

# Università di Cagliari

## Corso di Laurea in Matematica

### Prova scritta di Geometria 1

21 febbraio 2023

#### Esercizio 1

Sia  $V = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ . Si consideri l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow V$  la cui matrice associata nelle basi  $B = \{(1,0,1), (2,0,0), (0,1,1)\}$  di  $\mathbb{R}^3$  e  $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$  di  $V$  è

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & -1 & k \\ 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $k \in \mathbb{R}$ .

- Trovare gli eventuali valori di  $k$  per i quali  $f$  è un isomorfismo
- Trovare gli eventuali valori di  $k$  per i quali  $\dim(\ker f) = 2$
- Fissato  $k = 1$ , trovare  $f(1,1,1)$

#### Esercizio 2

Determinare una applicazione lineare, se esiste,  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$  tale che  $f(1,0,1) = (0,0,0,0,0)$  e  $f(0,1,1) = (1,1,1,1,1)$

#### Esercizio 3

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, trovare gli eventuali valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 & = -k \\ x_1 + x_3 & = 1 \\ kx_1 + kx_3 + kx_4 & = 1 \end{cases}$$

è compatibile e, in corrispondenza di tali valori, trovare l'insieme delle soluzioni.

#### Esercizio 4

Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1), \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,0,0), \quad \mathbf{v}_3 = (-1,0,0,-1).$$

Posto  $V = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ , si consideri l'endomorfismo  $f: V \rightarrow V$  la cui matrice associata rispetto alla base  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  di  $V$  è

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se  $f$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di  $V$  formata da autovettori di  $f$ .