta \in C([0, 1]\times A, A)$ t.c. $\eta(0, x) = x$, $\eta(1, x) \in B$ per ogni $x \in A$, e $\eta(1, x) = x$ per ogni $x \in B$. Per l'assioma (*v*), i retratti di deformazione si possono sostituire nei gruppi omologici:

Lemma 2.35. *Siano* $C \subseteq B \subseteq A$*:*

(*i*) *se* B *è un retratto di deformazione di* A*, allora* $H_k(A, B) = 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*;*

(*ii*) *se* B *è un retratto di deformazione di* A*, allora* $H_k(A, C) = H_k(B, C)$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*;*

(*iii*) *se* C *è un retratto di deformazione di* B*, allora* $H_k(A, B) = H_k(A, C)$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$.

Dalla Proposizione 2.34 (*vi*) segue:

Lemma 2.36. *Siano* (A_i, B_i) *(*$i = 1, \ldots n$*) coppie con* $A_1, \ldots A_n$ *chiusi disgiunti, e siano*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\;\; B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(A, B) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_k(A_i, B_i).$$

Ricordiamo la seguente proprietà algebrica delle catene di insiemi, conseguenza della Proposizione 2.34 (*iv*):

Lemma 2.37. *Siano* $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n$*:*

(*i*) *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*[1]

$$\dim(H_k(A_n, A_0)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(H_k(A_i, A_{i-1}));$$

(*ii*) *se* $\dim(H_k(A_i, A_{i-1})) < \infty$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *e si annulla per* k *abbastanza grande (*$i = 1, \ldots n$*), allora esiste un polinomio* $Q(t)$ *con coefficienti in* $\mathbb{N}$ *t.c. per ogni* $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \dim(H_k(A_i, A_{i-1}))t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \dim(H_k(A_n, A_0))t^k + (1 + t)Q(t).$$

Passiamo adesso allo studio dei punti critici di un funzionale $\Phi \in C^2(X)$. Anche in questa teoria ci servirà un risultato di deformazione, che si può considerare un raffinamento del Lemma 2.24 (per la dimostrazione ved. [16, Theorem 5.34]):

[1] Per i gruppi di omologia, che sono anche spazi vettoriali, indichiamo con $\dim(\cdot)$ l'ordine del gruppo.

Lemma 2.38. (di deformazione/2) *Siano $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS), $a < b$ t.c. $K_a(\Phi)$ è finito e $K_c(\Phi) = \emptyset$ per ogni $c \in (a, b)$. Allora esiste $\eta \in C([0, 1] \times (\Phi^b \setminus K_b(\Phi)), (\Phi^b \setminus K_b(\Phi)))$ t.c.*

(i) *$\eta(0, x) = x$, $\eta(1, x) \in \Phi^a$ per ogni $x \in \Phi^b \setminus K_b(\Phi)$;*
(ii) *$\eta(t, x) = x$ per ogni $t \in [0, 1]$, $x \in \Phi^a$;*
(iii) *la funzione $t \mapsto \Phi(\eta(t, x))$ è decrescente in $[0, 1]$ per ogni $x \in \Phi^b \setminus (\Phi^a \cup K_b(\Phi))$.*

Da *(i)* *(ii)* segue che Φ^a è un retratto di deformazione (forte) di $\Phi^b \setminus K_b(\Phi)$. Inoltre, per *(iii)* ogni punto di $\Phi^b \setminus K_b(\Phi)$ si può congiungere con un punto di Φ^a attraverso un cammino su cui Φ diminuisce.

Introduciamo la nozione fondamentale della teoria di Morse:

Definizione 2.39. *Siano $\Phi \in C^2(X)$, $x_0 \in K_c(x_0)$. Diremo che x_0 è un punto critico isolato di Φ se esiste un intorno $U \subset X$ di x_0 t.c.*

$$K(\Phi) \cap U = \{x_0\}.$$

In tal caso, per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo il gruppo critico di ordine k di Φ in x_0

$$C_k(\Phi, x_0) = H_k(\Phi^c \cap U, \Phi^c \cap U \setminus \{x_0\}).$$

La definizione di $C_k(\Phi, x_0)$ è invariante rispetto alla scelta di U in forza della Proposizione 2.34 *(vi)*. Il più semplice uso dei gruppi critici è legato alla classificazione dei punti critici:

Proposizione 2.40. *Siano $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS), $x_0 \in K_c(x_0)$ un punto critico isolato:*

(i) *se x_0 è un punto di minimo locale, allora $C_k(\Phi, x_0) = \delta_{k0}\mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;*
(ii) *se x_0 è un punto di massimo locale, allora $C_k(\Phi, x_0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$:*

Dimostrazione. Proviamo *(i)*. Essendo isolato, x_0 è un punto di minimo locale *proprio*, ovvero esiste $\rho > 0$ t.c. $\Phi(x) > c$ per ogni $x \in \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$ e $K(\Phi) \cap \overline{B}_\rho(x_0) = \{x_0\}$. Per la Proposizione 2.34 *(vii)*, abbiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} C_k(\Phi, x_0) &= H_k(\Phi^c \cap \overline{B}_\rho(x_0), \Phi^c \cap \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}) \\ &= H_k(\{x_0\}, \emptyset) = \delta_{k0}\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proviamo ora *(ii)*. Come sopra, esiste $\rho > 0$ t.c. $\Phi(x) < c$ per ogni $x \in \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$ e $K(\Phi) \cap \overline{B}_\rho(x_0) = \{x_0\}$. Si ha pertanto per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} C_k(\Phi, x_0) &= H_k(\Phi^c \cap \overline{B}_\rho(x_0), \Phi^c \cap \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}) \\ &= H_k(\overline{B}_\rho(x_0), \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}). \end{aligned}$$

Poiché $\dim(X) = \infty$, gli insiemi $\overline{B}_\rho(x_0)$, $\overline{B}_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$ sono entrambi *contraibili*, ovvero l'identità è omotopica a una funzione costante $x \mapsto \bar{x}$ [16, Definition 6.2]. Applicando ripetutamente il Lemma 2.35, abbiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(\overline{B}_\rho(x_0), \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}) = H_k(\bar{x}, \bar{x}) = 0,$$

da cui *(ii)*. □

In effetti, la proprietà *(i)* è *caratteristica* dei punti di minimo locale (ved. [16, Proposition 6.95]). Anche altri tipi di punti critici si possono riconoscere da sequenze caratteristiche di gruppi critici (ved. [16, Corollary 6.102]).

Osservazione 2.41. La Proposizione 2.40 *(ii)* vale solo se $\dim(X) = \infty$. Se $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ è un punto di massimo locale e un punto critico isolato di Φ, allora si ha per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$C_k(\Phi, x_0) = \delta_{kN}\mathbb{R}$$

(ved. Esercizio 2.54).

I Lemmi 2.24, 2.38 descrivono *qualitativamente* come la presenza (o l'assenza) di livelli critici di un funzionale Φ in un intervallo $[a,b]$ influisce sulla topologia dei sottolivelli Φ^c, $a \leqslant c \leqslant b$. Mediante i gruppi critici possiamo fornire una versione *quantitativa* di tale relazione:

Lemma 2.42. (di decomposizione) *Siano $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS), $a < c < b$ t.c. $K_c(\Phi) = \{x_1, \dots x_n\}$ e $K_{c'}(\Phi) = \emptyset$ per ogni $c' \in [a,b] \setminus \{c\}$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$*

$$H_k(\Phi^b, \Phi^a) = \bigoplus_{i=1}^n C_k(\Phi, x_i).$$

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che $x_1, \dots x_n$ sono punti critici isolati di Φ.
Applichiamo il Lemma 2.38 all'intervallo $[a,c]$, deducendo che Φ^a è un retratto di deformazione di $\Phi^c \setminus K_c(\Phi)$. Similmente, Φ^c è un retratto di deformazione di Φ^b. Per il Lemma 2.35 *(ii)* *(iii)* abbiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(\Phi^b, \Phi^a) = K_k(\Phi^c, \Phi^c \setminus K_c(\Phi)).$$

Adesso separiamo i punti di $K_c(\Phi)$, ovvero individuiamo $U_1, \dots U_n \subset X$ aperti, t.c.

$$K(\Phi) \cap U_i = \{x_i\} \ (i = 1, \dots n),$$

e $a \leqslant \Phi(x) \leqslant b$ per ogni $x \in U$, dove

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Per la Proposizione 2.34 *(vi)*, il Lemma 2.36, e la Definizione 2.39 abbiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H_k(\Phi^c, \Phi^c \setminus K_c(\Phi)) &= H_k(\Phi^c \cap U, (\Phi^c \cap U) \setminus K_c(\Phi)) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n H_k(\Phi^c \cap U_i, (\Phi^c \cap U_i) \setminus \{x_i\}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n C_k(\Phi, x_i), \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Riportiamo (senza dimostrazione) una proprietà di invarianza per omotopia dei gruppi di omologia fra i sottolivelli di funzionali:

Proposizione 2.43. *Siano $\Phi_1, \Phi_2 \in C^2(X)$ soddisfacenti (PS), $a < b$, $\delta > 0$ t.c. per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $x \in X$ t.c.*

$$a \leqslant (1-t)\Phi_1(x) + t\Phi_2(x) \leqslant b$$

si abbia

$$\|(1-t)\Phi_1'(x) + t\Phi_2'(x)\| \geqslant \delta.$$

Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(\Phi_1^b, \Phi_1^a) = H_k(\Phi_2^b, \Phi_2^a).$$

Osservazione 2.44. I Lemmi 2.38, 2.42 e la Proposizione 2.43 valgono anche per $b = \infty$, con la convenzione

$$\Phi^\infty = X.$$

Le dimostrazioni sono analoghe.

Già a questo punto, possiamo usare i gruppi critici per dimostrare un risultato di molteplicità (simile al Teorema 2.26):

Teorema 2.45. *Siano $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS), inferiormente limitato, $x_0 \in K(\Phi)$ un punto critico isolato, non di minimo globale, t.c. $C_h(\Phi, x_0) \neq 0$ per qualche $h \in \mathbb{N}$. Allora, Φ ha almeno tre punti critici.*

Dimostrazione. Poniamo

$$m = \inf_{x \in X} \Phi(x).$$

Per il Corollario 2.19 esiste $\bar{x} \in K_m(\Phi)$. Procediamo ora per assurdo, supponendo che

$$K(\Phi) = \{x_0, \bar{x}\}.$$

In particolare, Φ non ammette altri punti di minimo globale oltre $\bar{x}$. Poniamo $c = \Phi(x_0) > m$, quindi fissiamo $a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$m < a < c < b.$$

Per il Lemma 2.38, Φ^b è un retratto di deformazione di X, mentre $\Phi^m = \{\bar{x}\}$ è un retratto di deformazione di Φ^a, da cui per il Lemma 2.35 abbiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(\Phi^b, \{\bar{x}\}) = H_k(X, \{\bar{x}\}),$$
$$H_k(\Phi^a, \{\bar{x}\}) = 0.$$

Dalla Proposizione 2.34 *(iv)* (non proprio direttamente, ved. Esercizio 2.57) ricaviamo la sequenza esatta

$$\ldots \to H_k(\Phi^a, \{\bar{x}\}) \xrightarrow{i_*} H_k(\Phi^b, \{\bar{x}\}) \xrightarrow{j_*} H_k(\Phi^b, \Phi^a) \xrightarrow{h_* \circ \partial} H_{k-1}(\Phi^a, \{\bar{x}\}) \to \ldots$$

(dove i_*, j_*, h_* sono omomorfismi indotti dalle inclusioni), da cui $H_k(\Phi^b, \Phi^a) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per ipotesi, l'unico punto critico in Φ^b_a è x_0, da cui per il Lemma 2.42

$$C_h(\Phi, x_0) = H_h(\Phi^b, \Phi^a) = 0,$$

assurdo. Ciò prova l'esistenza di un terzo punto critico $x_1 \in K(\Phi) \setminus \{\bar{x}, x_0\}$. □

Introduciamo ora ulteriori invarianti algebrici, specialmente significativi per i punti critici che non sono di estremo locale:

Definizione 2.46. *Siano $\Phi \in C^2(X)$, $x_0 \in K(\Phi)$ un punto critico isolato:*

(i) l'indice di Morse di x_0 è

$$\mu = \sup\big\{\dim(Y) : Y \subset X \text{ sottospazio t.c. } \Phi''(x_0) : Y \times Y \to \mathbb{R} \text{ è definita negativa}\big\};$$

(ii) la nullità di x_0 è

$$\nu = \dim(\ker \Phi''(x_0)).$$

Il punto critico x_0 è detto non-degenere se $\nu = 0$, degenere se $\nu > 0$.

Osservazione 2.47. Mentre la maggior parte della teoria di Morse, basata sull'omologia singolare, può essere estesa ai funzionali di classe C^1 su spazi di Banach e anche a contesti più generali (ved. [16, 18]), la Definizione 2.46 ha senso solo se X è uno spazio di Hilbert e $\Phi \in C^2(X)$. Osserviamo che in generale si può avere $\mu = \infty$ o $\nu = \infty$ (ma in questa sede ci concentreremo solo sul caso $\mu, \nu \in \mathbb{N}$). Infine, notiamo che in *(i)* $\Phi''(x_0)$ è considerata come una forma bilineare su X, mentre in *(ii)* come un operatore da X in $\mathcal{L}(X)$.

Vicino a un punto critico non-degenere, un funzionale può essere approssimato mediante la sua derivata seconda (per la dimostrazione ved. [4, p. 78]):

Lemma 2.48. (di Morse) *Siano $\Phi \in C^2(X)$, $x_0 \in K(\Phi)$ un punto critico non-degenere. Allora esistono un intorno $V \subset X$ di 0 e un diffeomorfismo $h \in C^1(V, X)$ t.c. $h(0) = x_0$ e per ogni $y \in V$*

$$\Phi(h(y)) = \Phi(x_0) + \frac{1}{2}\Phi''(x_0)(y, y).$$

Il legame fra le Definizioni 2.39 e 2.46 è dato dal seguente risultato:

Teorema 2.49. *Siano $\Phi \in C^2(X)$, $x_0 \in K(\Phi)$ un punto critico isolato, non-degenere, con indice di Morse $\mu \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$*

$$C_k(\Phi, x_0) = \delta_{k\mu}\mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $x_0 = 0$, $\Phi(0) = 0$. Siano $V \subset X$, $h \in C^1(V, X)$ come nel Lemma 2.48, e poniamo per ogni $y \in V$

$$\Psi(y) = \Phi(h(y)) = \frac{1}{2}\Phi''(0)(y, y)$$

(una forma quadratica). Dalla prima espressione di Ψ ricaviamo per ogni $y \in V$

$$\Psi'(y) = \langle \Phi'(h(y)), h'(y) \rangle.$$

Poiché 0 è un punto critico isolato di Φ, esiste $\rho > 0$ t.c. $\overline{B}_\rho(0) \subset V$, $\Phi'(h(y)) \neq 0$ e $\Psi'(y) \neq 0$ per ogni $y \in \overline{B}_\rho(0) \setminus \{0\}$. Poiché $h : \overline{B}_\rho(0) \to X$ è un omeomorfismo, dalla Proposizione 2.34 segue per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
C_k(\Phi, 0) &= H_k(\Phi^0 \cap h(\overline{B}_\rho(0)), (\Phi^0 \cap h(\overline{B}_\rho(0))) \setminus \{h(0)\}) \\
&= H_k(\Psi^0 \cap \overline{B}_\rho(0), (\Psi^0 \cap \overline{B}_\rho(0)) \setminus \{0\}).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ricordiamo ora che $\nu = 0$ (ved. Definizione 2.46 *(ii)*), dunque esistono due sottospazi $X_\pm \subset X$ t.c. $\Phi''(0)$ é definita positiva su X_+, definita negativa su X_- con $\dim(X_-) = \mu$, e si ha la decomposizione

$$X = X_+ \oplus X_-.$$

Per ogni $y \in \overline{B}_\rho(0)$ esistono unici $y_\pm \in X_\pm$ t.c. $y = y_+ + y_-$, poniamo dunque per ogni $(t, y) \in [0, 1] \times \overline{B}_\rho(0)$

$$\eta(t, x) = (1 - t)y_+ + y_-,$$

così che $\eta \in C([0, 1] \times \overline{B}_\rho(0), \overline{B}_\rho(0))$. Si ha per ogni $(t, y) \in [0, 1] \times \overline{B}_\rho(0)$

$$\begin{aligned}
2\Psi(\eta(t, y)) &= \Phi''(0)((1 - t)y_+ + y_-, (1 - t)y_+ + y_-) \\
&= (1 - t)^2\Phi''(0)(y_+, y_+) + 2(1 - t)\Phi''(0)(y_+, y_-) + \Phi''(0)(y_-, y_-) \\
&\leqslant \Phi''(0)(y_+, y_+) + \Phi''(0)(y_-, y_-) = 2\Psi(y),
\end{aligned}$$

da cui

$$\Psi(\eta(t, y)) \leqslant \Psi(y).$$

Pertanto la restrizione η mappa $[0, 1] \times (\Psi^0 \cap \overline{B}_\rho(0))$ in $\Psi^0 \cap \overline{B}_\rho(0))$. La restrizione soddisfa inoltre per ogni $y \in \overline{B}_\rho(0)$

$$\eta(0, y) = y, \ \eta(1, y) = y_-.$$

Dunque la mappa

$$\eta(1, \cdot) : (\Psi^0 \cap \overline{B}_\rho(0), (\Psi^0 \cap \overline{B}_\rho(0)) \setminus \{0\}) \to (X_- \cap \overline{B}_\rho(0), (X_- \cap \overline{B}_\rho(0)) \setminus \{0\})$$

è omotopica all'identità (come mappa fra le stesse coppie). Dalla Proposizione 2.34 e da (2.10) abbiamo allora per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
C_k(\Phi, 0) &= H_k(\Psi^0 \cap \overline{B}_\rho(0), (\Psi^0 \cap \overline{B}_\rho(0)) \setminus \{0\}) \\
&= H_k(X_- \cap \overline{B}_\rho(0), (X_- \cap \overline{B}_\rho(0)) \setminus \{0\}).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ricordiamo ora che X_- è linearmente isomorfo a $\mathbb{R}^\mu$, quindi dalla Proposizione 2.34 e da [16, Example 6.28 (c)] segue per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(X_- \cap \overline{B}_\rho(0), (X_- \cap \overline{B}_\rho(0)) \setminus \{0\}) = H_k(\mathbb{B}^\mu, \mathbb{S}^{\mu-1}) = \delta_{k\mu}\mathbb{R}.$$

In virtù di (2.11), abbiamo infine $C_k(\Phi, 0) = \delta_{k\mu}\mathbb{R}$. $\square$

Il caso dei punti critici degeneri è ovviamente più complicato. In luogo del Lemma 2.48 si usano risultati di approssimazione più sofisticati (*splitting theorem*, *shifting theorem*) che conducono alle seguenti informazioni, comunque meno precise del Teorema 2.49 (ved. [16, Corollary 6.70]):

Teorema 2.50. ⋆ *Siano $\Phi \in C^2(X)$, $x_0 \in K(\Phi)$ un punto critico isolato, con indice di Morse $\mu \in \mathbb{N}$ e nullità $\nu \in \mathbb{N}_0$. Allora si ha per ogni $k \in \mathbb{N}$*

$$\dim(C_k(\Phi, x_0)) \begin{cases} < \infty & \text{se } k < \mu \text{ o } k > \mu + \nu \\ = 0 & \text{se } \mu \leqslant k \leqslant \mu + \nu. \end{cases}$$

La teoria di Morse ha anche un aspetto *globale*, ovvero fornisce delle relazioni algebriche basate sugli ordini dei gruppi critici, che sono verificate quando si considerano *tutti* i punti critici di un funzionale. Tali relazioni sono di solito usate in ragionamenti per assurdo: se non sono verificate, se ne deduce l'esistenza di un punto critico ancora non individuato.

