

Controlli Automatici

Schemi avanzati per il controllo di processo. Parte seconda

Controllo in avanti («feedforward»)

Sostanziali miglioramenti nelle prestazioni di sistemi di controllo ad anello singolo o in cascata possono essere ottenuti adottando degli schemi modificati, in cui in ingresso al processo vengono sovrapposti dei contributi aggiuntivi determinati secondo architetture **a ciclo aperto**.

Tali contributi aggiuntivi sono essenzialmente di due tipi:

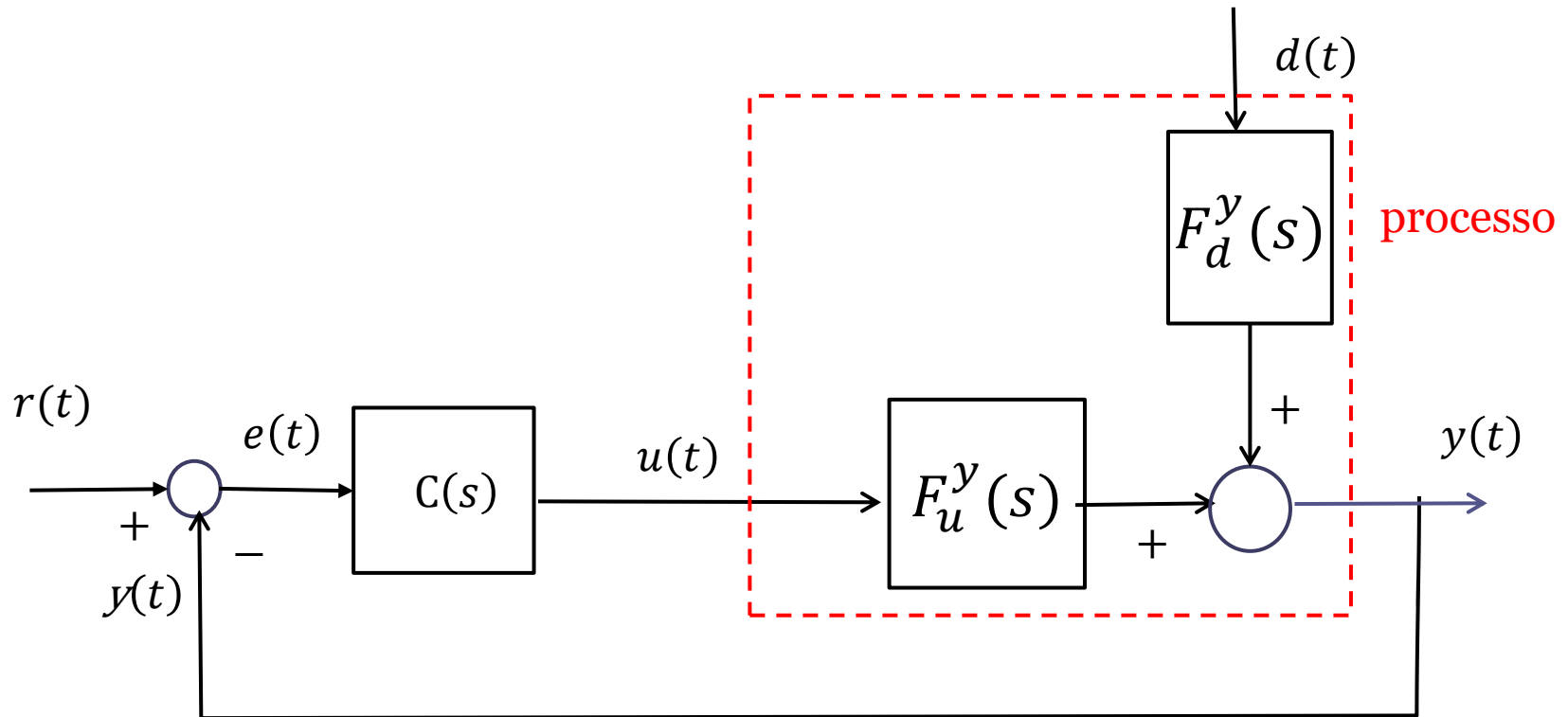
Dipendenti dal set-point

Dipendenti dal disturbo

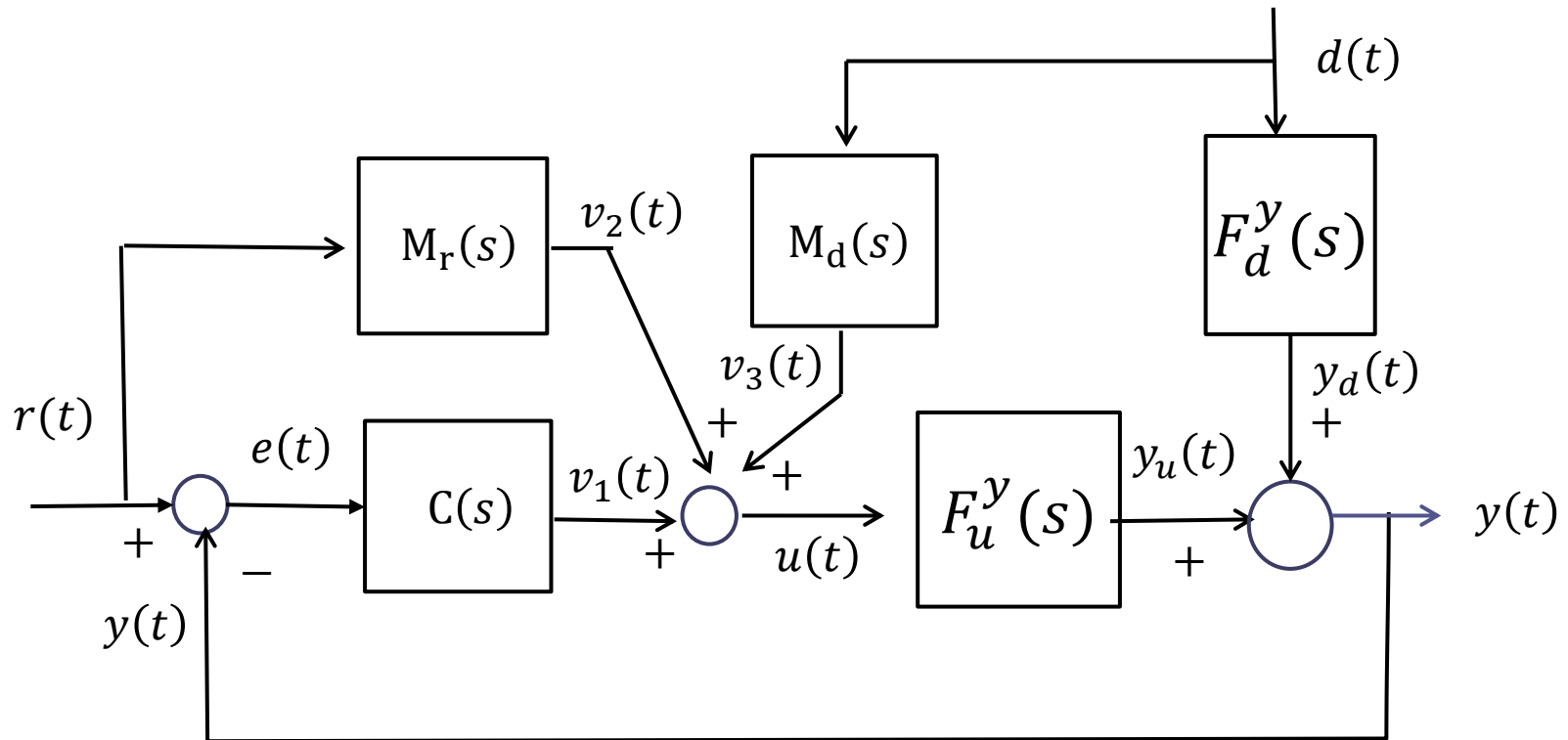
Chiaramente, la possibilità di generare il contributo dipendente dal disturbo presuppone che quest'ultimo sia misurabile, una ipotesi che risulta soddisfatta in numerosi scenari pratici.

