# Università di Cagliari

## Corso di Laurea in Matematica

### Prova scritta di Geometria 1

6 febbraio 2023

**Esercizio 1**

Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alle basi $B$ = {(1,1), (-2,0)} di $\mathbb{R}^2$ e $B'$ = {(1,1,1), (0,0,1), (-1,1,0)} di $\mathbb{R}^3$ è

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre l'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$g(x, y, z) = (2x + y, y + z).$$

a) Trovare una base dell'immagine di $f$ al variare di $k \in \mathbb{R}$
b) Trovare la dimensione del nucleo di $g$
c) Trovare il vettore $(g \circ f)(-1,1)$
d) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per ii quali l'applicazione $g \circ f$ è invertibile
e) Posto $k$ = -1, trovare $(g \circ f)^{-1}(1,0)$

**Esercizio 2**

Trovare gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo ha dimensione 3 e in corrispondenza di tali valori trovare una base dello spazio delle soluzioni.

$$\begin{cases} 2kx_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + kx_4 + (1-k)x_5 = 0 \\ x_1 - 2kx_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 3**

a) Verificare che i polinomi $\mathbf{p}_1 = x + x^2, \mathbf{p}_2 = -2x,\ \mathbf{p}_3 = 1 + x^2$ formano una base $B$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2.
b) Si consideri l'endomorfismo $f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la cui matrice associata rispetto alla base $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $f$ è diagonalizzabile.