Definizione 2.51. *Siano $\Phi \in C^2(X)$, $a < b$ t.c. $K_a(\Phi) = K_b(\Phi) = \emptyset$ e*

$$K_a^b(\Phi) = \{x_1, \dots x_n\}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

(i) $M_k(\Phi, a, b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim(C_k(\Phi, x_i))$ *(numeri di Morse);*
(ii) $\beta_k(\Phi, a, b) = \dim(H_k(\Phi^b, \Phi^a))$ *(numeri di Betti).*

Se le quantità definite sopra sono finite per ogni $k \in \mathbb{N}$ e si annullano per ogni k abbastanza grande, poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$M(\Phi, a, b)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(\Phi, a, b) t^k \text{ (polinomio di Morse)},$$

$$P(\Phi, a, b)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(\Phi, a, b) t^k \text{ (polinomio di Poincaré)}.$$

Ricordando il Lemma 2.42, vediamo che se Φ soddisfa (PS) e $c \in (a, b)$ è *l'unico* valore critico di Φ in $[a, b]$ allora si ha $M_k(\Phi, a, b) = \beta_k(\Phi, a, b)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$M(\Phi, a, b)(t) = P(\Phi, a, b)(t).$$

In generale, i polinomi introdotti nella Definizione 2.51 non coincidono. Tuttavia, se nell'insieme Φ_a^b troviamo solo un numero finito di punti critici, vale una relazione algebrica più debole:

Teorema 2.52. ⋆ (identità di Morse) *Siano $\Phi \in C^2(X)$ soddisfacente (PS), $a < b$ t.c. $K_a(\Phi) = K_b(\Phi) = \emptyset$, $K_a^b(\Phi)$ è un insieme finito, e ogni punto di $K_a^b(\Phi)$ ha indice di Morse e nullità finiti. Allora*

(i) $M_k(\Phi, a, b) \geqslant \beta_k(\Phi, a, b)$ *per ogni $k \in \mathbb{N}$;*
(ii) *esiste un polinomio Q con coefficienti in $\mathbb{N}$ t.c. per ogni $t \in \mathbb{R}$*

$$M(\Phi, a, b)(t) = P(\Phi, a, b)(t) + (1 + t)Q(t).$$

Dimostrazione. Preliminarmente, osserviamo che ogni punto critico $x \in K_a^b(\Phi)$ è isolato, quindi per il Teorema 2.49 (caso non-degenere) o il Teorema 2.50 (caso degenere) si ha

$$\dim(C_k(\Phi, x)) \begin{cases} < \infty & \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \\ = 0 & \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ abbastanza grande.} \end{cases}$$

Pertanto, $M_k(\Phi, a, b) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e si annulla per k abbastanza grande. Per ipotesi, i livelli critici di Φ in $[a, b]$ sono

$$a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b \ (m \in \mathbb{N}_0),$$

con $K_{c_i}(\Phi)$ finito $(i = 1, \ldots m)$. Fissiamo allora una decomposizione di $[a, b]$ mediante i numeri

$$a = d_0 < c_1 < d_1 < c_2 < \ldots < c_m < d_m = b.$$

Dalla Definizione 2.51, dal Lemma 2.42, e dal Lemma 2.37 *(i)* segue per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} M_k(\Phi, a, b) &= \sum_{i=1}^{m} M_k(\Phi, d_{i-1}, d_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{x \in K_{c_i}(\Phi)} \dim(C_k(\Phi, x)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \dim(H_k(\Phi^{d_i}, \Phi^{d_{i-1}})) \\ &\geqslant \dim(H_k(\Phi^b, \Phi^a)) = \beta_k(\Phi, a, b), \end{aligned}$$

il che prova *(i)*.

Inoltre, da *(i)* discende che $\beta_k(\Phi, a, b) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e si annulla per k abbastanza grande. In particolare, i polinomi di Morse e di Poincaré sono ben definiti (ved. Definizione 2.51). Per il Lemma 2.37 *(ii)* abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$M(\Phi, a, b)(t) = P(\Phi, a, b)(t) + (1 + t)Q(t),$$

con Q polinomio a coefficienti in $\mathbb{N}$, il che prova *(ii)*. □

Sostituendo $t = -1$ nel Teorema 2.52 *(ii)* (sotto le stesse ipotesi), si ha la *formula di Poincaré-Hopf*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k M_k(\Phi, a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k(\Phi, a, b). \tag{2.12}$$

Esercizio 2.53. Dimostrare che $H_k(A, A) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $A \subseteq X$.

Esercizio 2.54. Dimostrare che per ogni $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{S}^{N-1}$ si ha

$$H_k(\mathbb{B}^N, \{0\}) = 0, \ H_k(\mathbb{S}^{N-1}, \{x\}) = \delta_{kN}\mathbb{R}, \ H_k(\mathbb{B}^N, \mathbb{S}^{N-1}) = \delta_{kN}\mathbb{R}.$$

Esercizio 2.55. Dimostrare il Lemma 2.37 (ved. [16, Lemma 6.56]).

Esercizio 2.56. Dimostrare l'Osservazione 2.41.

Esercizio 2.57. Siano $C \subset B \subset A$, e $i : (B, C) \to (A, C)$, $j : (A, C) \to (A, B)$, $h : (B, \emptyset) \to (B, C)$ le inclusioni. Dimostrare che la sequenza

$$\ldots \ \to H_k(B, C) \ \xrightarrow{i_*} \ H_k(A, C) \ \xrightarrow{j_*} \ H_k(A, B) \ \xrightarrow{h_* \circ \partial} \ H_{k-1}(B, C) \ \to \ \ldots$$

è esatta (ved. [16, Proposition 6.14]).

Esercizio 2.58. Nelle ipotesi del Teorema 2.26, supponiamo che x_0, x_1, $\bar{x}$ siano gli unici punti critici di Φ, e che $C_k(\Phi, \bar{x}) = \delta_{k1}\mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Siano poi $a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a < \Phi(x_1) \leqslant \Phi(x_0) \leqslant \Phi(\bar{x}) < b$. Quali *possono essere* i numeri di Betti di Φ in $[a, b]$?

3. Teoria del grado

I could be bounded in a nutshell and count myself a king of infinite space.
W. Shakespeare

In questa sezione affrontiamo il seguente problema: siano X uno spazio di Hilbert con $\dim(X) = \infty$, $U \subset X$ un aperto limitato, $A \in C(\overline{U}, X)$ un operatore non lineare, si vogliono 'contare' le soluzioni $x \in U$ dell'equazione funzionale

$$A(x) = 0. \tag{3.1}$$

A tal fine, occorre conoscere il comportamento di A sulla frontiera ∂U e fare delle ipotesi sulla monotonia o compattezza di A, che consentono di sintetizzare le informazioni circa le soluzioni di (3.1) in un numero $\deg(A, U, 0) \in \mathbb{Z}$ detto *grado topologico* dell'operatore. La teoria del grado si sviluppa per estensioni successive, a partire dal caso euclideo fino a spazi di dimensione infinita.

3.1. **Grado di Brouwer.** Il grado topologico per funzioni continue fra spazi euclidei, introdotto da Brouwer, si definisce esplicitamente (per le dimostrazioni dei risultati di questa sotto-sezione ved. [10, Chapter IV] e [16, Chapter 4]). Siano $N \in \mathbb{N}_0$, $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $A \in C^1(U, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{U}, \mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$, e per ogni $x \in U$ definiamo il determinante jacobiano

$$J_A(x) = \det(\nabla A(x)).$$

Diremo che $y \in A(U)$ è un *valore regolare* di A se $J_A(x) \neq 0$ per ogni $x \in A^{-1}(y)$, mentre y è un *valore singolare* se esiste $x \in A^{-1}(y)$ t.c. $J_A(x) = 0$, detto *punto singolare*. L'insieme dei punti singolari è indicato con

$$S_A = \big\{x \in U : \ J_A(x) = 0\big\},$$

quindi l'insieme dei valori singolari sarà $A(S_A)$. Ricordiamo che se y è un valore regolare, allora $A^{-1}(y)$ è un insieme finito (per il Teorema della funzione inversa).

Definizione 3.1. (grado di Brouwer) *Sia $y \in \mathbb{R}^N \setminus A(\partial U \cup S_A)$. Il grado topologico della tripletta (A, U, y) è allora*

$$\deg_B(A, U, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in A^{-1}(y)} \mathrm{sgn}(J_A(x)) & \textit{se } A^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{se } A^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Il grado introdotto nella Definizione 3.1 ha una fondamentale proprietà di permanenza: esso è costante sulle componenti connesse (per archi) di $\mathbb{R}^N \setminus A(\partial U)$.

Lemma 3.2. *Siano $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^N \setminus A(\partial U \cup S_A)$, $\gamma \in C([0,1], X)$ t.c. $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$, e $\gamma(t) \notin A(\partial U)$ per ogni $t \in [0,1]$. Allora*

$$\deg_B(A, U, y_0) = \deg_B(A, U, y_1).$$

Usando il Lemma 3.2, possiamo estendere la Definizione 3.1, in due fasi:

(*a*) Se $y \in A(S_A) \setminus A(\partial U)$ allora, poiché $A(S_A)$ ha misura nulla (per il Teorema di Sard, ved. [16, Theorem 4.3]), esiste $\tilde{y} \in \mathbb{R}^N \setminus A(\partial U \cup S_A)$ t.c.

$$|y - \tilde{y}| < \mathrm{dist}(y, A(\partial U)),$$

pertanto $\tilde{y}$ appartiene alla medesima componente connessa di $\mathbb{R}^N \setminus A(\partial U)$. Poniamo allora

$$\deg_B(A, U, y) = \deg_B(A, U, \tilde{y}).$$

(b) Siano $A \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N \setminus A(\partial U)$. Per classici risultati di densità esiste $\tilde{A} \in C^1(U, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{U}, \mathbb{R}^N)$ t.c. per ogni $x \in \overline{U}$

$$|A(x) - \tilde{A}(x)| < \mathrm{dist}(y, A(\partial U)),$$

da cui $y \notin \tilde{A}(\partial U)$. Allora si pone

$$\deg_B(A, U, y) = \deg_B(\tilde{A}, U, \tilde{y}).$$

Il grado di Brouwer, così cosrtruito, gode di diverse proprietà formali (che in effetti lo caratterizzano):

Proposizione 3.3. *Siano $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $A \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N \setminus A(\partial U)$. Allora*

(i) (normalizzazione) $\deg_B(\mathrm{id}, U, y) = 1$ *per ogni* $y \in U$*;*

(ii) (additività rispetto al dominio) *se* $U_1, U_2 \subset U$ *sono aperti t.c.* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ *e* $y \notin A(\partial U_1 \cup \partial U_2)$*, allora*

$$\deg_B(A, U_1 \cup U_2, y) = \deg_B(A, U_1, y) + \deg_B(A, U_2, y);$$

(iii) (invarianza per omotopia) *se* $h \in C([0,1] \times \overline{U}, \mathbb{R}^N)$*,* $g \in C([0,1], \mathbb{R}^N)$ *sono t.c.* $g(t) \notin h([0,1] \times \partial U)$ *per ogni* $t \in [0,1]$*, allora la funzione*

$$t \mapsto \deg_B(h(t, \cdot), U, g(t))$$

è costante in $[0,1]$*;*

(iv) (escissione) *se* $C \subset \overline{U}$ *è chiuso t.c.* $y \notin A(C)$*, allora*

$$\deg_B(A, U, y) = \deg_B(A, U \setminus C, y);$$

(v) (soluzione) *se* $\deg_B(A, U, y) \neq 0$*, allora* $A^{-1}(y) \neq \emptyset$*;*

(vi) (continuità) *posto* $\rho = \mathrm{dist}(y, A(\partial U))$*, per ogni* $\tilde{A} \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^N)$ *t.c.* $|A(x) - \tilde{A}(x)| < \rho$ *per ogni* $x \in \overline{U}$ *si ha*

$$\deg_B(A, U, y) = \deg_B(\tilde{A}, U, y),$$

inoltre per ogni $\tilde{y} \in B_\rho(y)$ *si ha*

$$\deg_B(A, U, y) = \deg_B(A, U, \tilde{y});$$

(vii) (dipendenza dalla frontiera) *se* $\tilde{A} \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^N)$ *è t.c.* $A(x) = \tilde{A}(x)$ *per ogni* $x \in \partial U$*, allora*

$$\deg_B(A, U, y) = \deg_B(\tilde{A}, U, y);$$

$(viii)$ (traslazione) *per ogni* $z \in \mathbb{R}^N$ *si ha*

$$\deg_B(A, U, y) = \deg_B(A - z, U, y - z).$$

Una celebre applicazione del grado di Brouwer è il seguente risultato:

Teorema 3.4. (di punto fisso di Brouwer-Schauder) *Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto convesso, $A \in C(K, K)$. Allora esiste $\bar{x} \in K$ t.c. $A(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $K = \overline{B}_\rho(0)$ ($\rho > 0$), e senza perdita di generalità che $A(x) \neq x$ per ogni $x \in \partial B_\rho(0)$. Poniamo per ogni $(t, x) \in [0,1] \times \overline{B}_\rho(0)$

$$h(t, x) = x - tA(x).$$

Allora $h \in C([0,1] \times \overline{B}_\rho(0), \mathbb{R}^N)$ soddisfa $h(0, x) = x$ per ogni $x \in \overline{B}_\rho(0)$, inoltre per ogni $(t, x) \in [0,1) \times \partial B_\rho(0)$

$$|h(t, x)| \geqslant |x| - t|A(x)| \geqslant (1 - t)\rho > 0,$$

mentre per ipotesi abbiamo per ogni $x \in \partial B_\rho(0)$

$$h(1, x) = x - A(x) \neq 0.$$

In sintesi abbiamo $h(t,x) \neq 0$ per ogni $(t,x) \in [0,1] \times \partial B_\rho(0)$. Per la Proposizione 3.3 (i) (iii) abbiamo
$$\deg_B(h(1,\cdot), B_\rho(0), 0) = \deg_B(\mathrm{id}, B_\rho(0), 0) = 1.$$
Per la Proposizione 3.3 (v) esiste $\bar{x} \in B_\rho(0)$ t.c. $h(1,\bar{x}) = 0$, ovvero
$$\bar{x} - A(\bar{x}) = 0.$$
Consideriamo ora un generico insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto convesso. Esiste $\rho > 0$ t.c. $K \subseteq \overline{B}_\rho(0)$. Sia $\Pi_K \in C(\overline{B}_\rho(0), K)$ la proiezione metrica su K, e poniamo
$$\tilde{A} = A \circ \Pi_K \in C(\overline{B}_\rho(0), \overline{B}_\rho(0)).$$
Per il caso precedente, esiste $\bar{x} \in \overline{B}_\rho(0)$ t.c. $\tilde{A}(\bar{x}) = \bar{x}$. In particolare si ha $\bar{x} \in A(K) \subseteq K$, da cui $A(\bar{x}) = \bar{x}$. □

Riportiamo anche il seguente risultato tecnico, che useremo in seguito[2] (ved. [16, Lemma 4.36]):

Lemma 3.5. *Siano $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $A \in C(\overline{U}, R^N)$, $Y \subset \mathbb{R}^N$ un sotto-spazio t.c. $U_Y = U \cap Y \neq \emptyset$, $A_Y = A|_Y \in C(\overline{U}_Y, \mathbb{R}^N)$, e sia verificata una delle seguenti condizioni:*

(i) $0 \in A(\partial U) \cup A(\partial U_Y)$;

(ii) $0 \notin A(\partial U) \cup A(\partial U_Y)$ *e* $\deg_B(A, U, 0) \neq \deg_B(A_Y, U_Y, 0)$.

Allora esiste $x \in \partial U$ t.c.
$$\langle A(x), x\rangle \leqslant 0, \ \ A(x) \in Y^\perp.$$

Il legame fra le teorie del grado e dei punti critici si basa su una serie di risultati relativi al grado del gradiente di un funzionale di classe C^1. Ricordiamo qui uno dei più importanti:

Lemma 3.6. (Amann) *Siano $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\rho > 0$, $a < b$ t.c.*

(i) *l'insieme*
$$\tilde{\Phi}^b = \big\{x \in \mathbb{R}^N : \Phi(x) < b\big\}$$
è limitato;

(ii) $\Phi^a \subseteq B_\rho(x_0) \subseteq \tilde{\Phi}^b$;

(iii) $\Phi'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in \Phi^b_a$.

Allora si ha
$$\deg_B(\Phi', \tilde{\Phi}^b, 0) = 1.$$

Osservazione 3.7. Esistono diverse estensioni del grado di Brouwer a operatori fra spazi di dimensione infinita, tra cui il *grado di Leray-Schauder* (ved. [16, Section 4.2]), relativa a operatori del tipo
$$A(x) = x - K(x),$$
con K mappa compatta, su spazi di Hilbert. Qui non considereremo tale teoria, privilegiandone una più adatta alle applicazioni alle EDP non lineari.

Esercizio 3.8. Dimostrare le proprietà (i) (ii) (v) della Proposizione 3.3.

Esercizio 3.9. Siano
$$U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\big\}, \ A(x,y) = (x+y, x-y).$$
Calcolare $\deg_B(A, U, 0)$. Esiste una soluzione di (3.1) in U?

[2] In simboli come ∂U_Y, $\overline{U}_Y$, si sottintende sempre l'uso della topologia relativa di Y.

3.2. **Grado per operatori** $(S)_+$**.** Estendiamo adesso il grado di Brouwer a una classe particolare di operatori definiti in uno spazio di Hilbert separabile X, t.c. $\dim(X) = \infty$ (seguiamo [16, Section 4.3]). Anche in questo caso, consideriamo un aperto limitato $U \subset X$ e un operatore $A \in C(\overline{U}, X)$, che inoltre gode delle seguenti proprietà:

Definizione 3.10. *Un operatore $A : X \to X$ è detto*

(i) demicontinuo se per ogni successione (x_n) in X t.c. $x_n \to x$ si ha $A(x_n) \rightharpoonup A(x)$;

(ii) di classe $(S)_+$ se per ogni successione (x_n) in X t.c. $x_n \rightharpoonup x$ e

$$\limsup_n \langle A(x_n), x_n - x \rangle \leqslant 0,$$

si ha $x_n \to x$.

Osservazione 3.11. La Definizione 3.10 è valida in generale per un operatore $A : X \to X^*$, dove X è uno spazio di Banach e X^* il suo duale. In tal caso, in *(i)* $A(x_n)$ converge a $A(x)$ nella *topologia debole**, ma se X è uno spazio di Hilbert si ha $X = X^*$ (teorema di rappresentazione di Riesz) e la topologia debole* coincide con la topologia debole (per riflessività). Per queste definizioni e proprietà ved. [3].

