Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Equazioni differenziali

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23

I PRIMI ESEMPI GIÀ VISTI (22/11)

$$y' = y, \qquad y'' = -y$$

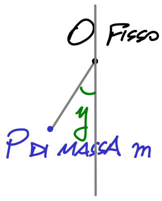
IN GENERALE $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

SOLUZIONE È UNA FUNZIONE y CHE SODDISFA L'EQUAZIONE IN UN INTERVALLO (QUESTA DEFINIZIONE SI PUÒ APPLICARE!)

L'IMPORTANZA STA 1) NELLA MODELLIZZAZIONE DI FENOMENI FISICI, BIOLOGICI, ECONOMICI, ... 2) NELL'ISPIRAZIONE DI CONCETTI TEORICI (SPAZIO VETTORIALE, ...)

IL SETTORE È VASTO E INCOMPLETO! IN PRIMA BATTUTA SI DISTINGUE FRA EQUAZIONI LINEARI E NON LINEARI. UNA NON LINEARE È

$$y'' = -\operatorname{sen} y$$



CHE MODELLIZZA IL MOTO DEL PENDOLO CON L'ANGOLO y FUNZIONE DEL TEMPO x

LA NONLINEARITÀ RISIEDE NEL FATTO CHE L'INCOGNITA $y(x)$ È ARGOMENTO DI $\operatorname{sen} \alpha$

ALTRI ESEMPI: $y = y^2$, $y = 1 + y^2$

DEFINIZIONE: LE EQUAZIONI LINEARI SONO

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \cdot y^{(k)}(x) = f(x)$$

COME AD ESEMPIO $y' - y = 0$ DOVE n (ORDINE DELL'EQUAZIONE) $= 1$ E $a_1(x) = 1$ E $a_0(x) = -1$ PER OGNI x. ESSENDO $f(x) = 0$ L'EQUAZIONE SI DICE OMOGENEA. SIMILMENTE $y'' + y = 0$ HA ORDINE $n = 2$ E $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, $f(x) = 0$.

ME 21 DIC 2022

FORMA NORMALE

UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE, LINEARE O MENO, SI DICE IN FORMA NORMALE QUANDO HA LA FORMA $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

ESEMPI: $y' = y$, $y'' = -y$, $y' = y^2$, ...

L'IMPORTANZA DELLA FORMA NORMALE STA NEL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ IN PICCOLO:

IL PROBLEMA AI VALORI INIZIALI (PROBLEMA DI CAUCHY)

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

CON x_0, y_0 ASSEGNATI, AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE IN UN OPPORTUNO INTORNO $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

IPOTESI: $f(x,y)$ CONTINUA RISPETTO A (x,y); CONDIZIONE DI LIPSCHITZ RISPETTO A y:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

UN CASO PARTICOLARISSIMO È L'EQUAZIONE LINEARE IN FORMA NORMALE $y' = f(x)$ CON $f(x)$ FUNZIONE DATA. SE $f(x)$ HA UNA PRIMITIVA $F(x)$ ALLORA LE SOLUZIONI SONO $y(x) = F(x) + C$. UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA RISOLUBILITÀ È CHE $f(x)$ SIA CONTINUA IN UN INTERVALLO (TEOREMA FONDAMENTALE, 15/11). UN'EQUAZIONE CHE NON HA SOLUZIONE IN NESSUN INTORNO DELL'ORIGINE È $y'(x) = H(x)$ (LA FUNZIONE A GRADINO DI HEAVISIDE).

ME 21 DIC 2022

POSSIAMO FACILMENTE RISOLVERE L'EQUAZIONE $y'=y$. SAPPIAMO CHE LE FUNZIONI $y(x)=Ce^x$ SONO SOLUZIONI PERCHÉ $y'(x)=Ce^x$, $C\in\mathbb{R}$.

SI NOTI CHE CON $C=0$ SI HA $y(x)=0$ IN $\mathbb{R}$ (SOLUZIONE BANALE). PRENDO UNA FUNZIONE $y(x)$ DERIVABILE IN UN INTERVALLO I E CON $y(x_0)\neq 0$, QUINDI $y(x)\neq 0$ IN UN INTORNO DI x_0. SO CHE

$$\frac{y'(x)}{y(x)}=1$$

IN TALE INTORNO, DUNQUE

$$\frac{d}{dx}\log|y(x)|=1$$

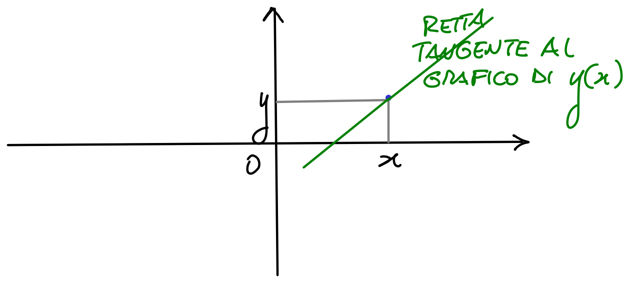
QUINDI $\log|y(x)|$ È UNA PRIMITIVA DI 1 E PERCIÒ ESISTE $\alpha\in\mathbb{R}$ TALE CHE $\log|y(x)|=x+\alpha$ DA CUI

