Selezioni misurabili

Paula Tittel
con la supervisione del Prof. Antonio Iannizzotto

Università degli studi di Cagliari - Teoria dei giochi

Reading Course 2022/23

Sommario

In questo testo consideriamo le multifunzioni. Più propriamente vogliamo dimostrare che certe multifunzioni hanno una selezione "buona" (nel nostro caso Borel misurabile). Per questo richiamiamo prima l'algebra di Borel [Bau21]. Cerchiamo anche di trovare una metrica limitata equivalente alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$ per potere dimostrare finalmente il teorema di Kuratowski e Ryll-Nardzewski [AC84] che individua delle multifunzioni che hanno una selezione Borel misurabile.

Indice

1 Preparazione

1.1 L'algebra di Borel

Ricordiamo alcune definizioni e proprietà della σ-algebra di Borel.

Definizione 1. *Sia X un insieme e $\mathcal{A} \subseteq P(X)$. $\mathcal{A}$ si chiama σ-algebra se*
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$,
(iii) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Proposizione 2. *Sia X un insieme e $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ una σ-algebra. Allora*
(i) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$,
(ii) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Dimostrazione. (i) $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A}$,
(ii) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_1 \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{A}$. □

Definizione 3. *La più piccola σ-algebra di $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti gli aperti si chiama algebra di Borel (notazione: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Gli elementi di $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si chiamano boreliani.*

Osservazione 4. *$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ è l'intersezione di tutte le σ-algebre di $\mathbb{R}^n$ che contengono tutti gli aperti di $\mathbb{R}^n$ cioè*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B}' \subseteq P(\mathbb{R}^n)\ \sigma\text{-algebra} \\ A \in \mathcal{B}'\ \forall A \subseteq \mathbb{R}^n\ \text{aperto}}} \mathcal{B}'.$$

Definizione 5. *Una funzione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si chiama Borel misurabile se le controimmagini degli aperti sono boreliani.*

Proposizione 6. *Una funzione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è Borel misurabile se e solo se le controimmagini dei chiusi sono boreliani.*

Dimostrazione. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso. Allora $\mathbb{R}^n \setminus K$ è aperto e $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus K) = \mathbb{R}^m \setminus f^{-1}(K)$ è boreliano. Segua che anche $f^{-1}(K) = \mathbb{R}^m \setminus (\mathbb{R}^m \setminus f^{-1}(K))$ è boreliano.
Viceversa sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora $\mathbb{R}^n \setminus U$ è chiuso e $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U) = \mathbb{R}^m \setminus f^{-1}(U)$ è boreliano. Segua che anche $f^{-1}(U) = \mathbb{R}^m \setminus (\mathbb{R}^m \setminus f^{-1}(U))$ è boreliano. □

Nel testo seguente scriviamo solo "misurabile" per indicare "Borel misurabile".

1.2 Metrica limitata equivalente alla metrica euclidea

Per la dimostrazione del teorema principale di questo testo consideriamo $\mathbb{R}^n$ con una metrica limitata che è equivalente alla metrica euclidea, cioè gli aperti sono gli stessi insiemi per le due metriche. (Allora si conservano le proprietà delle quali abbiamo bisogno. Per esempio sono continue le stesse funzioni per le due metriche visto che una funzione è continua se e solo se le controimmagini dei aperti sono aperti). Una tale metrica esiste per la seguente proposizione.

Proposizione 7. *Esiste una metrica $\tilde{d} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che è limitata (in particolare è possibile scegliere $\tilde{d}$ tale che $\tilde{d}(x, y) < 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$) ed equivalente alla metrica euclidea $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ (cioè sono aperti gli stessi insiemi per le due metriche).*

Dimostrazione. Consideriamo

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Per $d(x, y) \geq 0$ vale ovviamente $\tilde{d}(x, y) < 1$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Si verifica anche che $\tilde{d}$ è una metrica è sono aperti gli stessi insiemi per $\tilde{d}$ e d (topologia [Loi13]). $\square$

1.3 Controimmagini delle multifunzioni

Definizione 8. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ insiemi. Una multifunzione $F : X \to P(Y)$ è una funzione i cui valori sono sottoinsiemi di Y.*

A differenza delle funzioni univoche, la controimmagine di una multifunzione F si può considerare in due modi diversi [Ian21].

Definizione 9. *Sia $F : X \to P(Y)$ una multifunzione e $A \subseteq Y$. Definiamo*
(i) $F^-(A) = \{x \in X \mid F(x) \cap A \neq \emptyset\}$,
(ii) $F^+(A) = \{x \in X \mid F(x) \subseteq A\}$.

Nel testo seguente quando consideriamo una controimmagine di una multifunzione F consideriamo sempre F^-.