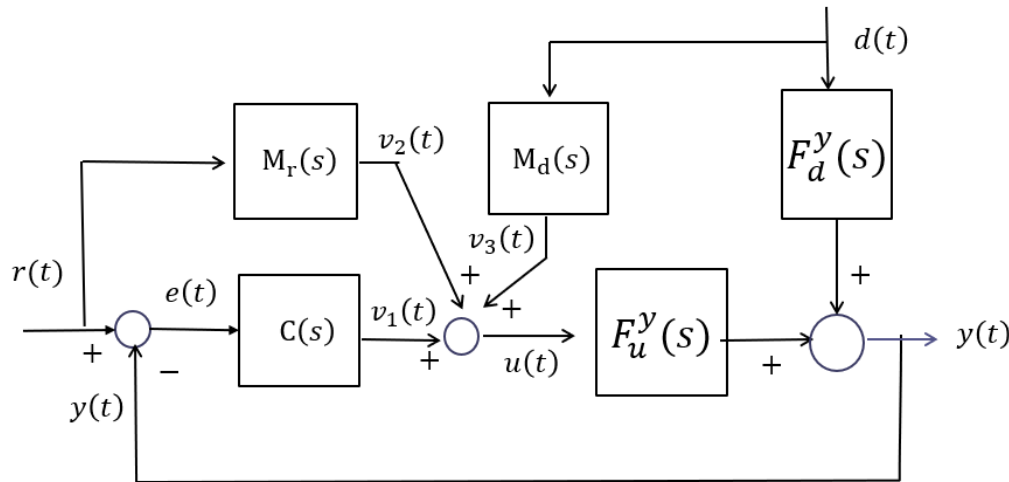
Schema generale

Partiamo dalla rappresentazione generale di un sistema di controllo ad anello singolo in cui il processo è soggetto all'influenza di un ingresso manipolabile $u(t)$ e di un segnale disturbante $d(t)$



L'implementazione del controllo in avanti (detto anche «in andata») si traduce nel seguente schema modificato. I contributi $v_2(t)$ e $v_3(t)$ sono costruiti filtrando rispettivamente il set point ed il disturbo con degli opportuni filtri aventi FdT $M_r(s)$ ed $M_d(s)$





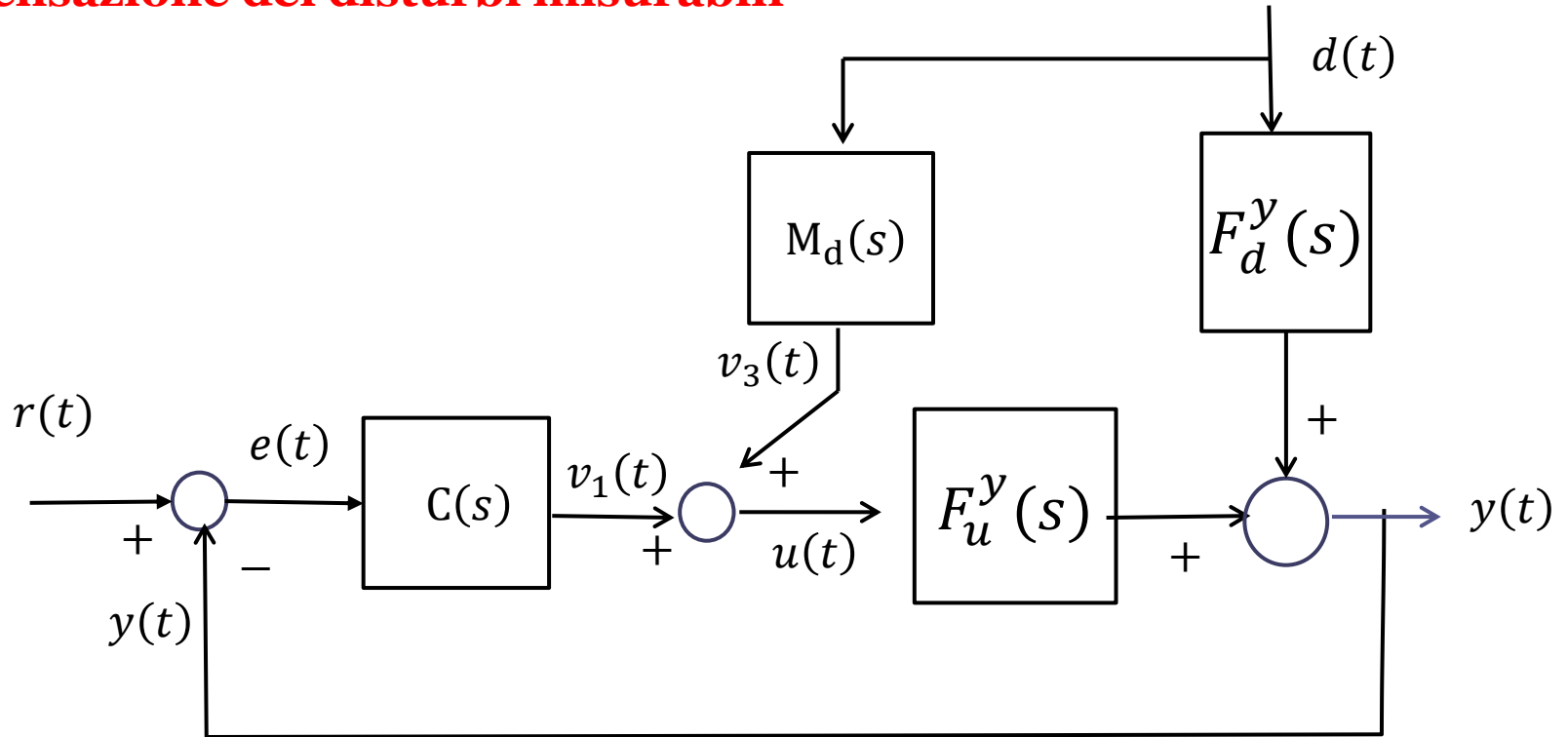
L'azione in andata è da intendersi come complementare a quella generata dal sistema in retroazione. Essa è di tipo **predittivo** in quanto interviene al manifestarsi di una causa (la variazione del set-point o la presenza del disturbo) e non del suo effetto (il relativo errore $e(t)$).