$$|y(x)|=Ce^x \quad \text{DOVE } C=e^\alpha>0$$

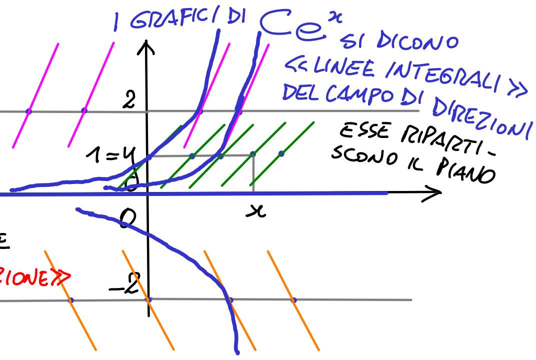
DUNQUE NECESSARIAMENTE $y(x)=\pm Ce^x$

L'INSIEME $y(x)=Ce^x$, $C\in\mathbb{R}$, È DETTO INTEGRALE GENERALE (LA GENERICA SOLUZIONE) DELL'EQUAZIONE $y'=y$.

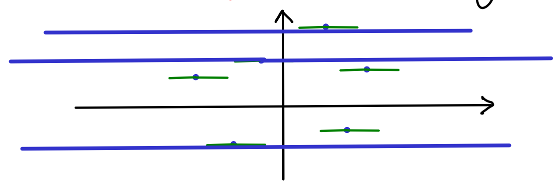
VEDIAMO L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'EQUAZIONE $y'=f(x,y(x))$



L'EQUAZIONE $y'=y$ ASSEGNA UN CAMPO DI DIREZIONI DETTO ANCHE «DISTRIBUZIONE»



CASO BANALE: $y'=0$, SOLUZIONI: $y=C$



AVENDO DETERMINATO L'INTEGRALE GENERALE DI $y'=y$, CHE È $y(x)=Ce^x$, $C\in\mathbb{R}$,

POSSIAMO RISOLVERE IL PROBLEMA
$$\begin{cases} y'=y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

BASTA TROVARE C TALE CHE $Ce^{x_0}=y_0$

QUINDI $C=y_0e^{-x_0}$ E LA SOLUZIONE È

$$y(x)=y_0e^{x-x_0}.$$

VERIFICA:

$$y'(x)=y_0e^{x-x_0} \quad \text{E} \quad y(x_0)=y_0.$$

STRUTTURA DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$$

SI VEDE FACILMENTE CHE SE y_1, y_2 SONO DUE SOLUZIONI E $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ È UNA SOLUZIONE:

SICCOME $y^{(k)}(x) = \lambda_1 y_1^{(k)}(x) + \lambda_2 y_2^{(k)}(x)$ PER OGNI $k = 0, \dots, n$, MOLTIPLICANDO PER $a_k(x)$ E SOMMANDO SU k SI TROVA $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x)$

$$= \lambda_1 \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y_1^{(k)}(x) + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y_2^{(k)}(x) = 0.$$

SI DIMOSTRA (ANALISI MATEMATICA 3) CHE SE GLI $a_k(x)$ SONO CONTINUI IN UN INTERVALLO I E $a_n(x) \neq 0$ IN I ESISTE UNA BASE DI n SOLUZIONI $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ESSENDO n L'ORDINE DELL'EQUAZIONE. INVOCANDO QUESTO RISULTATO, E VISTO CHE $y_1(x) = \cos x$ E $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ SONO SOLUZIONI DI $y'' = -y$ LINEARMENTE INDIPENDENTI L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$.

SAPENDO CHE ESISTE UNA BASE $y_1(x), \dots, y_n(x)$ DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$$

COME SI PROCEDE PER TROVARLA? SONO NOTI MOLTI METODI DI APPROSSIMAZIONE NUMERICA. SE $a_k(x) \equiv a_k$ COSTANTE, EULERO OSSERVÒ CHE LA FUNZIONE $y(x) = e^{\lambda x}$ È UNA SOLUZIONE SE E SOLO SE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$$

(EQUAZIONE CARATTERISTICA). ESEMPIO: STUDIAMO L'EQUAZIONE $y'' - 5y' + 6y = 0$. LA FUNZIONE $y(x) = e^{\lambda x}$ È UNA SOLUZIONE SE E SOLO SE $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, DUNQUE SE E SOLO SE $\lambda = 3$ E $\lambda = 2$. ALLORA $y_1(x) = e^{3x}$ E $y_2(x) = e^{2x}$ SONO DUE SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI E PERCIÒ L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = Ae^{3x} + Be^{2x}$.