Per ricondurre il caso presente a quello euclideo trattato nella Sotto-sezione 3.1 si ricorre all'*approssimazione di Galerkin*. Sia $(X_i)_{i\in I}$ la famiglia dei sotto-spazi di X t.c. $\dim(X_i) < \infty$ e $U_i = U \cap X_i \neq \emptyset$. Sull'insieme degli indici I definiamo un ordinamento parziale ponendo

$$i \preceq j \iff X_i \subseteq X_j.$$

Per ogni $i \in I$ definiamo $A_i : \overline{U}_i \to X_i$ ponendo per ogni $x \in \overline{U}_i$, $y \in X_i$

$$\langle A_i(x), y \rangle = \langle A(x), y \rangle$$

($A_i(x)$ è definito a meno di un elemento di $X_i^\perp$, ved. [11]). Identificando X_i con uno spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ ($N = \dim(X_i)$), si ha ovviamente che U_i è un aperto limitato e $A_i \in C(\overline{U}_i, X_i)$, e vale la seguente fondamentale proprietà di stabilizzazione del grado (di Brouwer) di A_i:

Lemma 3.12. *Sia $A \in C(\overline{U}, X)$ un operatore demicontinuo di classe (S_+) t.c. $0 \notin A(\partial U)$. Allora esiste $i_0 \in I$ t.c. per ogni $i \in I$, $i_0 \preceq i$, si ha $0 \notin A_i(\partial U_i)$ e*

$$\deg_B(A_i, U_i, 0) = \deg_B(A_{i_0}, U_{i_0}, 0).$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, supponendo che per ogni $i \in I$ esista $j \in I$, $i \preceq j$, t.c.

$$0 \in A_i(\partial U_i) \cup A_j(U_i),$$

oppure

$$0 \notin A_i(\partial U_i) \cup A_j(U_j), \ \deg_B(A_i, U_i, 0) \neq \deg_B(A_j, U_j, 0).$$

Per il Lemma 3.5, esiste $x_j \in \partial U_j$ t.c.

$$\langle A(x_j), x_j \rangle \leqslant 0, \ A(x_j) \in X_i^\perp.$$

Equivalentemente, per ogni $i \in I$ l'insieme

$$D_i = \{x \in \partial U : \langle A(x), x \rangle \leqslant 0, \ A(x) \in X_i^\perp\}$$

non è vuoto e limitato. La famiglia $(D_i)_{i\in I}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita*. Infatti, per ogni $i_1, \ldots i_m \in I$ esiste $j \in I$ t.c.

$$X_{i_1} + \ldots + X_{i_m} = X_j,$$

da cui

$$\bigcap_{k=1}^m D_{i_k} = D_j \neq \emptyset.$$

Per ogni $i \in I$, denotiamo E_i la chiusura debole di D_i. Per il Teorema di Alaoglu-Banach-Bourbaki (ved. [3, Theorem 3.16]) esiste $\bar{x} \in X$ t.c.

$$\bar{x} \in \bigcap_{i \in I} E_i.$$

Fissiamo $\bar{y} \in X$. Esiste $i \in I$ t.c. $\bar{x}, \bar{y} \in X_i$, ed esiste una successione $(x_n) \subset D_i$ t.c. $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ in X. Abbiamo allora, per definizione di D_i,

$$\limsup_n \langle A(x_n), x_n - \bar{x} \rangle \leqslant - \lim_n \langle A(x_n), \bar{x} \rangle = 0.$$

Per la proprietà $(S)_+$ di A (Definizione 3.10 *(ii)*) si ha $x_n \to x$, in particolare $\bar{x} \in \partial U$. Poiché A è demicontinuo (Definizione 3.10 *(i)*), si ha $A(x_n) \rightharpoonup A(\bar{x})$, da cui (ricordando che $A(x_n) \in X_i^{\perp}$) abbiamo

$$\langle A(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \lim_n \langle A(x_n), \bar{y} \rangle = 0.$$

Poiché $\bar{y} \in X$ è arbitrario, ne segue $A(\bar{x}) = 0$, assurdo. Dunque, per ogni $i \in I$ 'abbastanza grande' si ha $0 \notin A(\partial U_i)$ e $\deg_B(A_i, U_i, 0)$ è definitivamente costante. $\square$

Attraverso il precedente risultato possiamo estendere la Definizione 3.1:

Definizione 3.13. *Siano $U \subset X$ un aperto limitato, $A \in C(\overline{U}, X)$ un operatore demicontinuo di classe $(S)_+$ t.c. $0 \notin A(\partial U)$. Il grado topologico della tripletta $(A, U, 0)$ è*

$$\deg(A, U, 0) = \deg_B(A_{i_0}, U_{i_0}, 0),$$

dove $i_0 \in I$ è determinato dal Lemma 3.12. In generale, per ogni $y \notin A(\partial U)$ poniamo

$$\deg(A, U, y) = \deg(A - y, U, 0).$$

Come si vede, il grado di un operatore demicontinuo $(S)_+$ è ben lontano dall'avere una definizione esplicita. Esso si può determinare a partire da casi semplici usando le sue proprietà formali, che ricalcano quelle della Proposizione 3.3 (tranne *(vi)*, poco significativa in dimensione infinita, e *(viii)*, inclusa nella Definizione 3.13).

Preliminarmente, stabiliamo che una *omotopia di classe $(S)_+$* su U è una funzione $h : [0, 1] \times X \to X$ verificante la seguente proprietà: per ogni successione (t_n, x_n) in $[0, 1] \times X$ t.c.

$$t_n \to t, \ x_n \rightharpoonup x, \ \limsup_n \langle h(t_n, x_n), x_n - x \rangle \leqslant 0,$$

si ha

$$x_n \to x, \ h(t_n, x_n) \rightharpoonup h(t, x).$$

Attraverso il Lemma 3.12, si ottiene la seguente estensione della Proposizione 3.3:

Proposizione 3.14. *Siano $U \subset X$ aperto limitato, $A \in C(\overline{U}, X)$ un operatore demicontinuo di classe $(S)_+$, $y \in X \setminus A(\partial U)$. Allora*

(i) (normalizzazione) $\deg(\mathrm{id}, U, y) = 1$ *per ogni* $y \in U$*;*

(ii) (additività rispetto al dominio) *se $U_1, U_2 \subset U$ sono aperti t.c. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e $y \notin A(\partial U_1 \cup \partial U_2)$, allora*

$$\deg(A, U_1 \cup U_2, y) = \deg(A, U_1, y) + \deg(A, U_2, y);$$

(iii) (invarianza per omotopia) *se $h \in C([0, 1] \times \overline{U}, X)$ è un'omotopia di classe $(S)_+$, $g \in C([0, 1], X)$ è t.c. $g(t) \notin h([0, 1] \times \partial U)$ per ogni $t \in [0, 1]$, allora la funzione*

$$t \mapsto \deg(h(t, \cdot), U, g(t))$$

è costante in $[0, 1]$*;*

(*iv*) (escissione) *se* $C \subset \overline{U}$ *è chiuso t.c.* $y \notin A(C)$, *allora*

$$\deg(A, U, y) = \deg(A, U \setminus C, y);$$

(*v*) (soluzione) *se* $\deg(A, U, y) \neq 0$, *allora* $A^{-1}(y) \neq \emptyset$;

(*vi*) (dipendenza dalla frontiera) *se* $\tilde{A} \in C(\overline{U}, X)$ *è un operatore demicontinuo di classe* $(S)_+$ *t.c.* $A(x) = \tilde{A}(x)$ *per ogni* $x \in \partial U$, *allora*

$$\deg(A, U, y) = \deg(\tilde{A}, U, y).$$

Passiamo ora allo studio del grado di *operatori potenziali*, ovvero operatori della forma $\Phi' \in C(X, X)$ indotti da funzionali $\Phi \in C^1(X)$. In tale caso, i valori singolari di Φ' coincidono coi valori critici di Φ.

Vale la seguente estensione del Lemma 3.6:

Lemma 3.15. *Siano* $\Phi \in C^1(X)$ *t.c.* $\Phi' \in C(X, X)$ *è un operatore demicontinuo di classe* $(S)_+$, $x_0 \in X$, $\rho > 0$, $a < b$ *t.c.*

(*i*) *l'insieme*

$$\tilde{\Phi}^b = \{x \in X : \Phi(x) < b\}$$

è limitato;

(*ii*) $\Phi^a \subseteq B_\rho(x_0) \subseteq \tilde{\Phi}^b$;

(*iii*) $\Phi'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in \Phi^b_a$.

Allora si ha

$$\deg(\Phi', \tilde{\Phi}^b, 0) = 1.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \partial\tilde{\Phi}^b$ si ha $\Phi(x) = b$, da cui per (*iii*) segue $\Phi'(x) \neq 0$. Dunque il grado della tripletta $(\Phi', \tilde{\Phi}^b, 0)$ è ben definito. Ci riconduciamo al caso euclideo mediante l'approssimazione di Galerkin: sia $(X_i)_{i\in I}$ la famiglia dei sotto-spazi $X_i \subset X$ t.c.

$$\dim(X_i) < \infty, \ \tilde{\Phi}^b \cap X_i \neq \emptyset.$$

Come al solito, ordiniamo I mediante l'inclusione dei sottospazi. Proviamo che esiste $i_0 \in I$ t.c. per ogni $i \in I$, $i_0 \preceq i$, $x \in \Phi^b_a \cap X_i$ si ha

$$\Phi_i'(x) \neq 0, \tag{3.2}$$

dove $\Phi_i = \Phi|_{X_i} \in C^1(X_i)$. Ragionando per assurdo, supponiamo che per ogni $i \in I$ esistono $j \in I$ t.c. $i \preceq j$ e $x_j \in \Phi^b_a \cap X_j$ t.c. $\Phi_j'(x_j) = 0$, ovvero per ogni $y \in X_j$

$$\langle \Phi'(x_j), y\rangle = 0.$$

In particolare, per ogni $i \in I$ l'insieme

$$D_i = \{x \in \Phi^b_a : \langle \Phi'(x), x\rangle = \langle \Phi'(x), y\rangle = 0 \text{ per ogni } y \in X_i\}$$

non è vuoto. Come nella dimostrazione del Lemma 3.12, per ogni $i \in I$ denotiamo E_i la chiusura debole di D_i, ed E la chiusura debole di $\tilde{\Phi}^b$, quest'ultimo essendo un insieme debolmente chiuso e limitato per (*i*), quindi debolmente compatto. La famiglia $(E_i)_{i\in I}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque esiste

$$\bar{x} \in \bigcap_{i\in I} E_i.$$

Fissiamo $\bar{y} \in X$, quindi scegliamo $i \in I$ t.c. $\bar{x}, \bar{y} \in X_i$. Poiché $\bar{x} \in E_i$, esiste una successione (x_n) in D_i t.c. $x_n \rightharpoonup \bar{x}$. Inoltre, per definizione di D_i si ha

$$\limsup_n \langle \Phi'(x_n), x_n - \bar{x}\rangle \leqslant 0.$$

Per la proprietà $(S)_+$ di Φ' abbiamo $x_n \to \bar{x}$, da cui $\bar{x} \in \Phi_a^b$, D'altra parte, per demiconitnuità segue $\Phi'(x_n) \rightharpoonup \Phi'(\bar{x})$. Abbiamo dunque

$$\langle \Phi'(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \lim_n \langle \Phi'(x_n), \bar{y} \rangle = 0.$$

Poiché $\bar{y} \in X$ è arbitrario, concludiamo che $\Phi'(\bar{x}) = 0$, contro *(iii)*. Questo prova (3.2).

A questo punto possiamo applicare il Lemma 3.6, ricavando per ogni $i \in I$, $i_0 \preceq i$

$$\deg_B(\Phi_i', \tilde{\Phi}^b \cap X_i, 0) = 1.$$

Per il Lemma 3.12 ne segue

$$\deg(\Phi', \tilde{\Phi}^b, 0) = 1,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Il Lemma 3.15 si può considerare un analogo del Secondo lemma di deformazione (Lemma 2.38), nel senso che esso descrive le proprietà topologiche dell'insieme dei punti critici (soluzioni dell'equazione $\Phi'(x) = 0$) sulla base di informazioni su un intervallo $[a, b]$ *privo* di valori critici.

Calcoliamo adesso il grado, su una palla di raggio abbastanza grande, del gradiente di un funzionale coercivo:

Teorema 3.16. ⋆ *Sia $\Phi \in C^1(X)$ coercivo, t.c. $\Phi' \in C(X, X)$ è un operatore demicontinuo di classe $(S)_+$, e $K(\Phi)$ è limitato. Allora esiste $\rho_0 > 0$ t.c. per ogni $\rho \geqslant \rho_0$*

$$\deg(\Phi', B_\rho(0), 0) = 1.$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $\bar{\rho} > 0$ t.c.

$$K(\Phi) \subset B_{\bar{\rho}}(0).$$

Scegliamo dunque

$$a > \sup_{x \in B_{\bar{\rho}}(0)} \Phi(x), \ \ \rho_0 = \sup_{x \in \Phi^a} \|x\|.$$

Fissato $\rho \geqslant \rho_0$, sia

$$b > \max\Big\{a, \sup_{x \in B_\rho(0)} \Phi(x)\Big\}.$$

Ricorrono tutte le ipotesi del Lemma 3.15. Infatti, per coercività di Φ l'insieme $\tilde{\Phi}^b$ è limitato *(i)*, per costruzione si ha $\Phi^a \subseteq B_\rho(0) \subseteq \tilde{\Phi}^b$ *(ii)*, e per ogni $x \in \Phi_a^b$ si ha in particolare $\|x\| \geqslant \bar{\rho}$, da cui $\Phi'(x) \neq 0$ *(iii)*. Dunque abbiamo

$$\deg(\Phi', \tilde{\Phi}^b, 0) = 1.$$

Sia ora

$$C = \overline{\tilde{\Phi}^b} \setminus B_\rho(0),$$

insieme chiuso t.c. $\Phi'(x) \neq 0$ per ogni $x \in C$. Per la Proposizione 3.14 *(iv)* (escissione) abbiamo

$$\begin{aligned}\deg(\Phi', B_\rho(0), 0) &= \deg(\Phi', \tilde{\Phi}^b \setminus C, 0) \\ &= \deg(\Phi', \tilde{\Phi}^b, 0) = 1,\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Il seguente risultato consente, specularmente, di calcolare il grado di un gradiente su una palla di raggio abbastanza piccolo, centrata in un punto di minimo del potenziale:

Teorema 3.17. ⋆ (Rabinowitz) *Siano $\Phi \in C^1(X)$ t.c. $\Phi' \in C(X, X)$ è un operatore demicontinuo di classe $(S)_+$, $x_0 \in X$ un punto di minimo locale e punto critico isolato di Φ. Allora esiste $\rho_0 > 0$ t.c. per ogni $\rho \in (0, \rho_0]$*

$$\deg(\Phi', B_\rho(x_0), 0) = 1.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo $\Phi(x_0) = 0$. In quanto punto critico isolato, x_0 è sede di un minimo locale *proprio* di Φ. Dunque esiste $\bar{\rho} > 0$ t.c. per ogni $x \in \overline{B}_{\bar{\rho}}(x_0) \setminus \{x_0\}$ si ha

$$\Phi(x) > 0, \ \Phi'(x) \neq 0.$$

Fissiamo $\rho \in (0, \bar{\rho}]$ e poniamo

$$S_\rho = \overline{B}_{\bar{\rho}}(x_0) \setminus B_\rho(x_0),$$

un sotto-insieme chiuso (quindi completo) di X. Proviamo che

$$\inf_{x \in S_\rho} \Phi(x) = m_\rho > 0. \tag{3.3}$$

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista una successione (x_n) in S_ρ t.c. $\Phi(x_n) \to 0$. Per il Principio variazionale di Ekeland (ved. Teorema 2.15, Corollario 2.17), per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ troviamo $y_n \in S_\rho$ t.c.

$$\Phi(y_n) \leqslant \Phi(x_n) + \frac{1}{n}, \ \|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}, \ \|\Phi'(y_n)\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Per riflessività di X, passando se necessario a una sotto-successione abbiamo $y_n \rightharpoonup \bar{y}$, inoltre

$$\limsup_n \langle \Phi'(y_n), y_n - \bar{y} \rangle \leqslant 0.$$

Per la proprietà $(S)_+$ di Φ' abbiamo $y_n \to \bar{y}$, da cui $\bar{y} \in S_\rho$ (in particolare, $\bar{y} \neq x_0$) e insieme

$$\Phi(\bar{y}) = \lim_n \Phi(y_n) = 0,$$

assurdo. Dunque (3.3) è provata.

In virtù della proprietà di dipendenza dalla frontiera (Proposizione 3.14 *(vi)*), possiamo assumere che $\Phi(x) > m_{\bar{\rho}}$ per ogni $x \in X \setminus \overline{B}_{\bar{\rho}}(x_0)$. Applichiamo ora il Lemma 3.15. Poniamo $b = m_{\bar{\rho}/2} > 0$ (per (3.3)), così che l'insieme

$$\tilde{\Phi}^b = \{x \in B_{\rho_0}(x_0) : \Phi(x) < b\}$$

è aperto e limitato *(i)*. Scegliamo $\rho_0 \in (0, \bar{\rho}/2)$ t.c. $\overline{B}_{\rho_0}(x_0) \subset \tilde{\Phi}^b$. Quindi, per ogni $\rho \in (0, \rho_0]$, in forza di (3.3) scegliamo $a \in (0, m_\rho)$. Si ha allora

$$\Phi^a = \{x \in B_{\rho_0}(x_0) : \Phi(x) \leqslant a\} \subseteq B_\rho(x_0) \subseteq \tilde{\Phi}^b,$$

ovvero vale *(ii)*. Infine, per costruzione di $\bar{\rho} > 0$ abbiamo $\Phi'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Phi^b_a$ *(iii)*. Per il Lemma 3.15 abbiamo

$$\deg(\Phi', \tilde{\Phi}^b, 0) = 1.$$

Definiamo infine l'insieme chiuso

$$C = \overline{\tilde{\Phi}^b} \setminus B_\rho(x_0),$$

t.c. $\Phi'(x) \neq 0$ per ogni $x \in C$, e applichiamo la proprietà di escissione (Proposizione 3.14 *(iv)*) ottenendo

$$\begin{aligned} \deg(\Phi', B_\rho(0), 0) &= \deg(\Phi', \tilde{\Phi}^b \setminus C, 0) \\ &= \deg(\Phi', \tilde{\Phi}^b, 0) = 1, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Esercizio 3.18. Siano $A, B \in C(\overline{U}, X)$ operatori demicontinui di classe $(S)_+$, e sia per ogni $(t, x) \in [0, 1] \times \overline{U}$

$$h(t, x) = (1 - t)A(x) + tB(x).$$

Dimostrare che $h : [0, 1] \times \overline{U} \to X$ è una omotopia di classe $(S)_+$.

Esercizio 3.19. Dimostrare la Proposizione 3.14 usando la Proposizione 3.3.

Esercizio 3.20. Sia $\Phi \in C^1(X)$ coercivo, t.c. Φ' è un operatore continuo di classe $(S)_+$. Dimostrare che Φ è sequenzialmente debolmente semi-continuo inferiormente.