1.4 Notazioni

Sia $\tilde{d}$ una metrica. Per $x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ poniamo

$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{d}(x, y) < \epsilon\}.$$

Per $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ poniamo

$$B_\epsilon(A) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{d}(y, A) < \epsilon\}$$

intanto che

$$\tilde{d}(y, A) = \inf_{x \in A} \tilde{d}(y, x).$$

2 Il teorema di Kuratowski e Ryll-Nardsewski

Teorema 10. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e $F : I \to P(\mathbb{R}^n)$ una multifunzione a valori chiusi tale che le controimmagini degli insiemi aperti siano boreliane. Allora esiste una selezione misurabile $s : I \to \mathbb{R}^n$ di F [AC84].*

Dimostrazione. Consideriamo $\mathbb{Q}^n$ come sottoinsieme denso e numerabile di $\mathbb{R}^n$. Per la numerabilità possiamo ordinare $\mathbb{Q}^n$ in una successione che chiamiamo $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Inoltre per la Proposizione 7 possiamo considerare $\mathbb{R}^n$ con una metrica limitata $\tilde{d}$ topologicamente equivalente a quella euclidea e tale che $\tilde{d}(x,y) < 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Definiamo

$$\epsilon_0 = 1; \quad \epsilon_i = \frac{1}{2^i},\ i \in \mathbb{N}.$$

Dimostriamo che esiste una successione di funzioni $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ di I in $\mathbb{R}^n$ tale che valgono le tre seguenti proprietà.

$$s_m \text{ è misurabile ed ha valori in } \mathbb{Q}^n,\ m \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$
$$s_m(x) \in B_{\epsilon_m}(F(x)),\ m \in \mathbb{N}_0,\ x \in I \tag{2}$$
$$s_m(x) \in B_{\epsilon_{m-1}}(s_{m-1}(x)),\ m \in \mathbb{N},\ x \in I. \tag{3}$$

Dimostriamo per induzione che esiste una tale successione. Fissiamo

$$s_0(x) = c_0, \quad x \in I.$$

s_0 è constante e per questo continua, allora in particolare misurabile (perché le controimmagini degli aperti sono aperti, allora boreliane). Cioè vale la (1). Siccome $\tilde{d}(x,y) < 1 = \epsilon_0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, vale anche la (2). La (3) si considera solo per $m > 0$.
Poniamo adesso le funzioni s_i $i = 0, ..., m-1$ per le quali valgono (1), (2) e (3). Dimostriamo che allora per s_m valgono (1), (2) e (3). Per questo definiamo prima i seguenti insiemi.

$$\begin{aligned}
&A_j = F^-(B_{\epsilon_m}(c_j)) \cap s_{m-1}^{-1}(B_{\epsilon_{m-1}}(c_j)),\ j \in \mathbb{N}_0,\\
&E_0 = A_0,\\
&E_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{j-1} E_i\right),\ j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Constatiamo che gli E_j sono boreliani per $j \in \mathbb{N}_0$. $F^-(B_{\epsilon_m}(c_j))$ è boreliano per il presupposto, $s_{m-1}^{-1}(B_{\epsilon_{p-1}})$ è boreliano perché s_{m-1} è misurabile per la (1). Allora A_j è boreliano perché è intersezione di due boreliani e E_j è boreliano perché è il complementario di boreliani. Mostriamo che

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} E_j = I. \tag{4}$$

Sia $x \in I$. Per la (2) vale

$$s_{m-1}(x) \in B_{\epsilon_{m-1}}(F(x)).$$

Consideriamo

$$U := B_{\epsilon_{m-1}}(s_{m-1}(x)) \cap B_{\epsilon_{m-1}}(F(x)).$$

U ovviamente è non vuoto (per esempio $s_{m-1}(x) \in U$). U è l'intersezione di due aperti ed è aperta. Allora per la densità di $\mathbb{Q}^n$ esiste un $c_j \in U$. Allora si può dedurre che $x \in A_j$ come segue.

$$\begin{aligned} & c_j \in B_{\epsilon_{m-1}}(F(x)) \\ \Rightarrow & F(x) \cap B_{\epsilon_{m-1}}(c_j) \neq \emptyset \\ \Rightarrow & x \in F^-(B_{\epsilon_{m-1}}(c_j)). \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & c_j \in B_{\epsilon_{m-1}}(s_{m-1}(x)) \\ \Rightarrow & s_{m-1}(x) \in B_{\epsilon_{m-1}}(c_j) \\ \Rightarrow & x \in s_{m-1}^{-1}(B_{\epsilon_{m-1}}(c_j)). \end{aligned} \tag{6}$$