Come vedremo, il progetto dei filtri $M_d(s)$ ed $M_r(s)$ richiede la conoscenza esatta del modello matematico del processo, e come tale la sintesi di un sistema di controllo feedforward è estremamente sensibile ad errori nella modellazione del processo.

Discutiamo singolarmente il progetto dei due filtri. Le due azioni, considerate singolarmente, prendono il nome di:

- Compensazione dei disturbi misurabili
- Anticipo del set-point

Compensazione dei disturbi misurabili



La FdT **a ciclo chiuso** fra il disturbo e l'uscita è la seguente:

$$W_d^y(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{F_d^y(s) + M_d(s)F_u^y(s)}{1 + C(s)F_u^y(s)}$$

La FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita è la seguente:

$$W_d^y(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{F_d^y(s) + M_d(s)F_u^y(s)}{1 + C(s)F_u^y(s)}$$

Scegliendo pertanto il filtro come segue

$$M_d(s) = -\frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)}$$

si annulla completamente l'effetto del disturbo sul comportamento dell'uscita

Il filtro deve però essere asintoticamente stabile (la FdT $F_u^y(s)$ non deve avere zeri instabili) e **fisicamente realizzabile**.

Se il grado relativo della FdT ingresso-uscita $F_u^y(s)$ è maggiore del grado relativo della FdT disturbo-uscita $F_d^y(s)$ il compensatore $M_d(s)$ non è fisicamente realizzabile. Ciò avviene anche se la FdT ingresso uscita $F_u^y(s)$ include un termine di ritardo ed il valore del ritardo è maggiore di quello incluso nella Fdt disturbo-uscita $F_d^y(s)$.

In questi casi il filtro di compensazione del disturbo misurabile deve essere reso fisicamente realizzabile mediante una sua **approssimazione** (ad esempio mediante l'inserimento di poli aggiuntivi in alta frequenza, come fatto a suo tempo per rendere fisicamente realizzabile l'azione derivativa di un regolatore PID).

Quando la non realizzabilità del filtro è dovuta ad un grado relativo negativo, ci si può riferire alla seguente versione approssimata:

$$\widehat{M}_d(s) = M_d(s) \frac{1}{(\tau s + 1)^h} \quad h = G_{rel}\{F_u^y(s)\} - G_{rel}\{F_d^y(s)\}$$