4. Il problema di Dirichlet non lineare

Una dimostrazione matematica moderna non è molto differente
da una moderna macchina, o da un moderno collaudo:
i semplici principi fondamentali sono nascosti e quasi invisibili
sotto una massa di dettagli tecnici.
H. Weyl

In questa sezione presentiamo una classe di EDP ellittiche non lineari e alcuni risultati tecnici ad essa riferiti, precisando quanto accennato nella Sezione 1 (rimandiamo a [12, 13] per le definizioni di base, a [1, 7] per una trattazione più approfondita). Introduciamo il *problema di Dirichlet* omogeneo per un'EDP ellittica non lineare:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

Le ipotesi sui dati del problema (4.1) sono le seguenti. Il dominio (aperto connesso) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 3$) è limitato con frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ di classe C^2, l'operatore laplaciano è definito per ogni funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ abbastanza regolare da

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

La reazione (o nonlinearità) è soggetta alla seguente ipotesi elementare:

$\mathbf{H}_0$ $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ed esistono $c_0 > 0$, $r \in (2, 2^*)$ t.c. per ogni $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$

$$|f(x,t)| \leqslant c_0\big(1 + |t|^{r-1}\big).$$

Ricordiamo che $2^* = 2N/(N-2)$ denota l'esponente critico di Sobolev (ved. [12]). La condizione $\mathbf{H}_0$ impone a $f(x,\cdot)$ una crescita *sub-critica*.

Osservazione 4.1. Le ipotesi adottate sopra non sono ottimali, ma scelte per semplicità. Infatti, la maggior parte dei risultati seguenti si può estendere ai casi in cui Ω è illimitato o di minore regolarità, o anche alle dimensioni $N \leqslant 2$. Anche in luogo dell'operatore Δ si può prendere in esame un operatore ellittico lineare in forma di divergenza del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

dove $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$ ($i, j = 1, \dots N$) ed esiste $\alpha > 0$ t.c. per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ è verificata la seguente *condizione di uniforme ellitticità* (ved. [13]):

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2.$$

Anche l'ipotesi $\mathbf{H}_0$ non è ottimale: alcuni risultati si estendono al caso $r = 2^*$ o a quello in cui $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una *funzione di Caratheodory*, ovvero $f(\cdot, t)$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $f(x,\cdot)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$ (ved. [9, 16]).

La nozione di *soluzione* per il problema di Dirichlet è delicata:

Definizione 4.2. *Una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è detta soluzione classica di (4.1) se*

(*i*) $-\Delta u(x) = f(x, u(x))$ *per ogni* $x \in \Omega$;
(*ii*) $u(x) = 0$ *per ogni* $x \in \Gamma$.

Tuttavia, la Definizione 4.2 può risultare 'troppo ambiziosa' e non si adatta ai nostri metodi. Come nel caso lineare (ved. [13]), adottiamo una nozione di soluzione più generale[3]:

Definizione 4.3. *Una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ è detta soluzione debole di (4.1) se per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi \, dx.$$

Come sappiamo (ved. [12]), $H^1_0(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile con prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

e corrispondente norma $\|u\| = \|\nabla u\|_2$, il cui duale è denotato $H^{-1}(\Omega)$. Inoltre $C^\infty_c(\Omega)$ è un sottospazio denso di $H^1_0(\Omega)$. Ricordiamo anche che per ogni $q \in [1, 2^*)$ l'immersione $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è continua e compatta, in particolare esiste $c_q > 0$ t.c. per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$

$$\|u\|_q \leqslant c_q \|u\|. \tag{4.2}$$

Esaminiamo ora la relazione fra le Definizioni 4.2 e 4.3:

Lemma 4.4. *Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una soluzione classica di (4.1). Allora u è una soluzione debole.*

Dimostrazione. In primo luogo osserviamo che, poiché Ω è limitato, si ha $u \in L^2(\Omega)$ e $\partial u/\partial x_i \in L^2(\Omega)$ $(i = 1, \dots N)$, da cui $u \in H^1(\Omega)$. Inoltre, dalla Definizione 4.2 *(ii)* segue $u \in H^1_0(\Omega)$ (ved. [12]). Per il Teorema di Gauß e per la Definizione 4.2 *(i)*, abbiamo per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_\Omega \Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi \, dx. \tag{4.3}$$

Proviamo ora che $f(\cdot, u) \in L^{r'}(\Omega)$. Infatti, per $\mathbf{H}_0$ e (4.2) $(q = r)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x,u)|^{r'} \, dx &\leqslant \int_\Omega c_0^{r'} (1 + |u|^{r-1})^{r'} \, dx \\ &\leqslant C\big(1 + \|u\|_r^{r-1}\big) \\ &\leqslant C\big(1 + \|u\|^{r-1}\big) < \infty. \end{aligned}$$

Da $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ e dal Teorema di rappresentazione di Riesz [3, Theorem 4.11] segue $L^{r'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Dunque $f(\cdot, u) \in H^{-1}(\Omega)$. Poiché $C^\infty_c(\Omega)$ è un sottospazio denso di $H^1_0(\Omega)$, possiamo estendere (4.3) a ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, vedendo così che u soddisfa la Definizione 4.3. □

L'inverso del Lemma 4.4 non vale in generale, e il passaggio da una soluzione debole a una classica coinvolge la *teoria della regolarità* (ved. [7]). Non svolgeremo qui questo complesso argomento, limitandoci a qualche sommario accenno. Cominciamo col dimostrare che le soluzioni deboli di (4.1) sono limitate e soddisfano opportune *stime a priori* in Ω:

Lemma 4.5. (Moser) *Siano f soddisfacente $\mathbf{H}_0$, $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione debole di (4.1). Allora:*

(i) $u \in L^\infty(\Omega)$*;*
(ii) *per ogni $\theta \in (r, 2^*)$ esiste $C_\theta > 0$ (indipendente da u) t.c.*

$$\|u\|_\infty \leqslant C_\theta (1 + \|u\|_\theta)^{\frac{\theta-2}{\theta-r}}.$$

[3]Nel seguito, scrivendo *soluzione* spesso intenderemo una soluzione debole.

Dimostrazione. Seguiamo una tecnica detta *iterazione di Moser* (ved. [16, Theorem 8.4]). Supponiamo $u^+ \neq 0$ e fissiamo $\theta \in (r, 2^*)$. Proviamo innanzitutto che esiste $C_\theta > 0$[4] t.c. per ogni $\kappa > 0$

$$1 + \int_\Omega (u^+)^{\theta(\kappa+1)}\, dx \leqslant C_\theta(\kappa+1)^\theta \Big[1 + \int_\Omega (u^+)^{2\kappa+r}\, dx\Big]^{\frac{\theta}{2}}. \tag{4.4}$$

Fissato $\mu > 0$, definiamo $v_\mu \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ponendo per ogni $x \in \Omega$

$$v_\mu(x) = \min\{u^+(x),\, \mu\}.$$

Usiamo allora $v_\mu^{2\kappa+1} \in H^1_0(\Omega)$ come test nella Definizione 4.3:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v_\mu^{2\kappa+1})\, dx = \int_\Omega f(x,u) v_\mu^{2\kappa+1}\, dx.$$

Consideriamo il secondo membro dell'eguaglianza e usiamo $\mathbf{H}_0$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,u) v_\mu^{2\kappa+1}\, dx &\leqslant \int_{\{0<u<\mu\}} C\big(1+u^{r-1}\big)u^{2\kappa+1}\, dx \\ &\leqslant C\Big[1 + \int_\Omega (u^+)^{2\kappa+r}\, dx\Big].\end{aligned}$$

Operiamo ora sul primo membro dell'eguaglianza precedente, ricordando che $\nabla v_\mu = 0$ dove $u \leqslant 0$ o $u \geqslant \mu$, mentre altrove $\nabla v_\mu^\alpha = \alpha v_\mu^{\alpha-1}\nabla v_\mu$ ($\alpha \geqslant 1$):

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v_\mu^{2\kappa+1})\, dx &= (2\kappa+1)\int_\Omega |\nabla v_\mu|^2 v_\mu^{2\kappa}\, dx \\ &= \frac{2\kappa+1}{(\kappa+1)^2}\int_\Omega |\nabla(v_\mu^{\kappa+1})|^2\, dx \\ &\geqslant \frac{1}{(\kappa+1)^2}\int_\Omega |\nabla(v_\mu^{\kappa+1})|^2\, dx.\end{aligned}$$

Collegando queste diseguaglianze otteniamo

$$\int_\Omega |\nabla(v_\mu^{\kappa+1})|^2\, dx \leqslant C(\kappa+1)^2\Big[1 + \int_\Omega (u^+)^{2\kappa+r}\, dx\Big].$$

Per (4.2) (con $q = \theta$) abbiamo

$$\int_\Omega v_\mu^{\theta(\kappa+1)}\, dx \leqslant C_\theta(\kappa+1)^\theta\Big[1 + \int_\Omega (u^+)^{2\kappa+r}\, dx\Big]^{\frac{\theta}{2}}.$$

Passando al limite per $\mu \to \infty$, e sostituendo C_θ con $C_\theta + 1$, otteniamo (4.4). Poniamo ora

$$\alpha = \frac{r-2}{\theta-2}\theta \in (0,\theta),$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \alpha + \Big(\frac{\theta}{2}\Big)^n(\theta-\alpha).$$

Si vede facilmente che (q_n) è una successione crescente t.c. $q_n \to \infty$, definita equivalentemente dalle formule ricorsive (qui comincia l'iterazione vera e propria)

$$\begin{cases} q_0 = \theta \\ q_{n+1} = \dfrac{\theta}{2}(q_n - r + 2). \end{cases}$$

[4] C_θ cambierà valore diverse volte, ma rimane indipendente dalla soluzione u.

Proviamo ora che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\Big[1+\int_\Omega (u^+)^{q_n}\,dx\Big]^{\frac{1}{q_n}} \leqslant C_\theta(1+\|u\|_\theta)^{\frac{\theta-2}{\theta-r}}. \tag{4.5}$$

A tal fine poniamo

$$R_n = \Big[1+\int_\Omega (u^+)^{q_n}\,dx\Big]^{\frac{1}{q_n}},$$

e osserviamo in primo luogo che $R_n \in (1,\infty)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, per l'immersione continua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\theta(\Omega)$ si ha

$$R_0 = \Big[1+\int_\Omega (u^+)^{\theta}\,dx\Big]^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ usiamo (4.4) con

$$\kappa = \frac{q_n - r}{2} > 0,$$

ovvero $q_n = 2\kappa + r$, $q_{n+1} = \theta(\kappa+1)$:

$$R_{n+1}^{q_{n+1}} = 1 + \int_\Omega (u^+)^{q_{n+1}}\,dx \leqslant C_\theta\Big(\frac{q_n - r + 2}{2}\Big)^\theta R_n^{\frac{q_n\theta}{2}},$$

da cui per induzione $R_n < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poniamo ancora $S_n = q_n \ln(R_n) > 0$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ dalla diseguaglianza precedente segue

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \ln\Big[1+\int_\Omega (u^+)^{q_{n+1}}\,dx\Big] \\ &\leqslant \ln(C_\theta) + \theta\ln\Big(\frac{q_n - r + 2}{2}\Big) + \frac{\theta}{2}\ln\Big[1+\int_\Omega (u^+)^{q_n}\,dx\Big] \\ &\leqslant C_\theta(n+1) + \frac{\theta}{2}S_n, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la definizione diretta di q_n. Ricordiamo la seguente formula (facilmente dimostrabile per induzione): per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\rho > 1$

$$\sum_{i=0}^n (n-i)\rho^i = \frac{\rho^{n+1} - (n+1)\rho + n}{(\rho-1)^2}. \tag{4.6}$$

Proseguiamo ora usando (4.6) (con $\rho = \theta/2$):

$$\begin{aligned} S_n &\leqslant C_\theta \sum_{i=0}^n (n-i)\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^i + \Big(\frac{\theta}{2}\Big)^n S_0 \\ &= C_\theta \frac{(\theta/2)^{n+1} - (n+1)\theta/2 + n}{(\theta/2-1)^2} + \Big(\frac{\theta}{2}\Big)^n \ln\Big[1+\int_\Omega (u^+)^\theta\,dx\Big] \\ &\leqslant \Big(\frac{\theta}{2}\Big)^n \ln\big[C_\theta(1+\|u\|_\theta^\theta)\big]. \end{aligned}$$

Ovvero,

$$R_n \leqslant \frac{(\theta/2)^n \ln\big[C_\theta(1+\|u\|_\theta^\theta)\big]}{\alpha + (\theta/2)^n(\theta-\alpha)} \leqslant \frac{\ln\big[C_\theta(1+\|u\|_\theta)^\theta\big]}{\theta-\alpha}.$$

Tornando indietro e ricordando la definizione di α, otteniamo

$$R_n \leqslant C_\theta(1+\|u\|_\theta)^{\frac{\theta-2}{\theta-r}},$$

da cui (4.5). L'ultimo passo consiste nel passare al limite per $n \to \infty$. Fissiamo $w \in L^1(\Omega)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$ poniamo

$$w_n(x) = \begin{cases} |w(x)| & \text{se } |w(x)| \leqslant 1 \\ |w(x)|^{\frac{1}{q_n'}} & \text{se } |w(x)| > 1. \end{cases}$$

Chiaramente si ha

$$\int_\Omega w_n^{q_n'}\,dx = \int_{\{|w|\leqslant 1\}} |w|^{q_n'}\,dx + \int_{\{|w|>1\}} |w|\,dx \leqslant \|w\|_1,$$

così $w_n \in L^{q_n'}(\Omega)$. Osserviamo che (q_n') è una successione decrescente t.c. $q_n' \to 1^+$, similmente si vede che (w_n) è decrescente e $w_n \to w$ q.o. in Ω. Per (4.5) abbiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ $u^+ \in L^{q_n}(\Omega)$ con

$$\|u^+\|_{q_n} \leqslant C_\theta(1 + \|u\|_\theta)^{\frac{\theta-2}{\theta-r}}.$$

Per la diseguaglianza di Hölder,

$$\int_\Omega u^+ w_n\,dx \leqslant \|u^+\|_{q_n}\|w_n\|_{q_n'} \leqslant C_\theta(1 + \|u\|_\theta)^{\frac{\theta-2}{\theta-r}}\|w\|_1^{\frac{1}{q_n'}}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ e applicando il Teorema di Beppo Levi sulla convergenza monotona [3, Theorem 4.1], otteniamo per ogni $w \in L^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u^+ w\,dx \leqslant C_\theta(1 + \|u\|_\theta)^{\frac{\theta-2}{\theta-r}}\|w\|_1.$$

Dunque $u^+ \in (L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ con

$$\|u^+\|_\infty \leqslant C_\theta(1 + \|u\|_\theta)^{\frac{\theta-2}{\theta-r}}$$

(ved. [3, Theorem 4.14]). Similmente, operando sulla soluzione debole $v = -u \in H_0^1(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = -f(x, -v) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases}$$

si vede che $u^- = v^+ \in L^\infty(\Omega)$ con

$$\|u^-\|_\infty \leqslant C_\theta(1 + \|u\|_\theta)^{\frac{\theta-2}{\theta-r}}.$$

Unendo queste relazioni otteniamo (i), (ii). □

Osservazione 4.6. Vi sono molte varianti del Lemma 4.5, anche per il caso $r = 2^*$ in $\mathbf{H}_0$, tuttavia in tale caso si perde la stima uniforme: ossia, vale (i) ma non (ii) (ved. [21]).

Il Lemma 4.5 costituisce la base per la 'regolarizzazione' delle soluzioni deboli di (4.1). Per cominciare osserviamo che, se $u \in H_0^1(\Omega)$ è una soluzione debole di (4.1), dal Lemma 4.5 e da $\mathbf{H}_0$ segue $f(\cdot, u) \in L^\infty(\Omega)$, in particolare $f(\cdot, u) \in L^2(\Omega)$ con

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x,u)|^2\,dx &\leqslant \int_\Omega C(1 + |u|^{r-1})^2\,dx \\ &\leqslant C\big(1 + \|u\|_\infty^{2r-2}\big) \\ &\leqslant C(1 + \|u\|)^{\frac{2(r-1)(\theta-2)}{\theta-r}}, \end{aligned}$$

con $\theta \in (r, 2^*)$ (abbiamo anche usato (4.2)). Ricordiamo che Γ è di classe C^2, dunque come visto in [13] si ha $u \in H^2(\Omega)$. Pertanto, dalla Definizione 4.3 segue per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi\,dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx,$$

ovvero per q.o. $x \in \Omega$
$$-\Delta u = f(x,u).$$
Questo *non* implica che u sia una soluzione classica di (4.1), in generale. Per recuperare una soluzione classica occorre fare ipotesi più restrittive sui dati del problema:

Teorema 4.7. *Siano $m > N/2$, Γ di classe C^{m+2}, $f \in C^m(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ soddisfacente $\mathbf{H}_0$, $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione debole di (4.1). Allora u è una soluzione classica di (4.1).*

Dimostrazione. Da [3, Theorem 9.25] (ved. anche [13]) segue $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dalle relazioni precedenti, si vede allora che u verifica la Definizione 4.2 *(i) (ii)*. □

In questa esposizione, ci limiteremo a studiare l'esistenza di soluzioni deboli, rimandando al Teorema 4.7 per la regolarità.

Osservazione 4.8. Un modo alternativo di procedere è basato sulle *stime di Schauder*. Supponiamo che esista $\alpha \in (0,1)$ t.c. Γ è di classe $C^{2,\alpha}$, $f(\cdot,t) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$: allora, per [3, Theorems 9.33, 9.34] ogni soluzione debole u di (4.1) soddisfa $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, da cui segue che u è soluzione classica di (4.1).

I seguenti risultati riguardano le proprietà di segno e ordinamento delle soluzioni deboli:

Teorema 4.9. (principio del massimo) *Siano f soddisfacente $\mathbf{H}_0$ t.c. per ogni $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$*
$$f(x,t) \geqslant 0.$$
Sia inoltre $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione debole di (4.1). Allora $u \geqslant 0$ in Ω.

Dimostrazione. Poniamo $\varphi = -u^- \in H^1_0(\Omega)$ nella Definizione 4.3:
$$\|u^-\|^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(-u^-)\,dx = \int_{\{u<0\}} f(x,u)u\,dx \leqslant 0,$$
da cui $u^- = 0$. Dunque $u \geqslant 0$ in Ω. □

Teorema 4.10. (principio del confronto) *Siano $u, v \in H^1_0(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$ in Ω*
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx \leqslant \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi\,dx.$$
Allora $u \leqslant v$ in Ω.

Dimostrazione. Poniamo $\varphi = (u-v)^+ \in H^1_0(\Omega)$ nell'ipotesi:
$$\begin{aligned}\|(u-v)^+\|^2 &= \int_\Omega \nabla(u-v) \cdot \nabla(u-v)^+\,dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u-v)^+\,dx - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(u-v)^+\,dx \leqslant 0,\end{aligned}$$
da cui $u \leqslant v$ in Ω. □

Osservazione 4.11. I principi visti sopra sono detti *deboli*. In effetti si dimostra che, nel Teorema 4.9, se $u \neq 0$ allora $u > 0$ in Ω; e che, nel Teorema 4.10, se $u \neq v$ allora $u < v$ in Ω (ved. [16]).

Esercizio 4.12. Dimostrare (4.6).