DIMOSTRAZIONE: SOSTITUENDO $y(x) = e^{\lambda x}$ QUINDI $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ SI TROVA $\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ E LA TESI SEGUE.

GI 22 DIC 2022

ESEMPIO: $y'' + 2y' + y = 0$ HA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ LA CUI SOLUZIONE È $\lambda = -1$ (DOPPIA) QUINDI LA FUNZIONE $y(x) = e^{-x}$ È UNA SOLUZIONE CHE, DA SOLA, NON GENERA TUTTE LE ALTRE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $y(x) = x^j e^{\lambda x}$ È UNA SOLUZIONE PER OGNI $j < m(\lambda)$ LA MOLTEPLICITÀ DELLA RADICE λ. NEL NOSTRO CASO LA FUNZIONE $y(x) = x e^{-x}$ SODDISFA

$$(e^{-x} - xe^{-x})' + 2e^{-x} - 2xe^{-x} + xe^{-x} = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} + 2e^{-x} - xe^{-x} = 0,$$

QUINDI L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = (A + Bx)e^{-x}$ CON $A, B \in \mathbb{R}$.

GLI ERRORI DEL PRINCIPIANTE:

$y'' = -\omega^2 y$ HA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ (NON $\lambda^2 + \omega^2\lambda = 0$) LE CUI SOLUZIONI SONO IMMAGINARIE:

$\lambda = \pm i\omega$ QUINDI LE FUNZIONI $y_1(x) = e^{i\omega x}$ E $y_2(x) = e^{-i\omega x}$ SONO SOLUZIONI E SI PUÒ SCRIVERE L'INTEGRALE GENERALE COME $y(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

SAPENDO CHE $e^{i\omega x} = \cos\omega x + i \operatorname{sen}\omega x$

E $e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i \operatorname{sen}\omega x$ TROVIAMO

$$y(x) = (C_1 + C_2)\cos\omega x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\omega x$$

FRA LE QUALI QUELLE A VALORI REALI SI OTTENGONO QUANDO $C_1 + C_2 = A$ E $i(C_1 - C_2) = B$

ALTRO ESEMPIO: $y'' = 0$ HA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 = 0$ LA CUI SOLUZIONE È $\lambda = 0$ (DOPPIA) QUINDI LE FUNZIONI $y_1(x) = e^{0x} \equiv 1$ E $y_2(x) = x \cdot e^{0x} = x$ E L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = A + Bx$.

« L'ERRORE » STA NELL'UTILIZZO DI UN METODO IMPORTANTE IN UN PROBLEMA ELEMENTARE.

EQUAZIONI LINEARI NON OMOGENEE

COSA SUCCEDE SE IL SECONDO MEMBRO NON È NULLO? IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE CONSENTE DI DETERMINARE COEFFICIENTI VARIABILI $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ TALI CHE LA FUNZIONE $y(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\, y_j(x)$ SIA UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$

SAPENDO n SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI $y_1(x), \dots, y_n(x)$ DELL'EQUAZIONE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0.$$

GI 22 DIC 2022

LA STRUTTURA DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$$

SE HO DUE FUNZIONI $y(x)$ E $z(x)$ CHE SODDISFANO $\sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$

E $\sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, z^{(k)}(x) = f(x)$

SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO TROVO CHE LA FUNZIONE $y(x)-z(x)$ SODDISFA

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(x) \left(y(x) - z(x) \right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, z^{(k)}(x) = 0$$

E VICEVERSA: LA SOMMA DI $z(x)$ CON UNA SOLUZIONE DI $\sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$

SODDISFA $\sum_{k=0}^{m} a_k(x) \left(z(x) + y(x) \right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, z^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$

DUNQUE: SE L'INTEGRALE GENERALE DI $\sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$ È $y(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j\, y_j(x)$ ALLORA QUELLO DI $\sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$ È

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j\, y_j(x) + z(x)$$

ESEMPI

L'INTEGRALE GENERALE DI $y'' = -y$ È $y(x) = A\cos x + B\sin x$. STUDIAMO $y'' + y = 1$. BASTA OSSERVARE CHE $z(x) \equiv 1$ È UNA SOLUZIONE, QUINDI L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = A\cos x + B\sin x + 1$

STUDIAMO $y'' + y = x$. UNA SOLUZIONE È $z(x) = x$, QUINDI L'INTEGRALE GENERALE È

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + x.$$

STUDIAMO $y'' + y = mx + q$. L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = A\cos x + B\sin x + mx + q$, $A, B \in \mathbb{R}$.