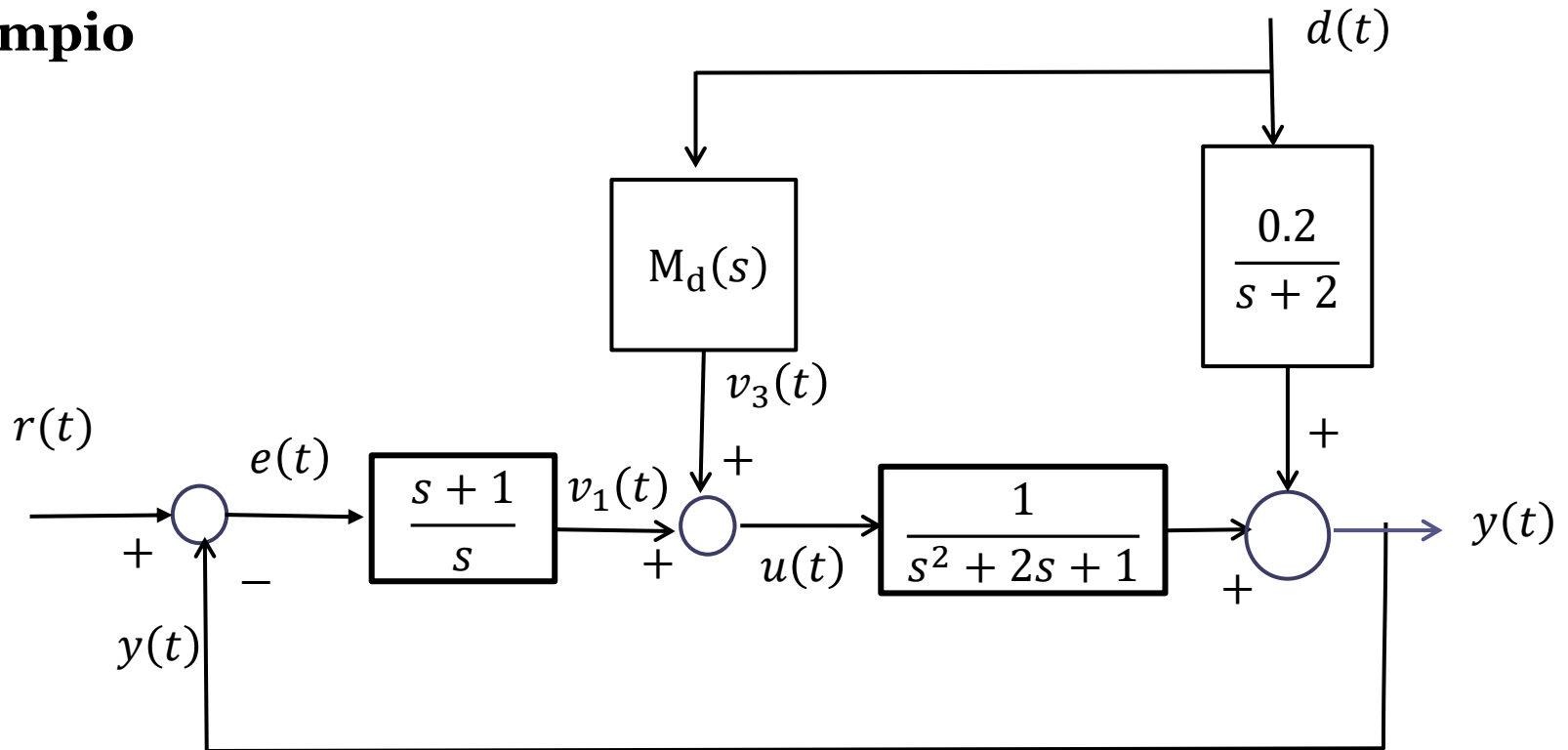
Il criterio di scelta per il valore di τ è fare in modo che diagrammi di Bode del compensatore ideale $M_d(s)$ e della sua versione approssimata $\widehat{M}_d(s)$ devono coincidere **nella banda del disturbo**

Quando invece $M_d(s)$ contiene un termine di anticipo del tipo $e^{\delta s}$ l'unica strada percorribile è ignorare il termine di anticipo rimuovendolo dalla $M_d(s)$.