Esercizio 4.13. Sia (u_n) una successione di soluzioni di (4.1), limitata in $H^1_0(\Omega)$. Usando il Lemma 4.5, dimostrare che (u_n) è uniformemente limitata in Ω (a meno di un insieme di misura nulla).

Esercizio 4.14. Sia u una soluzione debole di (4.1): dimostrare che per ogni $\theta \in (r, 2^*)$ si ha
$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C_\theta(1 + \|u\|)^{\frac{(r-1)(\theta-2)}{2^*-2}}.$$

Esercizio 4.15. Svolgere la teoria di questa sezione per il *problema di Neumann non lineare*:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

4.1. **Autovalori e autofunzioni.** Nello studio del problema non lineare (4.1), può essere utile fare riferimento a un problema lineare collegato. Sia $m \in C(\overline{\Omega})$ t.c. $m > 0$ in $\overline{\Omega}$, consideriamo il seguente problema di Dirichlet dipendente dal parametro $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x) u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4.7}$$

Le soluzioni di (4.7) sono le funzioni $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega m(x) u \varphi \, dx \tag{4.8}$$

(osserviamo che il secondo membro è ben definito perché $m \in L^\infty(\Omega)$). Ovviamente 0 risolve (4.7) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Diremo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un *autovalore* di (4.7) se esiste una soluzione $u \neq 0$, che è allora detta una *autofunzione* associata a λ (o λ-autofunzione). Le λ-autofunzioni formano un sotto-spazio di $H_0^1(\Omega)$ detto *autospazio* associato a λ. Chiaramente la reazione

$$(x,t) \mapsto \lambda m(x) t$$

verifica $\mathbf{H}_0$, quindi per le autofunzioni valgono il Lemma 4.5 e il Teorema 4.7. Il caso $m = 1$ è stato studiato in [13], mentre per un approccio generale alla teoria spettrale rimandiamo a [9, Section 6.1]. Nello studio di questo problema conviene introdurre lo spazio $L_m^2(\Omega)$, ovvero $L^2(\Omega)$ con il prodotto scalare alternativo

$$\langle u, v \rangle_m = \int_\Omega m(x) uv \, dx$$

e la corrispondente norma $\| \cdot \|_{2,m}$ (ved. [11]). Premettiamo ai risultati principali un lemma tecnico (che si dimostra come in [13]):

Lemma 4.16. *Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda \neq \mu$) autovalori di (4.7) e $u, v \in H_0^1(\Omega)$ autofunzioni associate rispettivamente a λ, μ. Allora*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega m(x) uv \, dx = 0.$$

Introduciamo ora un risultato di struttura per gli autovalori di (4.7):

Proposizione 4.17. *Sia $m \in C(\overline{\Omega})$ t.c. $m > 0$ in $\overline{\Omega}$. Allora gli autovalori di (4.7) formano una successione*

$$0 < \lambda_1(m) < \lambda_2(m) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(m) \leqslant \ldots \to \infty,$$

e per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ $\hat{u}_k(m) \in H_0^1(\Omega)$ è un'autofunzione associata a $\lambda_k(m)$ t.c. $\|\hat{u}_k(m)\|_{2,m} = 1$. Inoltre:

(i) *$\lambda_1(m)$ è semplice, con autofunzioni di segno costante e*

$$\lambda_1(m) = \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2,m}^2};$$

(ii) *per ogni $k \geqslant 2$, $\lambda_2(m)$ ha un autospazio di dimensione finita, autofunzioni nodali[5] in Ω, e*

$$\lambda_k(m) = \min_{u \in L_{k-1}^\perp(m) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2,m}^2}, \ L_{k-1}(m) = \operatorname{span}\big(\hat{u}_1(m), \ldots \hat{u}_{k-1}(m)\big);$$

[5] Una funzione misurabile è detta *nodale* se cambia segno nel suo dominio, a meno di un insieme di misura nulla.

(iii) $(\hat{u}_k(m))$ *è una base ortogonale di* $H^1_0(\Omega)$ *e una base ortonormale di* $L^2_m(\Omega)$.

Dimostrazione. Proviamo *(i)*. Definiamo una varietà di classe C^1 in $H^1_0(\Omega)$ ponendo

$$\mathcal{M} = \big\{u \in H^1_0(\Omega) : \|u\|^2_{2,m} = 1\big\},$$

e stabiliamo la seguente definizione (equivalente alla tesi):

$$\lambda_1(m) = \inf_{u\in\mathcal{M}} \|u\|^2.$$

Sia (u_n) una successione in $\mathcal{M}$ t.c. $\|u_n\|^2 \to \lambda_1(m)$. Allora (u_n) è limitata, quindi passando a una sotto-successione abbiamo $u_n \rightharpoonup \hat{u}_1(m)$ in $H^1_0(\Omega)$, $u_n \to \hat{u}_1(m)$ in $L^2_m(\Omega)$ (ved. Esercizio 4.19). In particolare $\hat{u}_1(m) \in \mathcal{M}$ e per convessità

$$\|\hat{u}_1(m)\|^2 \leqslant \liminf_n \|u_n\|^2,$$

da cui $\|\hat{u}_1(m)\|^2 = \lambda_1(m) > 0$. Come nella Proposizione 2.7 si vede che $\hat{u}_1(m)$ è un punto critico per la restrizione a $\mathcal{M}$ del funzionale $u \mapsto \|u\|^2$. Per la regola dei moltiplicatori di Lagrange (e per l'Esempio 2.3), esiste $\mu \in \mathbb{R}$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla\hat{u}_1(m)\cdot\nabla\varphi\,dx = \mu\int_\Omega m(x)\hat{u}_1(m)\varphi\,dx$$

(cioè $\hat{u}_1(m)$ risolve (4.8) con $\lambda = \mu$). Ponendo $\varphi = \hat{u}_1(m)$, si ha

$$\lambda_1(m) = \|\hat{u}_1(m)\|^2 = \mu\|\hat{u}_1(m)\|^2_{2,m} = \mu.$$

Dunque $\lambda_1(m) > 0$ è un autovalore di (4.7) e $\hat{u}_1(m)$ una $\lambda_1(m)$-autofunzione. Consideriamo ora $|\hat{u}_1(m)| \in \mathcal{M}$, chiaramente si ha

$$\||\hat{u}_1(m)|\|^2 = \lambda_1(m),$$

da cui come sopra discende che $|\hat{u}_1(m)|$ è una $\lambda_1(m)$-autofunzione. Possiamo pertanto assumere $\hat{u}_1(m) \geqslant 0$ in Ω. Proviamo ora che $\pm\hat{u}_1(m)$ sono le uniche $\lambda_1(m)$-autofunzioni in $\mathcal{M}$. Infatti, sia $u \in \mathcal{M}\setminus\{\pm\hat{u}_1(m)\}$ una $\lambda_1(m)$-autofunzione, senza perdita di generalità possiamo assumere che $u \geqslant 0$ in Ω. Anche

$$v = u - \hat{u}_1(m) \in H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}$$

è una $\lambda_1(m)$-autofunzione, e ancora supponiamo $v \geqslant 0$ in Ω, cioè $u \geqslant \hat{u}_1(m)$ in Ω. Si ha allora

$$0 < \int_\Omega m(x)(u^2 - \hat{u}_1(m)^2)\,dx = \|u\|^2_{2,m} - \|\hat{u}_1(m)\|^2_{2,m} = 0,$$

assurdo. Dunque, $\lambda_1(m)$ è semplice con autospazio

$$L_1(m) = \mathrm{span}(\hat{u}_1(m)).$$

Proviamo ora *(ii)*, per induzione. Supponiamo che $k \geqslant 2$, $\lambda_1(m),\dots\lambda_{k-1}(m)$ e le relative autofunzioni $\hat{u}_1(m),\dots\hat{u}_{k-1}(m) \in \mathcal{M}$ siano definite, quindi poniamo

$$\mathcal{M}_k = \big\{u \in L^\perp_{k-1}(m) : \|u\|^2_{2,m} = 1\big\}.$$

Come sopra si vede che

$$\lambda_k(m) = \min_{u\in\mathcal{M}_k} \|u\|^2 > 0$$

è un autovalore di (4.7), con autofunzione associata $\hat{u}_k(m) \in \mathcal{M}_k$ (caratterizzazione equivalente a quella della tesi). Chiaramente $L^\perp_{k-1}(m) \subset L^\perp_{k-2}(m)$, da cui $\lambda_k(m) \geqslant \lambda_{k-1}(m)$ (in particolare si ha $\lambda_2(m) > \lambda_1(m)$ per semplicità di $\lambda_1(m)$ *(i)*). Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ una $\lambda_k(m)$-autofunzione, allora da $\lambda_1(m) < \lambda_k(m)$ e dal Lemma 4.16 segue

$$\int_\Omega m(x)\hat{u}_1(m)u\,dx = 0,$$

quindi u è nodale. Proviamo ora che l'autospazio associato a $\lambda_k(m)$ ha dimensione finita, per assurdo: sia (u_n) una successione di $\lambda_k(m)$-funzioni linearmente indipendenti in $\mathcal{M}$. Per il Lemma 4.16, (u_n) giace nello spazio di Hilbert $L_{k-1}^{\perp}(m)$, dunque possiamo assumere che tale successione sia ortogonale. Abbiamo allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n\|^2 = \lambda_k(m), \ \|u_n\|_{2,m}^2 = 1$$

e per ogni $h \neq n$

$$\int_\Omega m(x) u_n u_h \, dx = 0.$$

Passando a una sotto-successione, (u_n) converge in $L_m^2(\Omega)$, quindi è una successione di Cauchy in tale spazio. Tuttavia per ogni $n \neq h$, per ortogonalità abbiamo

$$\|u_n - u_h\|_{2,m}^2 = \|u_n\|_{2,m}^2 + \|u_h\|_{2,m}^2 = 2,$$

assurdo. Oltre a *(ii)*, abbiamo quindi provato che $(\lambda_k(m))$ è non-decrescente. Essa è inoltre illimitata, altrimenti $(\hat{u}_k(m))$ sarebbe limitata in $H_0^1(\Omega)$, da cui come sopra discende una contraddizione. Pertanto $\lambda_k(m) \to \infty$.

Proviamo infine *(iii)*. Sia $u \in \mathrm{span}^{\perp}(\hat{u}_k(m))$ (rispetto al prodotto scalare di $H_0^1(\Omega)$) t.c. $\|u\|_{2,m}^2 = 1$. Esiste $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\|u\|^2 < \lambda_k(m)$, dunque per *(ii)* abbiamo $u \notin L_{k-1}^{\perp}(m)$, contro l'ipotesi. Dunque si ha

$$\mathrm{span}^{\perp}(\hat{u}_k(m)) = \{0\},$$

ovvero $(\hat{u}_k(m))$ è una base ortogonale di $H_0^1(\Omega)$ (ved. [11]). Per il Lemma 4.16 e le caratterizzazioni precedenti, $(\hat{u}_k(m))$ risulta anche una base ortonormale di $L_m^2(\Omega)$.

Per concludere, rimane da provare che non vi sono altri autovalori di (4.7) oltre ai numeri $\lambda_k(m)$. Per assurdo, sia $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\lambda_k(m))$ un autovalore, con autofunzione associata $u \in \mathcal{M}$. Per *(i)* abbiamo $\lambda_1(m) < \lambda$, quindi esiste $k \geqslant 2$ t.c.

$$\lambda_{k-1}(m) < \lambda < \lambda_k(m).$$

Da *(ii)* segue $u \notin L_{k-1}^{\perp}(m)$, ovvero esiste $h \leqslant k-1$ t.c.

$$\int_\Omega \nabla \hat{u}_h(m) \cdot \nabla u \, dx \neq 0,$$

contro il Lemma 4.16. Così la dimostrazione è conclusa. □

Se $m = 1$, denotiamo $\lambda_k = \lambda_k(1)$, $\hat{u}_k = \hat{u}_k(1)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Osserviamo che gli estremi di *(i)* *(ii)* sono raggiunti esattamente in corrispondenza alle autofunzioni, e che ogni autovalore è contato tante volte quante sono le autofunzioni linearmente indipendenti ad esso associate.

Accenniamo alla dipendenza degli autovalori dalla funzione peso (una questione sottile, collegata al problema della *continuazione unica* delle autofunzioni, che non tratteremo qui in dettaglio rimandando a [8,9]):

Proposizione 4.18. *Siano $m, \tilde{m} \in C(\overline{\Omega})$ t.c. $0 < m \leqslant \tilde{m}$ in Ω e $m \neq \tilde{m}$. Allora $\lambda_k(m) > \lambda_k(\tilde{m})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Come al solito, le ipotesi fatte su m non sono ottimali ma adottate per semplicità: la maggior parte della teoria qui esposta si generalizza a un peso $m \in L^{N/2}(\Omega)$, anche di segno variabile.

Esercizio 4.19. Dimostrare che l'immersione $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_m^2(\Omega)$ è compatta.

Esercizio 4.20. Dimostrare che le formule della Proposizione 4.17 *(ii)* sono equivalenti alle *formule di Courant-Fischer*: per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\lambda_k(m)} = \sup_{F \in \mathcal{F}_k} \inf_{u \in F,\, \|u\|=1} \int_\Omega m(x) u^2 \, dx,$$

dove $\mathcal{F}_k$ denota la famiglia dei sottospazi di $H_0^1(\Omega)$ di dimensione k.

Esercizio 4.21. Dimostrare che $\hat{u}_k(m) \in L^\infty(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

5. Metodi variazionali

Nel mondo non accade nulla che non implichi il massimo o il minimo di qualcosa.
L. Euler

In questa sezione applichiamo alcuni risultati della Sezione 2 al problema (4.1). Le ipotesi sul dominio Ω sono invariate, mentre per semplicità sostituiamo l'ipotesi $\mathbf{H}_0$ sulla reazione f con la seguente, più restrittiva:

$\mathbf{H}_1$ $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ con $f(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, ed esistono $c_1 > 0$, $r \in (2, 2^*)$ t.c. per ogni $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leqslant c_1 \big(1 + |t|^{r-2} \big).$$

Ovviamente $\mathbf{H}_1$ implica $\mathbf{H}_0$ (con un'opportuna $c_0 > 0$). Poniamo per ogni $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) \, d\tau.$$

Quindi definiamo il *funzionale dell'energia* di (4.1) ponendo per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\Phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x, u) \, dx.$$

Si ha infatti:

Lemma 5.1. *Sia f soddisfacente $\mathbf{H}_1$. Allora:*

(i) $\Phi \in C^2(H_0^1(\Omega))$;
(ii) $u \in H_0^1(\Omega)$ *è soluzione di* (4.1) *se e solo se* $u \in K(\Phi)$.

Dimostrazione. Proviamo *(i)*. Poniamo per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\Phi_1(u) = \frac{\|u\|^2}{2}, \ \ \Phi_2(u) = \int_\Omega F(x, u) \, dx.$$

Dall'Esempio 2.3 sappiamo che $\Phi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega))$ e per ogni $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle \Phi_1'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

A sua volta, come nell'Esempio 2.4 (ved. anche Definizione 2.8) questo implica $\Phi_1 \in C^2(H_0^1(\Omega))$ e per ogni $u, \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$

$$\Phi_1''(u)(\varphi, \psi) = \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx.$$

Occupiamoci ora di Φ_2. Da $\mathbf{H}_1$ segue per ogni $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$|f(x, t)| \leqslant C(1 + |t|^{r-1}), \tag{5.1}$$

e attraverso un'ulteriore integrazione

$$|F(x, t)| \leqslant C(1 + |t|^r). \tag{5.2}$$

Fissiamo ora $u \in H_0^1(\Omega)$. Per l'immersione $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ abbiamo $u \in L^r(\Omega)$, dunque per (5.2) $\Phi_2(u) \in \mathbb{R}$ è ben definito. Inoltre, per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ abbiamo per q.o. $x \in \Omega$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x, u + t\varphi) - F(x, u)}{t} = f(x, u)\varphi.$$

Per il Teorema di Lagrange, per q.o. $x \in \Omega$ e ogni $t \in (0,1)$ esiste $\tau \in (0,t)$ t.c.

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t}\Big| &= |f(x,u+\tau\varphi)\varphi| \\ &\leqslant C(1+|u+\tau\varphi|^{r-1})|\varphi| \\ &\leqslant C(1+|u|^{r-1}|\varphi|+|\varphi|^r)\end{aligned}$$

(abbiamo usato anche (5.1)), e quest'ultima funzione, indipendente da $t \in (0,1)$, appartiene a $L^1(\Omega)$. Dunque, per il Teorema della convergenza dominata [3, Theorem 4.2] abbiamo

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi_2(u+t\varphi)-\Phi_2(u)}{t} = \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx.$$

Così Φ_2 è derivabile secondo Gâteaux. Inoltre Φ_2' è un operatore continuo. Infatti, se $u_n \to u$ in $H^1_0(\Omega)$, per immersione continua abbiamo $u_n \to u$ in $L^r(\Omega)$, da cui $u_n(x) \to u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ ed esiste $h \in L^r(\Omega)$ t.c. $|u_n| \leqslant h$ in Ω per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque abbiamo $f(x,u_n) \to f(x,u)$ per q.o. $x \in \Omega$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ da (5.1) segue

$$|f(x,u_n)| \leqslant C(1+h(x)^{r-1}),$$

e quest'ultima funzione appartiene a $L^{r'}(\Omega)$. Ancora per [3, Theorem 4.2] abbiamo $f(\cdot,u_n) \to f(\cdot,u)$ in $L^{r'}(\Omega)$, da cui per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ con $\|\varphi\| \leqslant 1$

$$\begin{aligned}\big|\langle\Phi_2'(u_n)-\Phi_2'(u),\varphi\rangle\big| &\leqslant \int_\Omega \big|f(x,u_n)-f(x,u)\big||\varphi|\,dx \\ &\leqslant \|f(\cdot,u_n)-f(\cdot,u)\|_{r'}\|\varphi\|_r \\ &\leqslant C\|f(\cdot,u_n)-f(\cdot,u)\|_{r'}\|\varphi\|_r.\end{aligned}$$

Dunque $\Phi_2'(u_n) \to \Phi_2'(u)$ in $H^1_0(\Omega)$ (o equivalentemente in $H^{-1}(\Omega)$. Allora $\Phi_2 \in C^1(H^1_0(\Omega))$ e per ogni $u,\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\langle\Phi_2'(u),\varphi\rangle = \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx.$$

Ragionando analogamente e usando direttamente $\mathbf{H}_0$ si vede che $\Phi_2 \in C^2(H^1_0(\Omega))$ e per ogni $u,\varphi,\psi \in H^1_0(\Omega)$

$$\Phi_2''(u)(\varphi,\psi) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\varphi\psi\,dx.$$

Le relazioni provate finora implicano che

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 \in C^2(H^1_0(\Omega)).$$

Inoltre, per ogni $u,\varphi,\psi \in H^1_0(\Omega)$ si ha

$$\langle\Phi'(u),\varphi\rangle = \int_\Omega \big[\nabla u\cdot\nabla\varphi - f(x,u)\varphi\big]\,dx, \tag{5.3}$$

$$\Phi''(u)(\varphi,\psi) = \int_\Omega \Big[\nabla\varphi\cdot\nabla\psi - \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\varphi\psi\Big]\,dx. \tag{5.4}$$

Ricordando la Definizione 4.3, vediamo infine che per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$, u è soluzione (debole) di (4.1) se e solo se $\Phi'(u) = 0$. □

Osservazione 5.2. Dalla dimostrazione del Lemma 5.1 si deduce che, anche se f verifica $\mathbf{H}_0$, si ha $\Phi \in C^1(H^1_0(\Omega))$ con derivata definita da (5.3), inoltre vale *(ii)*.