STUDIAMO $y'' + y = x^2$ PONIAMO $z(x) = ax^2 + bx + c$ E TROVIAMO $z'(x) = 2ax + b$, $z''(x) = 2a$

QUINDI SODDISFIAMO L'EQUAZIONE SE

$$2a + ax^2 + bx + c = x^2$$

E CIOÈ SE $2a + c = 0$, $b = 0$ E $a = 1$

DUNQUE $c = -2a = -2$. IL CHE SIGNIFICA $z(x) = x^2 - 2$ VERIFICA: $z''(x) = 2$ ECC. L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = A\cos x + B\sin x + x^2 - 2$

STUDIAMO $y'' + y = e^x$. $z(x) = \frac{1}{2} e^x$

QUINDI L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2} e^x$.

ESERCIZIO: RISOLVERE $y''+y=e^{-x}$; RISOLVERE $y''+y=\operatorname{sen}2x$. PROCEDERE PER SOMIGLIANZA.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

SAPPIAMO CHE LE SOLUZIONI DI $y'=y$ SONO $y(x)=Ce^{x}$. STUDIAMO $y'=y^2$. UNA SOLUZIONE È $y(x)\equiv 0$. CONSIDERO UNA SOLUZIONE $y(x)\neq 0$ IN UN INTERVALLO I E RISCRIVO L'EQUAZIONE NELLA FORMA $\dfrac{y'(x)}{y^2(x)}=1$.

SVOLGO L'INTEGRALE INDEFINITO $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx$

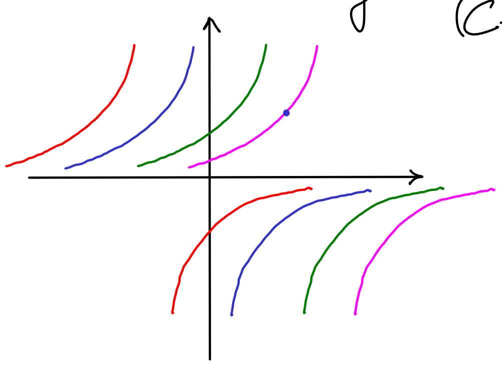
CON LA SOSTITUZIONE $t=y(x)$ E TROVO

$$\int\frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx=\int\frac{dt}{t^2}=\frac{-1}{t}+C=\frac{-1}{y(x)}+C$$

QUINDI $\dfrac{-1}{y(x)}=x+C$ DA CUI RICAVIAMO

$y(x)=\dfrac{-1}{x+C}$ OVVERO $y(x)=\dfrac{1}{C-x}$

ADESSO DERIVANDO TROVIAMO $y'(x)=\dfrac{1}{(C-x)^2}$

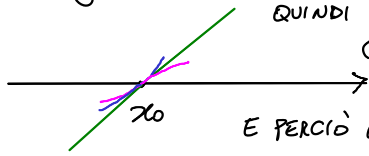


GI 22 DIC 2022

ESEMPIO: $y'=1+y^2$ NON HA SOLUZIONI BANALI

SE $y(x_0)=0$ ALLORA $y'(x_0)=1$ E PERCIÒ

$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

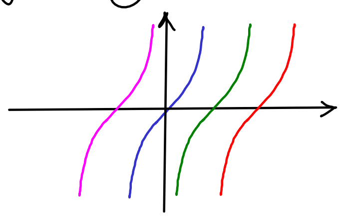


QUINDI $y(x)=x-x_0+o(x-x_0)$ E PERCIÒ $y(x)$ HA IL SEGNO DI $x-x_0$ IN UN INTORNO DI x_0.

POSSIAMO BENISSIMO SCRIVERE L'EQUAZIONE NELLA FORMA $\dfrac{y'(x)}{1+y^2(x)}=1$ CERCHIAMO LE PRIMITIVE DI $\dfrac{y'(x)}{1+y^2(x)}$. DOBBIAMO SVOLGERE $\displaystyle\int\frac{y'(x)}{1+y^2(x)}\,dx=\operatorname{arctg}(y(x))+C$ RISULTATO CHE SI OTTIENE PONENDO $t=y(x)$.

IN CONCLUSIONE $\operatorname{arctg}(y(x))=x+C$

QUINDI $y(x)=\operatorname{tg}(x+C)$



ESEMPIO: $y'=xy^2$ LA RISOLVIAMO CON LA NOTAZIONE DI LEIBNIZ: $y(x)\equiv 0$ È UNA SOLUZIONE. SE UNA $y(x)$ È DIVERSA DA 0 IN UN INTERVALLO I, ESSA SODDISFA

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$$

QUINDI $\dfrac{-1}{y}=\dfrac{1}{2}x^2+C$ DA CUI $y=\dfrac{2}{C-x^2}$