LE SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 1

6 FEBBRAIO 2023

ESERCIZIO 1

$$B = \{ \underset{e_1}{(1,1)}, \underset{e_2}{(-2,0)} \}$$

$$B' = \{ \underset{e'_1}{(1,1,1)}, \underset{e'_2}{(0,0,1)}, \underset{e'_3}{(-1,1,0)} \}$$

a) $\mathrm{Im}(f) = L(f(e_1), f(e_2))$

$$= L(1\cdot e'_1 + 0\cdot e'_2 + 1\cdot e'_3,\ k\, e'_1 + 0\cdot e'_2 + 2\cdot e'_3)$$

$$= L((0,2,1), (k-2, k+2, k)).$$

I vettori $(0,2,1)$ e $(k-2, k+2, k)$ sono lin. indipendenti $\Leftrightarrow$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ k-2 & k+2 & k \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k-2 & k \end{pmatrix} \neq 0 \text{ oppure } \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k+2 & k \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Leftrightarrow k \neq 2 \ \vee\ 2k - k - 2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 2.$

Quindi una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\begin{cases} \{(0,2,1), (k-2, k+2, k)\} & k \neq 2 \\ \{(0,2,1)\} & k = 2 \end{cases}$

b) $(x,y,z) \in \ker(g) \Leftrightarrow g(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow (2x+y, y+z) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2t \\ y + z = 0 \\ x = t \end{cases} \qquad \text{da cui } x = t,\ y = -2t,\ z = 2t$$

Quindi $\ker(g) = \{(t, -2t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$

$$= L(1, -2, 2)$$

Una base di $\ker(g)$ è $\{(1,-2,2)\}$.

c) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$

$\quad B \qquad\quad B' \qquad\quad B''$

Troviamo $M_{B'B''}(g)$ dove $B'' = \{ \underset{e''_1}{(1,0)}, \underset{e''_2}{(0,1)} \}$

$$g(e'_1) = (3,2) = 3 \cdot e''_1 + 2 \cdot e''_2$$

$$g(e'_2) = (0,1) = 0 \cdot e''_1 + 1 \cdot e''_2$$

$$g(e'_3) = (-1,1) = -1 \cdot e''_1 + 1 \cdot e''_2$$

$$\Rightarrow M_{B'B''}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $M_{BB''}(g \circ f) = M_{B''B'}(g) \cdot M_{BB'}(f)$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3k-2 \\ 3 & 2k+2 \end{pmatrix}$$

$v = (-1,1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \Rightarrow (g \circ f)(v) = x''_1 \cdot e''_1 + x''_2 \, e''_2$ dove

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = M_{BB''}(g \circ f) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3k-2 \\ 3 & 2k+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3k-2 \\ 3+2k+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3k \\ 5+2k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(-1,1) = 3k \cdot e''_1 + (5+2k)\, e''_2 = (3k, 5+2k).$$

d) $g \circ f$ è invertibile $\iff \det\begin{pmatrix} 2 & 3k-2 \\ 3 & 2k+2 \end{pmatrix} \neq 0 \iff$

$4k+4-9k+6 \neq 0 \iff 10-5k \neq 0 \iff k \neq 2.$

e)
Notiamo che $M_{B''B}((g\circ f)^{-1}) = \left(M_{BB''}(g\circ f)\right)^{-1}$

Quindi, posto $k=-1$,

$$M_{B''B'}((g\circ f)^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{t}$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che $(1,0) = 1\cdot e''_1 + 0\cdot e''_2$. Allora

$(g\circ f)^{-1}(1,0) = x\cdot \overset{e_1}{(1,1)} + y\cdot \overset{e_2}{(-2,0)}$ dove

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_{B''B}((g\circ f)^{-1})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)^{-1}(1,0) = 0\cdot e_1 + \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot e_2$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot(-2,0) = \left(\frac{2}{5}, 0\right).$$

BM

ESERCIZIO 2

La matrice associata al sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & k & 1-k \\ 1 & 0 & -2k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria generale sappiamo che $\dim(V_A) = 5 - rg(A)$.