Vediamo ora alcune proprietà del funzionale Φ:

Lemma 5.3. *Sia f verificante $\mathbf{H}_1$. Allora Φ è sequenzialmente debolmente semi-continuo inferiormente in $H^1_0(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia (u_n) una successione t.c. $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1_0(\Omega)$. Dimostriamo che

$$\liminf_n \Phi(u_n) \geqslant \Phi(u).$$

Procediamo per assurdo, supponendo che esistano una sotto-successione, ancora denotata (u_n), e $\varepsilon > 0$ t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi(u_n) < \Phi(u) - \varepsilon. \tag{5.5}$$

Per convessità abbiamo

$$\liminf_n \frac{\|u_n\|^2}{2} \geqslant \frac{\|u\|^2}{2},$$

dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande

$$\frac{\|u_n\|^2}{2} > \frac{\|u\|^2 - \varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, per l'immersione compatta $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, passando a un'ulteriore sotto-successione abbiamo $u_n \to u$ in $L^r(\Omega)$. Per (5.2), ragionando come nella dimostrazione del Lemma 5.1, abbiamo

$$\lim_n \int_\Omega F(x, u_n)\, dx = \int_\Omega F(x, u)\, dx,$$

da cui per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande

$$\int_\Omega F(x, u_n)\, dx < \int_\Omega F(x, u)\, dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dunque definitivamente

$$\Phi(u_n) < \Phi(u) - \varepsilon,$$

contro (5.5). $\square$

In generale Φ non soddisfa (PS) (Definizione 2.18). Tuttavia, le successioni di Palais-Smale *limitate* hanno una sotto-successione convergente:

Lemma 5.4. *Siano f verificante $\mathbf{H}_1$, (u_n) una successione limitata in $H^1_0(\Omega)$ t.c. $|\Phi(u_n)| \leqslant C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\Phi'(u_n) \to 0$. Allora (u_n) ha una sotto-successione convergente.*

Dimostrazione. Per riflessività e per l'immersione compatta $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, passando a una sotto-successione abbiamo $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1_0(\Omega)$ e $u_n \to u$ in $L^r(\Omega)$ (quindi anche in $L^1(\Omega)$). Inoltre, da (5.3), per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ abbiamo

$$\Big| \int_\Omega \big[\nabla u \cdot \nabla \varphi - f(x, u_n)\varphi\big]\, dx \Big| \leqslant \|\Phi'(u_n)\| \|\varphi\|.$$

Ponendo $\varphi = u_n - u \in H^1_0(\Omega)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2 &= \langle u_n, u_n - u\rangle - \langle u, u_n - u\rangle \\
&= \langle \Phi'(u_n), u_n - u\rangle + \int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)\, dx + \mathbf{o}(1) \\
&\leqslant C \int_\Omega (1 + |u_n|^{r-1})(u_n - u)\, dx + \mathbf{o}(1) \\
&\leqslant C\big(\|u_n - u\|_1 + \|u_n\|_r^{r-1} \|u_n - u\|_r\big) + \mathbf{o}(1),
\end{aligned}$$

e quest'ultimo tende a 0 per $n \to \infty$. Dunque $u_n \to u$ in $H^1_0(\Omega)$. $\square$

Comunemente, i problemi della forma (4.1) vengono classificati in base al comportamento *asintotico* della reazione $f(x,\cdot)$:

(a) problemi sublineari, in cui uniformemente per ogni $x \in \Omega$
$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0;$$

(b) problemi asintoticamente lineari, che non appartengono alla classe (a) ma per i quali esistono $M, T > 0$ t.c. per ogni $x \in \Omega$ e ogni $|t| \geqslant T$
$$\Big|\frac{f(x,t)}{t}\Big| \leqslant M;$$

(c) problemi superlineari, in cui uniformemente per ogni $x \in \Omega$
$$\lim_{|t|\to\infty} \Big|\frac{f(x,t)}{t}\Big| = \infty.$$

Per ognuna delle classi precedenti presentiamo alcuni risultati di esistenza delle soluzioni, corredati da esempi significativi[6].

Esercizio 5.5. Completare la dimostrazione del Lemma 5.1 ricavando la formula di Φ_2''.

Esercizio 5.6. Sia per ogni $t \in \mathbb{R}$
$$f(t) = |t|^{q-2}t.$$
Per quali $q > 0$ la funzione f soddisfa $\mathbf{H}_0$ o $\mathbf{H}_1$?

5.1. **Problemi sublineari.** La caratteristica principale di questi problemi, dal punto di vista variazionale, è che il corrispondente funzionale dell'energia è *coercivo*: ciò permette di applicare il metodo diretto (Sotto-sezione 2.1) e di individuare come soluzione il punto di minimo globale dell'energia.

Teorema 5.7. *Sia f verificante $\mathbf{H}_0$ e t.c. uniformemente per ogni $x \in \overline{\Omega}$*
$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0.$$
Allora (4.1) ha almeno una soluzione $u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ (da determinare in seguito). Per ipotesi esiste $T > 0$ t.c. per ogni $x \in \Omega$ a ogni $|t| > T$
$$|f(x,t)| < \varepsilon|t|.$$
Proviamo che esiste $C_\varepsilon > 0$ t.c. per ogni $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$
$$F(x,t) \leqslant C_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}t^2. \tag{5.6}$$
Infatti, da $\mathbf{H}_0$ per ogni $t > T$ si ha
$$\begin{aligned} F(x,t) &\leqslant \int_0^T |f(x,\tau)|\,d\tau + \int_T^t \varepsilon\tau\,d\tau \\ &\leqslant C\Big(T + \frac{T^r}{r}\Big) + \frac{\varepsilon}{2}(t^2 - T^2) \leqslant C + \frac{\varepsilon}{2}t^2. \end{aligned}$$

[6] Nella maggior parte degli esempi considereremo, per semplicità, reazioni autonome $f(t)$.

Similmente si tratta il caso $t < -T$, mentre per $|t| \leqslant T$ usiamo direttamente $\mathbf{H}_0$. Così (5.6) è provata. Ne segue, usando anche (4.2), che per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geqslant \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega \Big(C_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}u^2\Big)\,dx \\ &\geqslant \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 - C_\varepsilon|\Omega| \\ &\geqslant \frac{1-\varepsilon c_2^2}{2}\|u\|^2 - C.\end{aligned}$$

Scegliendo $\varepsilon \in (0, c_2^{-2})$, otteniamo

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = \infty.$$

Per il Lemma 5.3, Φ è sequenzialmente debolmente semi-continuo inferiormente. Allora, per il Teorema 2.13 esiste $u_1 \in H^1_0(\Omega)$ t.c.

$$\Phi(u_1) = \inf_{u\in H^1_0(\Omega)} \Phi(u). \tag{5.7}$$

Per l'Osservazione 5.2 si ha $\Phi \in C^1(H^1_0(\Omega))$. Dunque, per il Lemma 2.7 abbiamo $u_1 \in K(\Phi)$, da cui per il Lemma 5.1 *(ii)* segue che u_1 è una soluzione di (4.1). □

Osserviamo che, nel Teorema 5.7, non è escluso il caso (banale) $u_1 = 0$, che può verificarsi se $f(\cdot, 0) = 0$ in Ω. Per avere $u_1 \neq 0$ occorre aggiungere qualche informazione su f, in modo da escludere che il minimo di Φ sia 0:

Esempio 5.8. Consideriamo l'*equazione di Lane-Emden* (semplificata) con esponente $q \in (1, 2)$:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{q-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases} \tag{5.8}$$

Cerchiamo soluzioni non negative. Il problema (5.8) ricade nel modello (4.1) ponendo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = (t^+)^{q-1}.$$

Ovviamente f verifica $\mathbf{H}_0$ e

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

Dunque, per il Teorema 5.7 (ved. dimostrazione) il funzionale dell'energia

$$\Phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{\|u^+\|_q^q}{q}$$

ammette minimo globale in $u_1 \in H^1_0(\Omega)$. Per il Teorema 4.9 si ha $u_1 \geqslant 0$ in Ω, quindi u_1 risolve (5.8). D'altra parte, sia $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ t.c. $\varphi \geqslant 0$ in Ω, $\varphi \neq 0$. Si ha per ogni $\tau > 0$

$$\Phi(\tau\phi) = \frac{\tau^2\|\varphi\|^2}{2} - \frac{\tau^q\|\varphi\|_q^q}{q}.$$

Poiché $q < 2$, per $\tau > 0$ abbastanza piccolo si ha $\Phi(\tau\varphi) < 0$. In particolare,

$$\Phi(u_1) < 0 = \Phi(0),$$

da cui $u_1 \neq 0$ (in effetti si può dimostrare che $u_1 > 0$ in Ω). Osserviamo che f non verifica $\mathbf{H}_1$, in quanto non è derivabile in 0.

Nel caso sublineare è relativamente semplice ottenere risultati di molteplicità delle soluzioni:

Teorema 5.9. *Sia f verificante $\mathbf{H}_1$ e:*

(*i*) *uniformemente per ogni* $x \in \overline{\Omega}$

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0;$$

(*ii*) *uniformemente per ogni* $x \in \overline{\Omega}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0;$$

(*iii*) *esiste* $\bar{u} \in H^1_0(\Omega)$ *t.c.* $\Phi(\bar{u}) < 0$.

Allora (4.1) *ha almeno due soluzioni* $u_1, u_2 \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Come nel Teorema 5.7, usando (*i*) proviamo che Φ è coercivo ed esiste $u_1 \in K(\varphi)$ soluzione di (4.1), verificante (5.7). Da (*iii*) inoltre ricaviamo

$$\Phi(u_1) \leqslant \Phi(\bar{u}) < 0,$$

quindi $u_1 \neq 0$. Proviamo che Φ ha un minimo locale in $u_0 = 0$. Infatti, per (*ii*), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in (0,1)$ t.c. per ogni $x \in \Omega$, $|t| \leqslant \delta$

$$|f(x,t)| \leqslant \varepsilon |t|,$$

da cui

$$F(x,t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} t^2.$$

D'altra parte, da $\mathbf{H}_1$ si ha per ogni $|t| > \delta$

$$F(x,t) \leqslant C(1 + |t|^r) \leqslant C\Big(\frac{1}{\delta^2} + 1\Big)|t|^r.$$

In sintesi esiste $C_\varepsilon > 0$ t.c. per ogni $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$

$$F(x,t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} t^2 + C_\varepsilon |t|^r.$$

Ne segue (anche usando (4.2)) che per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geqslant \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega \Big(\frac{\varepsilon}{2} u^2 + C_\varepsilon |u|^r\Big)\, dx \\ &\geqslant \frac{1 - \varepsilon c_2^2}{2} \|u\|^2 - C\|u\|^r. \end{aligned}$$

Scegliamo a questo punto $\varepsilon \in (0, c_2^{-2})$ e osserviamo che per ogni $t > 0$ abbastanza piccolo

$$\frac{1 - \varepsilon c_2^2}{2} t^2 - Ct^r > 0.$$

Dunque esiste $\rho > 0$ t.c. per ogni $u \in B_\rho(0) \setminus \{0\}$

$$\Phi(u) > 0,$$

ovvero $u_0 = 0$ è un punto di minimo locale (proprio) per Φ.

Proviamo ora che Φ verifica (PS). Sia (u_n) una successione in $H^1_0(\Omega)$ t.c. $|\Phi(u_n)| \leqslant C$ e $\Phi'(u_n) \to 0$. Per la coercività di Φ esiste $R > 0$ t.c. $\Phi(u) > C$ per ogni $\|u\| > R$, dunque abbiamo $\|u_n\| \leqslant R$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, per il Lemma 5.4 esiste una sotto-successione convergente di (u_n).

Riassumendo, $\Phi \in C^2(H^1_0(\Omega))$ verifica (PS) e ha due punti di minimo locale $u_0 \neq u_1$. Per il Teorema 2.26 esiste $u_2 \in K(\Phi) \setminus \{u_0, u_1\}$. In particolare, $u_1, u_2 \neq 0$ sono soluzioni di (4.1) per il Lemma 5.1. □

Nelle ipotesi del Teorema 5.9 la reazione $f(x, \cdot)$ mostra un doppio carattere: è sublineare all'infinito (*i*), ma superlineare nell'origine (*ii*). È proprio questo cambiamento di carattere che produce soluzioni non banali.

Esempio 5.10. Consideriamo il problema (4.1) con la seguente reazione convessa-concava ($\lambda > 0$, $1 < q < 2 < r < 2^*$):
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqslant 0 \\ \lambda t^{r-1} & \text{se } 0 < t \leqslant 1 \\ \lambda(t^{q-1} + (r-q)\ln(t)) & \text{se } t > 1. \end{cases}$$
Si vede facilmente che $f \in C^1(\mathbb{R})$ soddisfa $\mathbf{H}_1$ e le ipotesi *(i)* *(ii)* del Teorema 5.9. Proviamo che essa soddisfa anche *(iii)* per $\lambda > 0$ abbastanza grande. Sia $\bar{u} \in C^1_c(\Omega)$ t.c. $0 \leqslant \bar{u} \leqslant 1$ in Ω, $\bar{u} \neq 0$, si ha allora
$$\Phi(\bar{u}) = \frac{\|\bar{u}\|^2}{2} - \lambda\frac{\|\bar{u}\|_r^r}{r},$$
e questa quantità è negativa se
$$\lambda > \bar{\lambda} = \frac{r\|\bar{u}\|_2^2}{2\|\bar{u}\|_r^r}.$$
Dunque, per ogni $\lambda > \bar{\lambda}$ il problema (4.1) ha almeno due soluzioni non nulle.

Esercizio 5.11. Dimostrare che il problema
$$\begin{cases} -\Delta u = \sqrt{|u|+1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$
ha almeno una soluzione non nulla.

Esercizio 5.12. Dimostrare che il problema
$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\ln(u^2+1) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$
ha almeno due soluzioni non nulle per ogni $\lambda > 0$ abbastanza grande.

5.2. **Problemi asintoticamente lineari.** Questo caso è il più delicato, in quanto non è noto il comportamento asintotico del funzionale dell'energia. Per semplificare un poco le cose, specializziamo la condizione (b) richiedendo che esista una funzione $m_\infty \in C(\overline{\Omega})$ t.c. uniformemente per ogni $x \in \overline{\Omega}$
$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = m_\infty(x) > 0.$$
Ricordando la Proposizione 4.17, i valori di m_∞ si collocano lungo la semiretta $\mathbb{R}^+$, ripartita dagli autovalori del problema (4.7) (con $m = 1$)
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \ldots.$$
Assumeremo che m_∞ sia confinata entro un solo *intervallo spettrale* $[\lambda_h, \lambda_{h+1}]$ ($h \in \mathbb{N}$, con la convenzione $\lambda = 0 = 0$) e confronteremo i problemi (4.1) e (4.7). Questo metodo è basato principalmente sulla teoria di Morse (Sotto-sezione 2.3).

Premettiamo alcune considerazioni sul problema generale degli autovalori, alla luce dei risultati della Sotto-sezione 2.3. Sia $m \in C(\overline{\Omega})$ t.c. $m(x) > 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, allora il funzionale dell'energia di (4.7) è definito per ogni $\lambda > 0$ da
$$\Psi_{m,\lambda}(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \lambda\frac{\|u\|_{2,m}^2}{2}.$$
Dalle formule (5.3), (5.4) si ha $\Psi_{m,\lambda} \in C^2(H^1_0(\Omega))$ e per ogni $u, \varphi, \psi \in H^1_0(\Omega)$
$$\langle \Psi'_{m,\lambda}(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla\varphi - \lambda m(x)u\varphi\right] dx,$$

$$\Psi''_{m,\lambda}(u)(\varphi,\psi) = \int_\Omega \big[\nabla\varphi\cdot\nabla\psi - \lambda m(x)\varphi\psi\big]\,dx.$$

Vediamo alcune proprietà di questo funzionale:

Lemma 5.13. *Siano $m \in C(\overline{\Omega})$ t.c. $m(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$, $\lambda \in (\lambda_j(m), \lambda_{j+1}(m))$ ($j \in \mathbb{N}_0$). Allora*

(*i*) *$\Psi_{m,\lambda}$ soddisfa (PS);*

(*ii*) *l'unico punto critico di $\Psi_{m,\lambda}$ è 0 e per ogni $k \in \mathbb{N}$*

$$C_k(\Psi_{m,\lambda}, 0) = \delta_{kj}\mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Per cominciare poniamo

$$Y = \mathrm{span}(\hat{u}_1(m), \dots \hat{u}_j(m)),$$
$$Z = \overline{\mathrm{span}}\big\{\hat{u}_k(m) : k \geqslant j+1\big\}.$$

Dalla Proposizione 4.17 (*iii*) segue $H^1_0(\Omega) = Y \oplus Z$, inoltre per il Lemma 4.16 abbiamo per ogni $y \in Y$, $z \in Z$

$$\int_\Omega \nabla y\cdot\nabla z\,dx = \int_\Omega m(x)yz\,dx = 0. \tag{5.9}$$

Proviamo (*i*). Sia (u_n) una successione in $H^1_0(\Omega)$, t.c. $|\Psi_{m,\lambda}(u_n)| \leqslant C$ e $\Psi'_{m,\lambda}(u_n) \to 0$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\big|\|u_n\|^2 - \lambda\|u_n\|^2_{2,m}\big| \leqslant C.$$

Inoltre esiste una successione (ε_n) t.c. $\varepsilon_n \to 0^+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ si ha

$$\Big|\int_\Omega \big[\nabla u_n\cdot\nabla\varphi - \lambda m(x)u\varphi\big]\,dx\Big| \leqslant \varepsilon_n\|\varphi\|.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono unici $y_n \in Y$, $z_n \in Z$ t.c.

$$u_n = y_n + z_n.$$

Poniamo $\varphi = z_n$ nella relazione precedente e usiamo (5.9) e la Proposizione 4.17 (*ii*):

$$\begin{aligned}\varepsilon_n\|z_n\| &\geqslant \int_\Omega \nabla(y_n+z_n)\cdot\nabla z_n\,dx - \lambda\int_\Omega m(x)(y_n+z_n)z_n\,dx\\ &= \|z_n\|^2 - \lambda\|z_n\|^2_{2,m}\\ &\geqslant \Big(1-\frac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\Big)\|z_n\|^2.\end{aligned}$$

Poiché $\lambda < \lambda_{j+1}$, ne segue che (z_n) è limitata in $H^1_0(\Omega)$. Ponendo invece $\varphi = y_n$ e applicando (5.9) e le formule di Courant-Fischer (Esercizio 4.20, $F = Y$), abbiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}-\varepsilon_n\|y_n\| &\leqslant \int_\Omega \nabla(y_n+z_n)\cdot\nabla y_n\,dx - \lambda\int_\Omega m(x)(y_n+z_n)\,dx\\ &= \|y_n\|^2 - \lambda\|y_n\|^2_{2,m}\\ &\leqslant \Big(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\Big)\|y_n\|^2.\end{aligned}$$

Poiché $\lambda > \lambda_j$, ne segue che (y_n) è limitata in $H^1_0(\Omega)$. Dunque (u_n) è limitata. Per il Lemma 5.4, (u_n) ha una sotto-successione convergente.