Se il disturbo è un segnale **lentamente variabile**, il filtro di compensazione del disturbo può essere approssimato mediante un **guadagno**

$$\widehat{M}_d(s) = M_d(0) = -H(0)/P(0)$$

Esempio



Il segnale disturbante $d(t)$ ha componenti spettrali nella banda $[0, \omega_d]$ rad/s con $\omega_d = 1 rad/s$

Progettare il filtro di compensazione del disturbo

Filtro di compensazione del disturbo

$$F_d^y(s) = \frac{0.2}{s+2} \qquad F_u^y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$M_d(s) = -\frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)} = -\frac{0.2}{s+2} \cdot \frac{s^2+2s+1}{1} = -\frac{0.2s^2+0.4s+0.2}{s+2}$$



Il filtro è non fisicamente realizzabile perché il grado relativo della FdT $F_u^y(s)$ fra l'ingresso manipolabile e l'uscita è superiore rispetto al grado relativo della FdT a ciclo aperto $F_d^y(s)$ fra il disturbo e l'uscita uscita

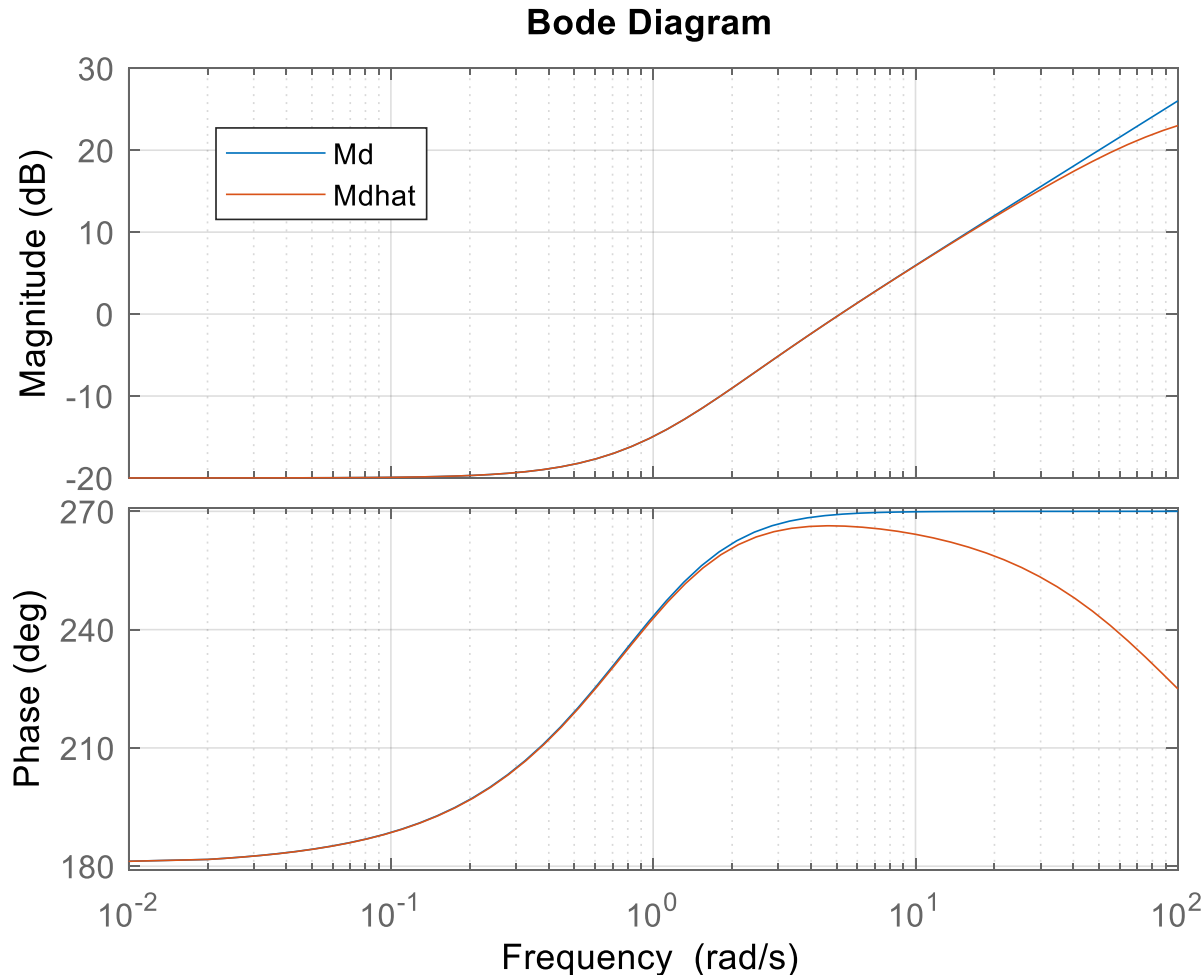
Filtro approssimato con l'aggiunta di un polo in alta frequenza

