Problema 1.

Sia $f : A \to B$ una funzione, e siano $S, T \subseteq A$. Si provi che

(1) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

(2) $f(S) \setminus f(T) \subseteq f(S \setminus T)$

Problema 2.

Dato un intero $p \in \mathbb{Z}$, sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione

$$n \mapsto \begin{cases} n/p & \text{se } p \text{ divide } n \\ n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta, se f è iniettiva e/o suriettiva.

Problema 3.

Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ vale l'identità

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Problema 4.

Dato $x \in \mathbb{N}$ si consideri il numero complesso $z = (-1)^x$.

(a) Scrivere, utilizzando la formula di Eulero, il numero complesso z in forma esponenziale;

(b) Dire per quali valori di x si ha che $z \in \mathbb{R}$.

Problema 5.

Sia X un insieme e siano R_1 e R_2 due relazioni di equivalenza su X. Dimostrare che $R_1 \cap R_2$ è una relazione di equivalenza.

Problema 6.

Mostrare che il seguente sistema è equivalente ad un sistema per il quale si applica il Teorema Cinese del resto

$$\begin{cases} 2x \equiv_9 -3 \\ 3x \equiv_8 7 \end{cases}$$

Determinare quindi tutte le soluzioni intere del sistema.