Proviamo ora (*ii*). I punti critici di $\Psi_{m,\lambda}$ coincidono con le soluzioni di (4.7). Poiché $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$, dalla Proposizione 4.17 segue che λ non è un autovalore, pertanto

$$K(\Psi_{m,\lambda}) = \{0\}.$$

Calcoliamo l'indice di Morse di $\Psi_{m,\lambda}$ in 0 (Definizione 2.46 (i)), che denotiamo $\mu \in \mathbb{N}$. Si ha $\dim(Y) = j$, e per ogni $y \in Y$ ragionando come sopra otteniamo

$$\Psi''_{m,\lambda}(0)(y, y) = \|y\| - \lambda\|y\|^2_{2,m} \leqslant \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\Big)\|y\|^2,$$

ovvero la forma quadratica $\Psi''_{m,\lambda}(0)$ è definita negativa in Y. Pertanto $\mu \geqslant j$.

Ragionando per assurdo, sia $\mu > j$. Allora esiste un sotto-spazio F di $H^1_0(\Omega)$ t.c. $\dim(F) = j + 1$ e $\Psi''_{m,\lambda}(0)$ è definita negativa su F. Allora per ogni $u \in F \cap \partial B_1(0)$ abbiamo

$$\|u\|^2 - \lambda\|u\|^2_{2,m} < 0,$$

da cui

$$\inf_{u \in F \cap \partial B_1(0)} \|u\|^2_{2,m} \geqslant \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\lambda_{j+1}},$$

contro la formula di Courant-Fischer ricordata prima. Dunque $\mu = j$.

Calcoliamo ora la nullità di $\Psi_{m,\lambda}$ in 0 (Definizione 2.46 (ii)), denotata $\nu \in \mathbb{N}$. Si ha $\nu = 0$, come dimostriamo per assurdo: sia $u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ t.c. in $\mathcal{L}(H^1_0(\Omega))$ si ha

$$\Psi''_{m,\lambda}(0)(u) = 0.$$

Equivalentemente, per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \big[\nabla u \cdot \nabla\varphi - \lambda m(x)u\varphi\big]\, dx = 0,$$

ovvero u è una λ-autofunzione, contro la Proposizione 4.17.

Così 0 è un punto critico isolato non-degenere di $\Psi_{m,\lambda}$ con indice di Morse j. Per il Teorema 2.49 abbiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$C_k(\Psi_{m,\lambda}, 0) = \delta_{kj}\mathbb{R},$$

il che conclude la dimostrazione. □

Consideriamo dapprima il caso in cui m_∞ è confinata in un intervallo spettrale superiore *senza risonanza* (cioè non coincide mai con un autovalore), mentre il corrispondente limite all'origine si trova in un intervallo spettrale diverso:

Teorema 5.14. *Sia f verificante $\mathbf{H}_1$ e le seguenti condizioni:*

(i) *esistono $h \in \mathbb{N}_0$, $m_\infty \in C(\overline{\Omega})$ t.c. $\lambda_h < m_\infty < \lambda_{h+1}$ in $\overline{\Omega}$ e uniformemente per ogni $x \in \overline{\Omega}$*

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = m_\infty(x);$$

(ii) *esistono $j \in \mathbb{N}_0$, $m_0 \in C(\overline{\Omega})$ t.c. $\lambda_j \neq \lambda_h$, $\lambda_j < m_0 < \lambda_{j+1}$ in $\overline{\Omega}$ e uniformemente per ogni $x \in \overline{\Omega}$*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = m_0(x).$$

Allora (4.1) *ha almeno una soluzione $u_1 \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$.*

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che $\Phi \in C^2(H^1_0(\Omega))$ soddisfa (PS). Sia (u_n) una successione in $H^1_0(\Omega)$ t.c. $|\Phi(u_n)| \leqslant C$ e $\Phi'(u_n) \to 0$. Allora esiste una successione (ε_n) t.c. $\varepsilon_n \to 0^+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\Big|\int_\Omega \big[\nabla u_n \cdot \nabla\varphi - f(x, u_n)\varphi\big]\, dx\Big| \leqslant \varepsilon_n\|\varphi\|.$$

Proviamo che (u_n) è limitata in $H^1_0(\Omega)$, per assurdo: supponiamo che esista una sotto-successione, ancora denotata (u_n), t.c. $\|u_n\| \to \infty$. Allora poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \in \partial B_1(0).$$

Per riflessività e per l'immersione compatta $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, passando se necessario a una sotto-successione abbiamo $v_n \rightharpoonup v$ in $H^1_0(\Omega)$ e $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$, in particolare $v_n(x) \to v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e $|v_n| \leqslant h$ in Ω con $h \in L^2(\Omega)$. Dalle relazioni precedenti abbiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\Big| \int_\Omega \Big[\nabla v_n \cdot \nabla \varphi - \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|} \varphi \Big]\, dx \Big| \leqslant \frac{\varepsilon_n \|\varphi\|}{\|u_n\|}. \tag{5.10}$$

Per (i) esistono $C, T > 0$ t.c. per ogni $x \in \Omega$, $|t| \geqslant T$

$$|f(x,t)| \leqslant C|t|,$$

mentre per (ii) la stessa diseguaglianza vale per $|t| \leqslant \delta$ $(0 < \delta < T)$. D'altra parte, per $\mathbf{H}_1$ abbiamo per ogni $\delta < |t| < T$

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &\leqslant c_0(1 + |t|^{r-1}) \\ &\leqslant C\Big(\frac{|t|}{\delta} + T^{r-2}|t|\Big) \leqslant C|t|. \end{aligned}$$

Dunque esiste $C > 0$ t.c. per ogni $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$|f(x,t)| \leqslant C|t|. \tag{5.11}$$

Per (5.11) e per l'immersione continua $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \Big| \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|} \Big|^2 dx \leqslant C \frac{\|u_n\|_2^2}{\|u_n\|^2} \leqslant C,$$

ovvero la successione $(f(\cdot,u_n)\|u_n\|^{-1})$ è limitata in $L^2(\Omega)$. Passando a una sotto-successione, abbiamo in $L^2(\Omega)$

$$\frac{f(\cdot,u_n)}{\|u_n\|} \rightharpoonup w.$$

Dobbiamo ora individuare con più precisione la funzione w. Fissiamo $x \in \Omega$ (a meno di sotto-insiemi di misura nulla) e distinguiamo tre casi:

(a) se $v(x) > 0$, allora si ha

$$u_n(x) = \|u_n\| v_n(x) \to \infty,$$

da cui per (i)

$$\lim_n \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|} = \lim_n \frac{f(x,u_n)}{u_n} v_n = m_\infty(x) v;$$

(b) se $v(x) = 0$, allora da (5.11)

$$\Big| \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|} \Big| = \Big| \frac{f(x,u_n)}{u_n} v_n \Big| \leqslant C|v_n|,$$

e quest'ultimo tende a 0 per $n \to \infty$;

(b) se $v(x) < 0$, si procede come in (a).

In ogni caso abbiamo $w = m_\infty v$ in Ω. Testiamo ora (5.10) con $\varphi = v_n - v$. Per la diseguaglianza di Hölder abbiamo

$$\Big|\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla(v_n - v)\,dx\Big| \leqslant \int_\Omega \Big|\frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|}(v_n - v)\Big|\,dx + \frac{\varepsilon_n\|v_n - v\|}{\|u_n\|}$$
$$\leqslant \Big\|\frac{f(\cdot,u_n)}{\|u_n\|}\Big\|_2 \|v_n - v\|_2 + \mathbf{o}(1),$$

e quest'ultimo tende a 0 per $n \to \infty$. Infine, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\|v_n - v\|^2 = \int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla(v_n - v)\,dx - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(v_n - v)\,dx,$$

e questo tende a 0 poiché $v_n \rightharpoonup v$. In conclusione $v_n \to v$ in $H^1_0(\Omega)$, da cui $\|v\| = 1$. Passiamo al limite in (5.10) per $n \to \infty$ e abbiamo per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi\,dx = \int_\Omega m_\infty(x) v \varphi\,dx.$$

Così $v \neq 0$ è un'autofunzione associata all'autovalore $\lambda = 1$ con peso $m_\infty \in C(\overline{\Omega})$ (strettamente positivo per *(i)*). Da *(i)* e dalla Proposizione 4.18 abbiamo però

$$\lambda_h(m_\infty) < \lambda_h(\lambda_h) = 1 = \lambda_{h+1}(\lambda_{h+1}) < \lambda_{h+1}(m_\infty),$$

contro la Proposizione 4.17. Deduciamo che (u_n) è limitata in $H^1_0(\Omega)$. Dal Lemma 5.4 segue l'esistenza di una sotto-successione di (u_n) convergente.

Da *(ii)* segue per ogni $x \in \Omega$

$$f(x, 0) = 0,$$

da cui $0 \in K(\Phi)$. Da questo punto procediamo per assurdo, supponendo

$$K(\Phi) = \{0\}. \tag{5.12}$$

In particolare, 0 è un punto critico isolato di Φ. Da *(ii)* segue per ogni $x \in \Omega$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = m_0(x).$$

Da (5.4) abbiamo per ogni $\varphi, \psi \in H^1_0(\Omega)$

$$\Phi''(0)(\varphi, \psi) = \int_\Omega \big[\nabla\varphi \cdot \nabla\psi - m_0(x)\varphi\psi\big]\,dx.$$

Come nel Lemma 5.13 ricaviamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$C_k(\Phi, 0) = \delta_{kj}\mathbb{R}.$$

Fissiamo $a < 0$, da determinare in seguito (ricordiamo che $\Phi(0) = 0$). Per il Lemma 2.42 (ved. anche l'Osservazione 2.44) abbiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(H^1_0(\Omega), \Phi^a) = C_k(\Phi, 0) = \delta_{kj}\mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Poniamo per ogni $(t, u) \in [0, 1] \times H^1_0(\Omega)$

$$h(t, u) = (1 - t)\Phi(u) + t\Psi_{m_\infty,1}(u)$$
$$= \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega \Big[(1 - t)F(x, u) + t m_\infty(x)\frac{u^2}{2}\Big]\,dx.$$

Questa è una C^1-omotopia t.c. $h(0, \cdot) = \Phi$ e $h(1, \cdot) = \Psi_{m_\infty,1}$. Inoltre esistono $a < 0 < \delta$ t.c. per ogni $(t, u) \in [0, 1] \times H^1_0(\Omega)$ t.c. $h(t, u) \leqslant a$ si ha

$$\|h'_u(t, u)\| \geqslant \delta.$$

Ragionando per assurdo, supponiamo che esistano successioni (t_n) in $[0,1]$, (u_n) in $H^1_0(\Omega)$ t.c. $h(t_n,u_n)\to-\infty$ e $h'_u(t_n,u_n)\to 0$. Allora esiste una successione (ε_n) t.c. $\varepsilon_m\to 0^+$ e per ogni $n\in\mathbb{N}$, $\varphi\in H^1_0(\Omega)$

$$\Big|\int_\Omega\big[\nabla u_n\cdot\nabla\varphi-(1-t_n)f(x,u_n)\varphi-t_n m_\infty(x)u_n\varphi\big]\,dx\Big|\leqslant\varepsilon_n\|\varphi\|.$$

Passando a una sotto-successione abbiamo $t_n\to t$ per qualche $t\in[0,1]$. Ragionando come nella dimostrazione di (PS) proviamo che (u_n) è limitata. Passando a un'ulteriore sotto-successione abbiamo $u_n\rightharpoonup u$ in $H^1_0(\Omega)$. Ma allora, poiché $h(t,\cdot)$ è sequenzialmente debolmente semi-continuo inferiormente (Lemma 5.3) abbiamo

$$h(t,u)\leqslant\liminf_n h(t_n,u_n)=-\infty,$$

assurdo. Possiamo allora applicare la Proposizione 2.43 (ved. anche l'Osservazione 2.44) e ottenere per ogni $a<0$ abbastanza piccolo

$$H_k(H^1_0(\Omega),\Phi^a)=H_k(H^1_0(\Omega),\Psi^a_{m_\infty,1}).$$

Per i Lemmi 2.42 e 5.13, ricordando (i), abbiamo

$$H_k(H^1_0(\Omega),\Phi^a)=C_k(\Psi_{m_\infty,1},0)=\delta_{kh}\mathbb{R}.$$

Poiché $j\neq h$, ciò contraddice (5.13). Dunque (5.12) è falsa, ovvero esiste $u_1\in K(\Phi)\setminus\{0\}$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Esempio 5.15. Siano $j<h$ e $\lambda_j<\lambda<\lambda_{j+1}\leqslant\lambda_h<\mu<\lambda_{h+1}$. Poniamo per ogni $t\geqslant 0$

$$f(t)=\lambda t+(\mu-\lambda)\frac{2}{\pi}\arctan(t)t,$$

e $f(-t)=-f(t)$ per $t<0$. Allora $f\in C^1(\mathbb{R})$ verifica le ipotesi del Teorema 5.14, quindi il corrispondente problema (4.1) ha almeno una soluzione non nulla.

Se m_∞ è confinata nell'intervallo $(0,\lambda_1)$ si riproduce sostanzialmente la situazione sub-lineare, in quanto Φ è coercivo: allora l'esistenza di una soluzione si dimostra come nel Teorema 5.7. Aggiungendo un'ipotesi di crescita (ancora lineare) all'origine, otteniamo un risultato di molteplicità:

Teorema 5.16. *Sia f verificante $\mathbf{H}_1$ e le seguenti condizioni:*

(i) *esiste $m_\infty\in C(\overline{\Omega})$ t.c. $0<m_\infty<\lambda_1$ in $\overline{\Omega}$ e uniformemente per ogni $x\in\overline{\Omega}$*

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{f(x,t)}{t}=m_\infty(x);$$

(ii) *esistono $j\in\mathbb{N}$, $j\geqslant 1$, $m_0\in C(\overline{\Omega})$ t.c. $\lambda_j<m_0<\lambda_{j+1}$ in $\overline{\Omega}$ e uniformemente per ogni $x\in\overline{\Omega}$*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t}=m_0(x).$$

Allora (4.1) ha almeno due soluzioni $u_1,u_2\in H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}$.

Dimostrazione. Proviamo che Φ è coercivo. Per (i), esistono $\varepsilon\in(0,\lambda_1)$, $T>0$ t.c. per ogni $x\in\Omega$, $|t|>T$

$$|f(x,t)|\leqslant(\lambda_1-\varepsilon)|t|.$$

Come in (5.6), troviamo $C_\varepsilon>0$ t.c. per ogni $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$

$$F(x,t)\leqslant C_\varepsilon+\frac{\lambda_1-\varepsilon}{2}t^2.$$

Abbiamo allora per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geqslant \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega \Big(C_\varepsilon + \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{2} u^2\Big)\, dx \\ &\geqslant \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{2}\|u\|_2^2 - C \\ &\geqslant \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1}\Big)\|u\|^2 - C,\end{aligned}$$

e quest'ultimo tende a ∞ per $\|u\| \to \infty$. Essendo coercivo e sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente (Lemma 5.3), Φ verifica (PS) (Lemma 5.4) e si ha

$$\inf_{u \in H^1_0(\Omega)} \Phi(u) > -\infty.$$

Da *(ii)* segue per ogni $x \in \Omega$

$$f(x, 0) = 0.$$

Pertanto $\Phi'(0) = 0$. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che 0 sia un punto critico isolato (altrimenti Φ avrebbe infiniti punti critici, e la dimostrazione sarebbe conclusa). Come nel Teorema 5.14, da *(ii)* segue per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$C_k(\Phi, 0) = \delta_{kj}\mathbb{R}.$$

In particolare $C_j(\Phi, 0) \neq 0$, da cui per la Proposizione 2.40 *(i)* segue che 0 non è un punto di minimo locale. Per il Teorema 2.45 esistono $u_1, u_2 \in K(\Phi) \setminus \{0\}$, il che conclude la dimostrazione. □

Esempio 5.17. Definiamo f come nell'Esempio 5.15, ma con $0 < \lambda < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ (ricordiamo che $\lambda_1 < \lambda_2$ per la Proposizione 4.17). Allora f soddisfa le ipotesi del Teorema 5.16, quindi il corrispondente problema (4.1) ha almeno due soluzioni non nulle.

Consideriamo infine il caso della *risonanza*, ovvero quello in cui m_∞ coincide con uno degli autovalori. In tale caso il problema (4.1) si può considerare una *perturbazione* di (4.7) e riformulare nel modo seguente:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_h u + g(x, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases} \tag{5.14}$$

Il numero $\lambda_h > 0$ ($h \in \mathbb{N}_0$) è definito come nella Proposizione 4.17, mentre la funzione g rappresenta la perturbazione. Poniamo per ogni $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$

$$G(x, t) = \int_0^t g(x, \tau)\, d\tau.$$

Abbiamo il seguente risultato di esistenza per il problema (5.14):

Teorema 5.18. *Siano $h \in \mathbb{N}_0$, $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ t.c. $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, verificante:*

(i) esistono $c_0 > 0$, $r \in (2, 2^*)$ t.c. per ogni $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$

$$\Big|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\Big| \leqslant c_0\big(1 + |t|^{r-2}\big);$$

(ii) esiste $c_1 > 0$ t.c. per ogni $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$

$$|g(x, t)| \leqslant c_1;$$

(iii) uniformemente per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$\lim_{|t| \to \infty} G(x, t) = \infty.$$

Allora (5.18) ha almeno una soluzione $u_1 \in H^1_0(\Omega)$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo assumere l'esistenza di $j \in \{1, \dots h-1\}$ t.c.

$$0 < \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_j < \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_h < \lambda_{h+1} \leqslant \dots$$

Definiamo $Y, Z \subset H_0^1(\Omega)$ come nella dimostrazione del Lemma 5.13 (con $m = 1$) e decomponiamo ulteriormente Y nei sotto-spazi

$$Y_1 = \mathrm{span}(\hat{u}_1, \dots \hat{u}_j), \ Y_2 = \mathrm{span}(\hat{u}_{j+1}, \dots \hat{u}_h)$$

(Y_2 è l'autospazio associato a λ_h), di modo che $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Il funzionale dell'energia di (5.14) si riformula in questo caso come

$$\Phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \lambda_h \frac{\|u\|_2^2}{2} - \int_\Omega G(x, u)\, dx.$$

Usando *(i)* si vede che la reazione

$$f(x, t) = \lambda_h t + g(x, t)$$

verifica $\mathbf{H}_1$. Pertanto $\Phi \in C^2(H_0^1(\Omega))$ è sequenzialmente debolmente semi-continuo inferiormente. Osserviamo che, uniformemente in Y_2, si ha

$$\lim_{\|y\| \to \infty} \int_\Omega G(x, y)\, dx = \infty. \tag{5.15}$$

Infatti, fissiamo $\bar{y} \in Y_2 \cap \partial B_1(0)$. Per *(iii)* esiste $T > 0$ t.c. per ogni $x \in \Omega$, $|t| \geqslant T$ si ha

$$G(x, t) > 1.$$

Poiché $\bar{y} \neq 0$, esistono $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\rho > 0$ t.c. $\overline{B}_\rho(x_0) \subset \Omega$ e $\bar{y} \neq 0$ in $\overline{B}_\rho(x_0)$. Allora, ricordando *(ii)*, per ogni $\tau > 1$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, \tau\bar{y})\, dx &= \int_{\{|\bar{y}| > T/\tau\}} G(x, \tau\bar{y})\, dx + \int_{\{|\bar{y}| \leqslant T/\tau\}} G(x, \tau\bar{y})\, dx \\
&\geqslant \int_{B_\rho(x_0)} G(x, \tau\bar{y})\, dx - \int_{\{\tau|\bar{y}| \leqslant T\}} c_1|\tau\bar{y}|\, dx \\
&\geqslant \int_{B_\rho(x_0)} G(x, \tau\bar{y})\, dx - C,
\end{aligned}$$

e l'ultima quantità tende a ∞ per $\tau \to \infty$. Ricordando infine che $\dim(Y_2) < \infty$, e quindi $Y_2 \cap \partial B_1(0)$ è compatto, abbiamo (5.15).