$$\widehat{M}_d(s) = -\frac{0.2s^2+0.4s+0.2}{(s+2)(\tau s+1)} = -\frac{0.2s^2+0.4s+0.2}{\tau s^2+(2\tau+1)s+2}$$

$$\tau = \frac{1}{100\omega_d} = 0.01s$$

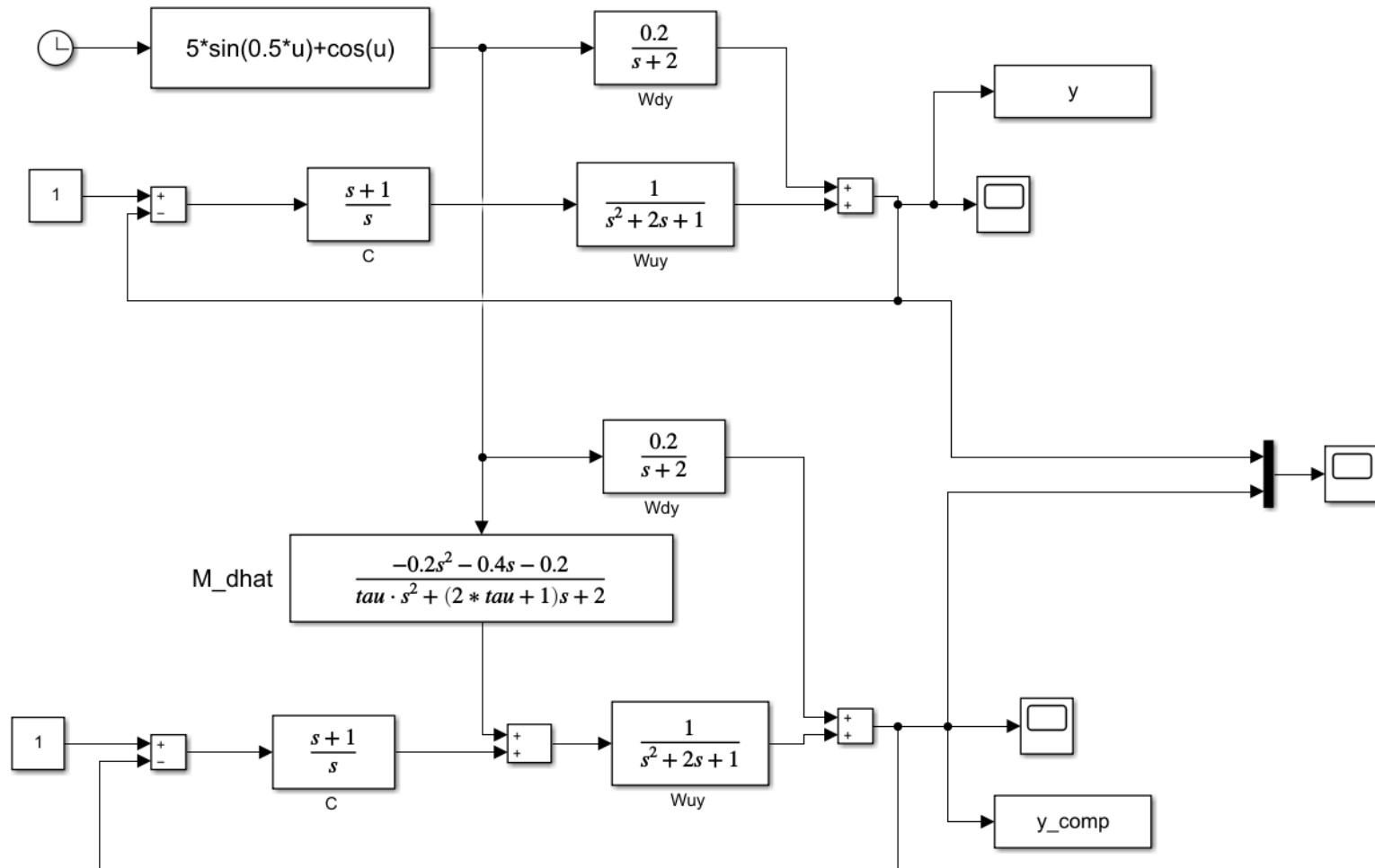
Due decadi più in alta frequenza rispetto alla banda ω_d del disturbo