Allora $\dim(V_A) = 3 \iff rg(A) = 2$

Osserviamo che $rg(A) \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$ perché $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

Consideriamo gli orlati di tale minore. Occorre che il loro det $= 0$.

- $\det\begin{pmatrix} 0 & 2k & -1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2k \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2k(1-k) = 0 \iff$

$k = 0 \lor k = 1$

Controllo i rimanenti minori separatamente per $k=0$ e per $k=1$.

$\underline{k=0}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II col} \to \text{II} + \text{III}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$

$\Rightarrow$ per $k=0$ $\quad rg(A) = 3$

$\underline{k=1}$ $$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & 2 & 1 & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}} & 1 \\ & 0 & -2 & & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{II col} \to \text{II} + \text{III}}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ (due righe uguali)

- $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ (due righe uguali).

Quindi tutti gli orlati di ordine 3 di $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ hanno $\det = 0 \iff k = 1$.

In conclusione $\dim(V_A) = 3 \iff k = 1$.

Troviamo una base di V_A per $k=1$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_4 = -2r - s - t \\ x_1 + x_4 = -2s \end{cases} \qquad (x_2 = r,\ x_3 = s,\ x_5 = t)$$

da cui $x_4 = 2r + s + t$ e quindi $x_1 = -x_4 - 2s$
$= -2r - 3s - t$

Allora

$$V_1 = \{(-2r-3s-t,\ r,\ s,\ 2r+s+t,\ t) : r,s,t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(-2r, r, 0, 2r, 0) + (-3s, 0, s, s, 0) + (-t, 0, 0, t, t) : r,s,t \in \mathbb{R}\} =$$

$= \{ r(-2,1,0,2,0) + s(-3,0,1,1,0) + t(-1,0,0,1,1) : r,s,t \in \mathbb{R} \}$

$= L((-2,1,0,2,0),(-3,0,1,1,0),(-1,0,0,1,1)).$

Si noti che i vettori $(-2,1,0,2,0)$, $(-3,0,1,1,0)$ e $(-1,0,0,1,1)$ sono lin. indipendenti perché

$$rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{essendo } \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

e quindi una base di V_A è

$B = \{ (-2,1,0,2,0), (-3,0,1,1,0), (-1,0,0,1,1) \}.$

ESERCIZIO 3

a) Dato che $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ basta verificare che P_1, P_2, P_3 sono linearmente indipendenti.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = \mathbf{0}$.

Allora

$$\mathbf{0} = \lambda_1(x+x^2) + \lambda_2(-2x) + \lambda_3(1+x^2) = \lambda_3 + (\lambda_1 - 2\lambda_2)x + (\lambda_1+\lambda_3)x^2$$

$$\mathbf{0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

il sistema è di Cramer e quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

b) $$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & k & k-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ k & k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(k - \lambda - k\lambda + \lambda^2 - k)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - k\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda - 1 - k)$$

Otteniamo i seguenti autovalori:

k	AUTOVALORI	m_a
$k \neq 1$ e $k \neq -1$	0	1
	2	1
	$k+1$	1
$k = 1$	0	1
	2	2
$k = -1$	0	2
	2	1

Concludiamo subito che per $k \neq 1$ e $k \neq -1$, f ammette $3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$ autovalori reali e distinti, e quindi è diagonalizzabile.

Per $k=1$, abbiamo $1 \leq m_g(0) = m_a(0) = 1 \Rightarrow m_a(0) = m_g(0) = 1$.

Quanto al secondo autovalore, abbiamo

$$m_g(2) = 3 - rg(A - 2 I_3) \underset{k=1}{=} 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq m_a(2)$$

2 colonne lin. indip.

Concludiamo che f non è diagonalizzabile.

Per $k=-1$, abbiamo $1 \leq m_g(2) = m_a(2) = 1 \Rightarrow m_a(2) = m_g(2) = 1$

Inoltre $m_g(0) = 3 - rg(A - 0 \cdot I_3) = 3 - rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq m_g(0) \Longrightarrow$

f non è diagonalizzabile.