

Università di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Geometria 1

20 Gennaio 2023

Esercizio 1

Si considerino l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + kx_3, kx_1 - x_2 - kx_4)$$

e l'applicazione lineare $g: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alle basi $B = \{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ e $B' = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1), (0,0,-1,0)\}$ di \mathbb{R}^4 è la seguente

$$M_{B'B}(g) = \begin{pmatrix} h & 0 & h \\ 1 & h & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Trovare una base di $\ker(f)$ al variare del parametro k
- b) Trovare una base di $\text{Im}(g)$ al variare del parametro h
- c) Posto $k = 2$ e $h = 0$, stabilire se la somma $\ker(f) + \text{Im}(g)$ è diretta.

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 & & & + x_4 = 1 \\ & kx_2 + (1-k)x_3 + x_4 = 0 \\ kx_1 & & + (1-k)x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Sia $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 e $f: V \rightarrow V$ l'endomorfismo di V definito da

$$f \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z & y + z \\ y + z & -3z \end{pmatrix}.$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di V formata da autovettori di f .