Per la Proposizione 4.17 *(iii)*, per ogni $z \in Z$ esiste una successione di coefficienti $(a_k)_{k \geqslant h+1}$ t.c.

$$z = \sum_{k=h+1}^\infty a_k \hat{u}_k.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{\|z\|^2}{2} - \frac{\lambda_h}{2} \sum_{k=h+1}^\infty a_k^2 \|\hat{u}_k\|_2^2 - \int_\Omega G(x, z)\, dx \\
&\geqslant \frac{\|z\|^2}{2} - \frac{\lambda_h}{2} \sum_{k=h+1}^\infty a_k^2 \frac{\|\hat{u}_k\|^2}{\lambda_k} - \int_\Omega c_1|z|\, dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\Big)\|z\|^2 - C\|z\|,
\end{aligned}$$

e quest'ultimo tende a ∞ per $\|z\| \to \infty$. Dunque Φ è coercivo su Z, da cui per il Teorema 2.13

$$\inf_{z \in Z} \Phi(z) = b > -\infty.$$

Fissiamo ora $y \in Y$, allora esistono unici $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ t.c.

$$y = y_1 + y_2.$$

Ragionando come sopra, abbiamo

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\lambda_h}{2}\left(\|y_1\|_2^2 + \|y_2\|_2^2\right) - \int_\Omega G(x,y)\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 - \frac{\lambda_h}{\lambda_j}\|y_1\|^2 - \|y_2\|^2\Big) - \int_\Omega G(x,y)\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_j}\Big)\|y_1\|^2 - \int_\Omega \big[G(x.y) - G(x,y_2)\big]\,dx - \int_\Omega G(x,y_2)\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_j}\Big)\|y_1\|^2 - C\|y_1\| - \int_\Omega G(x,y_2)\,dx.\end{aligned}$$

Per $\|y\| \to \infty$, almeno una delle norme $\|y_1\|$, $\|y_2\|$ tende a ∞. Dunque, applicando (5.15) abbiamo $\Phi(y) \to -\infty$. Allora, fissato $a < b$, esiste $\rho > 0$ t.c. per ogni $y \in Y \cap \partial B_\rho(0)$

$$\Phi(y) \leqslant a.$$

Proviamo infine che Φ soddisfa (PS). Sia (u_n) una successione in $H_0^1(\Omega)$ t.c. $|\Phi(u_n)| \leqslant C$ e $\Phi'(u_n) \to 0$. Esiste allora una successione (ε_n) t.c. $\varepsilon_n \to 0^+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\Big|\int_\Omega \big[\nabla u_n \cdot \nabla\varphi - \lambda_h u_n \varphi - g(x,u_n)\varphi\big]\,dx\Big| \leqslant \varepsilon_n\|\varphi\|. \tag{5.16}$$

Secondo la decomposizione introdotta sopra, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono unici $v_n \in Y_1$, $y_n \in Y_2$, $z_n \in Z$ t.c.

$$u_n = v_n + y_n + z_n.$$

Poniamo $\varphi = z_n$ in (5.16) e ricordiamo le relazioni di ortogonalità del Lemma 4.16. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\varepsilon_n\|z_n\| &\geqslant \int_\Omega \big[\nabla u_n \cdot \nabla z_n - \lambda_h u_n z_n - g(x,u_n)z_n\big]\,dx \\ &\geqslant \|\nabla z_n\|_2^2 - \lambda_h\|z_n\|_2^2 - C\|z_n\| \\ &\geqslant \Big(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\Big)\|z_n\|^2 - C\|z_n\|,\end{aligned}$$

da cui $\|z_n\| \leqslant C$. Similmente, ponendo $\varphi = v_n$ in (5.16) e cambiando segno, otteniamo $\|v_n\| \leqslant C$. Infine, dalla prima condizione sulla successione (u_n) e dalla definizione di Y_2 abbiamo

$$\begin{aligned}C &\geqslant \frac{1}{2}\left(\|\nabla v_n\|_2^2 + \|\nabla z_n\|_2^2\right) - \frac{\lambda_h}{2}\left(\|v_n\|_2^2 + \|z_n\|_2^2\right) - \int_\Omega G(x,u_n)\,dx \\ &\geqslant -\int_\Omega \big[G(x,u_n) - G(x,y_n)\big]\,dx - \int_\Omega G(x,y_n)\,dx - C \\ &\geqslant -\int_\Omega c_1|v_n + z_n|\,dx - \int_\Omega G(x,y_n)\,dx - C \\ &\geqslant -C\|v_n + z_n\|_1 - \int_\Omega G(x,y_n)\,dx - C.\end{aligned}$$

Dalle relazioni precedenti segue

$$\int_\Omega G(x,y_n)\,dx \leqslant C.$$

Ne deduciamo che (y_n) è limitata in $H^1_0(\Omega)$. Altrimenti, passando a una sotto-successione avremmo $\|y_n\| \to \infty$, da cui l'integrale sopra tenderebbe a ∞ per (5.15). Così (u_n) è limitata in $H^1_0(\Omega)$, da cui per il Lemma 5.4 essa ha una sotto-successione convergente.

Possiamo ora applicare il Teorema 2.27, che assicura l'esistenza di $u_1 \in K(\Phi)$. $\square$

Esempio 5.19. Fissiamo $\lambda_h > 0$ ($h \in \mathbb{N}$) e poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \frac{t}{t^2+1}.$$

Allora $g \in C^1(\mathbb{R})$ verifica le ipotesi del Teorema 5.18, pertanto il corrispondente problema (5.14) ha almeno una soluzione non nulla.

Esercizio 5.20. Provare che per ogni $m \in L^\infty(\Omega)$ positiva, $\lambda \in (0, \lambda_1(m))$ il funzionale $\Psi_{m,\lambda}$ è coercivo. Inoltre, in tal caso il Lemma 5.13 ammette una dimostrazione più semplice: quale?

Esercizio 5.21. Provare che il seguente problema ammette almeno due soluzione non nulle:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + \arctan(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Esercizio 5.22. Estendere, sotto opportune ipotesi, il Teorema 5.18 al seguente problema con peso positivo $m \in C(\overline{\Omega})$ e $\lambda = \lambda_h(m)$ per qualche $h \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x) + g(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

5.3. **Problemi superlineari.** Il caso (c) è caratterizzato da un comportamento asintotico fortemente indeterminato. Tale comportamento rende, in generale, problematica la verifica della proprietà (PS): per questo si introduce la *condizione di Ambrosetti-Rabinowitz*, che rinforza la divergenza della reazione.

Si ottiene il seguente risultato di esistenza, basato sul Teorema 2.25 (del passo di montagna):

Teorema 5.23. *Sia f verificante $\mathbf{H}_1$ e le seguenti condizioni:*

(i) *uniformemente per ogni $x \in \overline{\Omega}$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0;$$

(ii) *esistono $T > 0$, $\mu > 2$ t.c. per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e ogni $|t| \geqslant T$*

$$0 < \mu F(x,t) \leqslant f(x,t)t.$$

Allora (4.1) *ha almeno una soluzione $u_1 \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$.*

Dimostrazione. Per prima cosa proviamo che Φ soddisfa (PS). Sia (u_n) una successione in $H^1_0(\Omega)$ t.c. $|\Phi(u_n)| \leqslant C$ e $\Phi'(u_n) \to 0$, ovvero si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\Big| \|u_n\|^2 - 2\int_\Omega F(x,u_n)\,dx \Big| \leqslant C$$

ed esiste una successione (ε_n) t.c. $\varepsilon_n \to 0^+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\Big| \int_\Omega \big[\nabla u_n \cdot \nabla\varphi - f(x,u_n)u_n\big]\,dx \Big| \leqslant \varepsilon_n \|\varphi\|.$$

Ponendo $\varphi = u_n$ nella seconda diseguaglianza, per n abbastanza grande (t.c. $\varepsilon_n \leqslant 1$) otteniamo

$$-\|u_n\|^2 + \int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx \leqslant \|u_n\|.$$

Da $\mathbf{H}_1$ segue per ogni $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$

$$|f(x,t)| \leqslant C(1+|t|^{r-1}), \ F(x,t) \leqslant C(1+|t|^r).$$

Usiamo ora la prima diseguaglianza, *(ii)*, e la stima precedente:

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &\leqslant 2\int_\Omega F(x,u_n)\,dx + C \\
&\leqslant \frac{2}{\mu}\int_{\{|u_n|\geqslant T\}} f(x,u_n)u_n\,dx + 2\int_{\{|u_n|<T\}} F(x,u_n)\,dx + C \\
&\leqslant \frac{2}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx + 2\int_{\{|u_n|<T\}} \Big[F(x,u_n) - \frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n\Big]\,dx + C \\
&\leqslant \frac{2}{\mu}\big(\|u_n\|^2 + \|u_n\|\big) + C\int_{\{|u_n|<T\}} (1+|u_n|^r)\,dx + C \\
&\leqslant \frac{2}{\mu}\big(\|u_n\|^2 + \|u_n\|\big) + C(1+T^r).
\end{aligned}$$

Poiché $\mu > 2$, la diseguaglianza sopra implica che (u_n) è limitata in $H^1_0(\Omega)$. Per il Lemma 5.4, (u_n) ha una sotto-successione convergente.

Come nel Teorema 5.9, da *(i)* segue che 0 è un minimo locale proprio di Φ, in particolare esiste $\rho > 0$ t.c. $\Phi(u) > 0$ per ogni $u \in \partial B_\rho(0)$. In realtà sappiamo di più, ovvero che

$$\inf_{u\in\partial B_\rho(0)} \Phi(u) = a > 0. \tag{5.17}$$

Procediamo per assurdo: sia (u_n) una successione t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\|u_n\| = \rho$ e

$$0 < \Phi(u_n) < \frac{1}{n}.$$

Per il Teorema 2.15 e il Corollario 2.17, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $v_n \in \partial B_\rho(0)$ t.c.

$$0 < \Phi(v_n) \leqslant \Phi(u_n) + \frac{1}{n}, \ \|\Phi'(v_n)\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Dalle relazioni precedenti ricaviamo $\Phi(v_n) \to 0$ e $\Phi'(v_n) \to 0$. Per (PS), passando a una sotto-successione abbiamo $v_n \to v$ in $H^1_0(\Omega)$, da cui $v \in \partial B_\rho(0)$ e $\Phi(v) = 0$, assurdo. Così (5.17) è provata.

Proviamo infine che Φ è inferiormente illimitato. Cominciamo osservando che uniformemente per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = \infty. \tag{5.18}$$

Infatti, da *(ii)* segue per ogni $x \in \Omega$ e ogni $t > T$

$$\frac{\mu}{t} \leqslant \frac{f(x,t)}{F(x,t)}.$$

Integrando in $[T,t]$ otteniamo

$$\mu \ln\Big(\frac{t}{T}\Big) \leqslant \ln\Big(\frac{F(x,t)}{F(x,T)}\Big),$$

da cui (ricordiamo che $F(x,T) > 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$)

$$F(x,t) \geqslant Ct^\mu.$$

Similmente si prova che la stessa diseguaglianza vale per ogni $t < -T$, da cui (5.18). Fissiamo ora $x_0 \in \Omega$, $\delta > 0$ t.c. $\overline{B}_{2\delta}(x_0) \subset \Omega$ e una funzione $\bar{u} \in C^1_c(\Omega)$ t.c. $0 \leqslant \bar{u} \leqslant 1$ in Ω e

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per ogni } x \in \overline{B}_\delta(x_0) \\ 0 & \text{per ogni } x \in \Omega \setminus B_{2\delta}(x_0). \end{cases}$$

Fissiamo anche

$$\sigma > \frac{\|\bar{u}\|^2}{2|B_\delta(x_0)|}.$$

Per (5.18) esiste $M > 0$ t.c. per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e ogni $|t| \geqslant M$

$$F(x,t) \geqslant \sigma t^2.$$

Dalle relazioni precedenti, per ogni $\tau > M$ abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi(\tau\bar{u}) &\leqslant \frac{\tau^2\|\bar{u}\|^2}{2} - \int_{\{\bar{u} \geqslant M/\tau\}} \sigma(\tau\bar{u})^2\,dx - \int_{\{\bar{u} < M/\tau\}} F(x,\tau\bar{u})\,dx \\ &\leqslant \frac{\tau^2\|\bar{u}\|^2}{2} - \int_{B_\delta(x_0)} \sigma\tau^2\,dx + \int_\Omega C(1+M^2)\,dx \\ &\leqslant \Big(\frac{\|\bar{u}\|^2}{2} - \sigma|B_\delta(x_0)|\Big)\tau^2 + C, \end{aligned}$$

e quest'ultimo tende a $-\infty$ per $\tau \to \infty$. In particolare, esiste $\tau > 0$ t.c. $\|\tau\bar{u}\| > \rho$ e $\Phi(\tau\bar{u}) < 0$, da cui per (5.17)

$$\max\{\Phi(0),\, \Phi(\tau\bar{u})\} < a.$$

Per il Teorema 2.25 esiste $u_1 \in K_c(\Phi)$ con $c \geqslant a$, da cui $u_1 \neq 0$, il che conclude la dimostrazione. □

Presentiamo alcuni esempi, in cui definiremo la reazione solo per $t \geqslant 0$ e studieremo l'esistenza di soluzioni positive (servendoci del Teorema 4.9).

Esempio 5.24. Consideriamo il caso superlineare dell'equazione di Lane-Emden (ved. Esempio 5.8). Fissiamo $r \in (2, 2^*)$ e studiamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{r-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

La funzione $f(t) = (t^+)^{r-1}$ verifica le ipotesi del Teorema 5.23. Pertanto, il corrispondente problema (4.1) ha almeno una soluzione positiva.

Esempio 5.25. Siano $2 < q < r < 2^*$, e definiamo per ogni $t \geqslant 0$ la seguente reazione convessa-convessa:

$$f(t) = t^{q-1} + t^{r-1}.$$

Allora $f \in C^1(\mathbb{R})$ verifica le ipotesi del Teorema 5.23, quindi il corrispondente problema (4.1) ha almeno una soluzione positiva.

Osservazione 5.26. Il Teorema del passo di montagna (Teorema 2.25) si applica anche al caso delle reazioni *concave-convesse*, ovvero del tipo

$$f(t) = \lambda t^{q-1} + t^{r-1} \ (1 < q < 2 < r < 2^*),$$

ma tale applicazione non si compie attraverso il Teorema 5.23 perché in questo caso abbiamo

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} = \infty.$$

Per questo tipo di problemi ved. [19].

Consideriamo infine un problema superlineare con energia coerciva:

Esempio 5.27. Siano $\lambda > 0$, $r \in (2, 2^*)$. Consideriamo il problema di Dirichlet per l'*equazione logistica*:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^{r-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Anche in questo caso cerchiamo soluzioni $u \geqslant 0$. Il funzionale dell'energia assume in questo caso la forma

$$\Phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \lambda \frac{\|u^+\|_2^2}{2} + \frac{\|u^+\|_r^r}{r}.$$

Si vede facilmente che $\Phi \in C^2(H_0^1(\Omega))$ è coercivo e sequenzialmente debolmente semi-continuo inferiormente, pertanto come nel Teorema 5.7 si prova l'esistenza di un punto di minimo globale $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $u_1 \geqslant 0$ in Ω (qui non basta il Teorema 4.9). Se inoltre supponiamo $\lambda > \lambda_1$, ricordando la Proposizione 4.17 otteniamo per ogni $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \Phi(\tau \hat{u}_1) &= \frac{\tau^2 \|\hat{u}_1\|^2}{2} - \lambda \frac{\tau^2 \|\hat{u}_1\|_2^2}{2} + \frac{\|\hat{u}_1\|_r^r}{r} \\ &= \frac{\lambda_1 - \lambda}{2} \tau^2 + \frac{\tau^r \|\hat{u}_1\|_r^r}{r}, \end{aligned}$$

da cui $\Phi(\tau \hat{u}_1) < 0$ per ogni $\tau > 0$ abbastanza piccolo. Pertanto

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \Phi(u) < 0,$$

da cui $u_1 \neq 0$.

Esercizio 5.28. Poniamo per ogni $t \geqslant 0$

$$f(t) = \ln(t^2 + 1) + t^{r-1} \; (2 < r < 2^*).$$

Stabilire se questa funzione soddisfa le ipotesi del Teorema 5.23.

Esercizio 5.29. Svolgere i calcoli dell'Esempio 5.27.

Esercizio 5.30. Siano $2 < q < r < 2^*$. Provare che per ogni $\lambda > 0$ abbastanza grande il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^{q-1} - u^{r-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ha almeno una soluzione non nulla.

6. Metodi topologici

La matematica non è altro che la parte esatta del nostro pensiero.
L.E.J. Brouwer

Questa sezione sarà aggiunta in seguito...

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems, Cambridge (2007)
[2] T. Bartsch, A. Szulkin, M. Willem, Morse theory and nonlinear differential equations, in 'Handbook of global analysis', Elsevier (2008)
[3] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer (2011)
[4] K.C. Chang, Methods in nonlinear analysis, Springer (2005)
[5] B. Dacorogna, Direct methods in the calculus of variations, Springer (2008)
[6] K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer (1980)
[7] L.C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society (1998)
[8] D.G. de Figueiredo, Positive solutions of semilinear elliptic problems, in 'Differential Equations', Springer (1982)
[9] L. Gasiński, N.S. Papageorgiou, Nonlinear analysis, Chapman & Hall (2005)
[10] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point theory, Springer (2003)
[11] A. Iannizzotto, Spazi di Hilbert e operatori lineari (2021)
[12] A. Iannizzotto, Spazi di Sobolev (2021)
[13] A. Iannizzotto, Equazioni alle derivate parziali lineari/1: Problemi stazionari (2021)
[14] A. Iannizzotto, Equazioni alle derivate parziali lineari/2: Problemi evolutivi (2021)
[15] J. Mawhin, M. Willem, Critical point theory and Hamiltonian systems, Springer (1989)
[16] D. Motreanu, V.V. Motreanu, N.S. Papageorgiou, Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems, Springer (2014)
[17] L. Nirenberg, Topics in nonlinear functional analysis, AMS (2001)
[18] K. Perera, R.P. Agarwal, D. O'Regan, Morse theoretic aspects of p-Laplacian type operators, AMS (2010)
[19] P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, AMS (1986)
[20] M. Struwe, Variational methods, Springer (2008)
[21] M. Willem, Minimax theorems, Birkhäuser (1996)

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari
Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, Italy
Email address: antonio.iannizzotto@unica.it