Per il (5) e il (6) $x \in A_j$. Per

$$E_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{j-1} E_i \right) \Longleftrightarrow A_j = \bigcup_{i=0}^{j} E_i$$

segue che $x \in E_i$ per $i \in \{0, ..., j\}$. Allora abbiamo dimostrato la (4). Per definizione gli E_j sono disgiunti. Allora possiamo definire s_m come

$$s_m(x) = c_j, \quad \forall x \in E_j \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Verifichiamo che valgono (1), (2), (3) per s_m. Sia $D \subseteq \text{Im } s_m \subseteq C = \{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ allora $D = \{c_i\}_{i \in J \subseteq \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} & s_m^{-1}(c_j) = E_j, \ \forall j \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow & s_m^{-1}(D) = s_m^{-1}(\{c_i\}_{i\in J}) = \bigcup_{i\in J} E_i. \end{aligned}$$

Allora $s_m^{-1}(D)$ è boreliano (unione numerabile di insiemi boreliani) e vale la (1).

$$\begin{aligned} & x \in E_j \Rightarrow x \in A_j \Rightarrow x \in F^-(B_{\epsilon_m}(c_j)) \\ \Rightarrow & F(x) \cap B_{\epsilon_m}(c_j) \neq \emptyset \Rightarrow F(x) \cap B_{\epsilon_m}(s_m(x)) \neq \emptyset \\ \Rightarrow & s_m(x) \in B_{\epsilon_m}(F(x)). \end{aligned}$$

Allora vale la (2).

$$\begin{aligned} & x \in E_j \Rightarrow x \in A_j \Rightarrow x \in s_{m-1}^{-1}(B_{\epsilon_{m-1}}(c_j)) \\ \Rightarrow & s_{m-1}(x) \in B_{\epsilon_{m-1}}(c_j) \Rightarrow c_j \in B_{\epsilon_{m-1}}(s_{m-1}(x)) \\ \Rightarrow & s_m(x) \in B_{\epsilon_{m-1}}(s_{m-1}(x)). \end{aligned}$$

Allora vale la (3).
Dimostriamo che $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a una selezione $s(x) \subseteq F(x)$. Sia $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\tilde{d}(s_m(x), s_p(x)) &\leq \sum_{i=m+1}^{p} \tilde{d}(s_i(x), s_{i-1}(x)) \\ &\overset{(4)}{<} \sum_{i=m+1}^{p} \epsilon_{i-1} \\ &= \sum_{i=m+1}^{p} \frac{1}{2^{i-1}} \\ &= \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^i}.\end{aligned}$$

Visto che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ converge esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\tilde{d}(s_m(x), s_p(x)) < \sum_{i=m}^{p-1} \frac{1}{2^i} < \delta, \quad \forall m, p \geq N.$$

Allora $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e converge in $\mathbb{R}^n$. Si ha $\tilde{d}(s(x), F(x)) = 0$ per il ragionamento seguente.

$$\begin{aligned}\tilde{d}(s(x), F(x)) &\leq \lim_{m\to\infty} (\tilde{d}(s_m(x), s(x)) + \tilde{d}(s_m(x), F(x))) \\ &\overset{(3)}{<} \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=m}^{\infty} \tilde{d}(s_{i+1}(x), s_i(x)) + \epsilon_m \right) \\ &\overset{(4)}{<} \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^m} \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Siccome $F(x)$ è chiuso vale $s(x) \in F(x)$. Manca da mostrare che s è misurabile. Per questo mostriamo che le controimmagini dei chiusi sono boreliani. Sia $K \in \mathbb{R}^n$ chiuso. Sia

$$K_m = B_{\epsilon_m}(K).$$

Ogni $s_m^{-1}(K_m)$ è boreliano (perché è controimmagino di un aperto). Dimostriamo

$$s^{-1}(K) = \bigcap_{m=0}^{\infty} s_m^{-1}(K_m),$$

allora che $s^{-1}(K)$ è boreliano come intersezione numerabile dei boreliani.
Sia $x \in s^{-1}(K)$ allora $s(x) \in K$. Per $s(x) \in F(x)$ e per il (2) abbiamo

$$\tilde{d}(s_m(x), s(x)) < \epsilon_m, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

allora $s_m(x) \in K_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, allora $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} s_m^{-1}(K_m)$.
Per l'altra inclusione sia $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} s_m^{-1}(K_m)$, allora $s_m(x) \in K_m = B_{\epsilon_m}(K), \forall m \in \mathbb{N}$. Abbiamo $d(s(x), K) = 0$ per

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(s(x), K) &\leq \lim_{m\to\infty} (\tilde{d}(s_m(x), s(x)) + \tilde{d}(s_m(x), s(x))) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \left(\epsilon_m + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Perché K è chiuso abbiamo $s(x) \in K$ allora $x \in s^{-1}(K)$. $\square$

Riferimenti bibliografici

[AC84] Jean-Pierre Aubin e Arrigo Cellina. *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, 1984. Cap. 1.14.

[Loi13] Andrea Loi. *Introduzione alla topologia generale*. ARACNE editrice, 2013. Cap. 2.

[Bau21] Wolfram Bauer. *Analysis III*. 2021.

[Ian21] Antonio Iannizzotto. *Introduzione alla Teoria dei Giochi*. 2021. Cap. 2.