LE SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA

21 FEBBRAIO 2023

---

## ESERCIZIO 1

a) $f$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ $\det(M_{BB'}) \neq 0$ $\Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & -1 & k \\ 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & k \\ k-1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -k^2(k-1) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq 1.$$

b) Dato che $\dim(\operatorname{Im} f) = rg(M_{BB'}(f))$, dall'equazione dimensionale si ha

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Im} f)$$
$$= 3 - rg(M_{BB'}(f)).$$

Pertanto

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = 2 \Leftrightarrow 3 - rg(M_{BB'}(f)) = 2$$

$$\Leftrightarrow rg(M_{BB'}(f)) = 1$$

Sappiamo che $rg(M_{BB'}(f)) < 3$ per $k=0$ oppure $k=1$.

Basta dunque controllare cosa accade per questi due valori.

Per $k=0$

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1 (due righe uguali, una riga nulla).

Per $k=1$

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, dato che $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$.

In conclusione, $\dim(\ker f) = 2 \iff k = 0$.

c) Troviamo le componenti di $v = (1,1,1)$ rispetto a $B$.

$$v = (1,1,1) = x(1,0,1) + y(2,0,0) + z(0,1,1)$$
$$= (x+2y,\ z,\ x+z)$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y = 1 \\ z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \longrightarrow z = 1 \qquad \longrightarrow x = 0 \qquad \longrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Quindi $v = 0 \quad \frac{1}{2}$

Allora $f(v) = x'\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dove

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \underset{k=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$f(1,1,1) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## ESERCIZIO 2

Notiamo che $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e i 2 vettori $\overset{v_1}{\overset{\parallel}{(1,0,1)}}$, $\overset{v_2}{\overset{\parallel}{(0,1,1)}}$ sono lin. indipendenti. È dunque possibile completare $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$. Per esempio $v_3 = (1,0,0)$ è tale che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

e dunque $\{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$.

Per il teorema fondamentale delle applicazioni lineari $\exists!\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ lineare tale che

$$f(1,0,1) = (0,0,0,0,0)$$
$$f(0,1,1) = (1,1,1,1,1)$$
$$f(1,0,0) = (0,0,0,0,0) \quad ] \text{ (per esempio)}$$

Si noti che la $f$ richiesta dall'esercizio non è unica, dal momento che dipende dal vettore $v_3$ scelto per completare la base di $\mathbb{R}^3$ e dipende dalla scelta del valore di $f(v_3)$, anch'esso arbitraria.

## Esercizio 2

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -k \\ x_1 + x_3 = 1 \\ kx_1 + kx_3 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & k & k \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -k \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & k & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2$$

Consideriamo l'orlato $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = k$ Quando se $k \neq 0$ allora

$\operatorname{rg}(A) = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e il sistema è compatibile e ammette $\infty^1$ soluzioni

Vediamo ora cosa accade quando $k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo l'altro orlato

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

Orliamo infine il minore $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con la colonna B:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg(A|B) = 3.$$

Concludiamo che per $k=0$ il sistema non è compatibile.

Troviamo le soluzioni nel caso $k \neq 0$.
Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = -k \\ x_1 \quad + x_3 = 1 \\ kx_1 \quad + kx_3 = 1 - ks \end{cases} \qquad x_4 = s$$

$$x_1 = \frac{1}{k} \det\begin{pmatrix} -k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1-ks & 0 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{k}(k - k + ks) = s$$

$$x_3 = 1 - x_1 = 1 - s$$

$$x_2 = k + x_3 = k + 1 - s$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(s,\ k+1-s,\ 1-s,\ s) : s \in \mathbb{R}\} \qquad k \neq 0.$$

ESERCIZIO 4

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -8 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2(-1-\lambda).$$

Vi sono due radici: $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 2

$\lambda = -1$ con molteplicità algebrica 1

Troviamo gli autospazi.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(3) \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3x_1 \\ -4x_1 - x_2 - 8x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1 = 3x_1 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_3 = 3x_3 \end{cases} \iff$$

$\{ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ pongo $x_2 = s$, $x_3 = t$ e ottengo $x_1 = -s-2t$

Quindi

$$V(3) = \{(-s-2t)v_1 + s v_2 + t v_3 : s,t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(-v_1 + v_2)s + (-2v_1 + v_3)t : s,t \in \mathbb{R}\}$$
$$= L(-v_1 + v_2, -2v_1 + v_3)$$
$$= L((-1,0,-1,-1), (-3,-2,-2,-3))$$

In particolare $\{(-1,0,-1,-1),(-3,-2,-2,-3)\}$ è base di $V(3)$ e quindi $m_g(3)=2=m_a(2)$.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(-1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 \\ -4x_1 - x_2 - 8x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ -4x_1 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$ posto $x_2 = t$ si ha $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{matrix}$

Quindi

$$V(-1) = \{0 \cdot v_1 + t \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 : t \in \mathbb{R}\} = L(v_2) = L(0,1,0,0)$$

Una base di $V(-1)$ è $\{(0,1,0,0)\}$. In particolare $m_g(-1) = 1 = m_a(-1)$

Pertanto $f$ è diagonalizzabile e una base di $V$ formata da autovettori di $f$ è

$$\{(-1,0,-1,-1),(-3,-2,-2,-3),(0,1,0,0)\}.$$