Verifichiamo che con tale scelta per la costante di tempo τ i diagrammi di Bode del filtro e della sua versione approssimata sono sovrapposti nella banda del disturbo

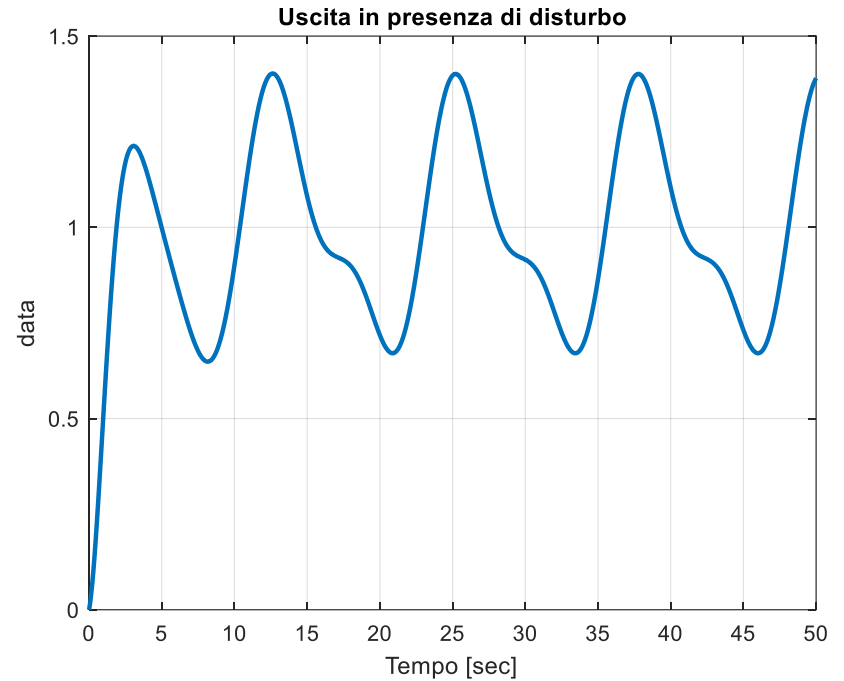
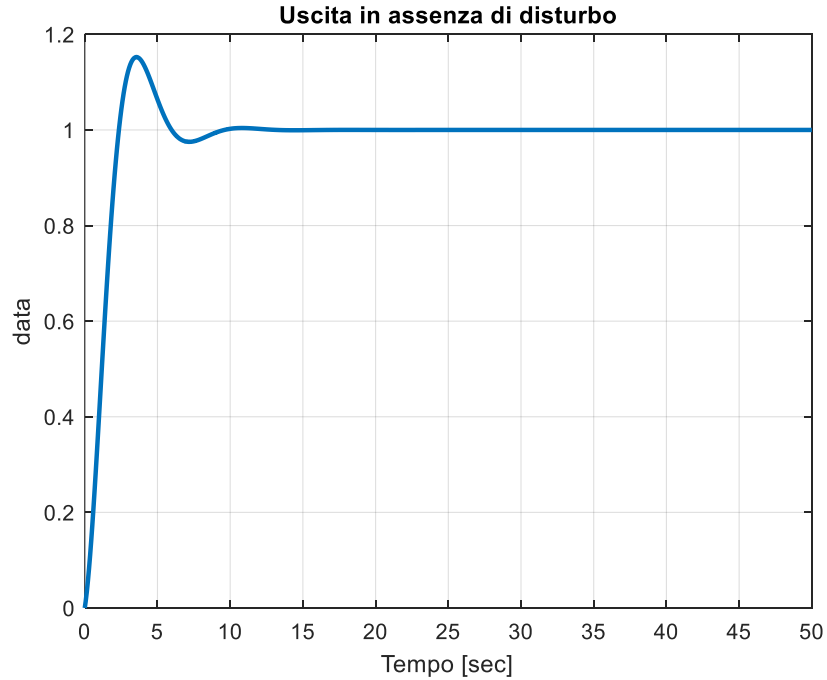


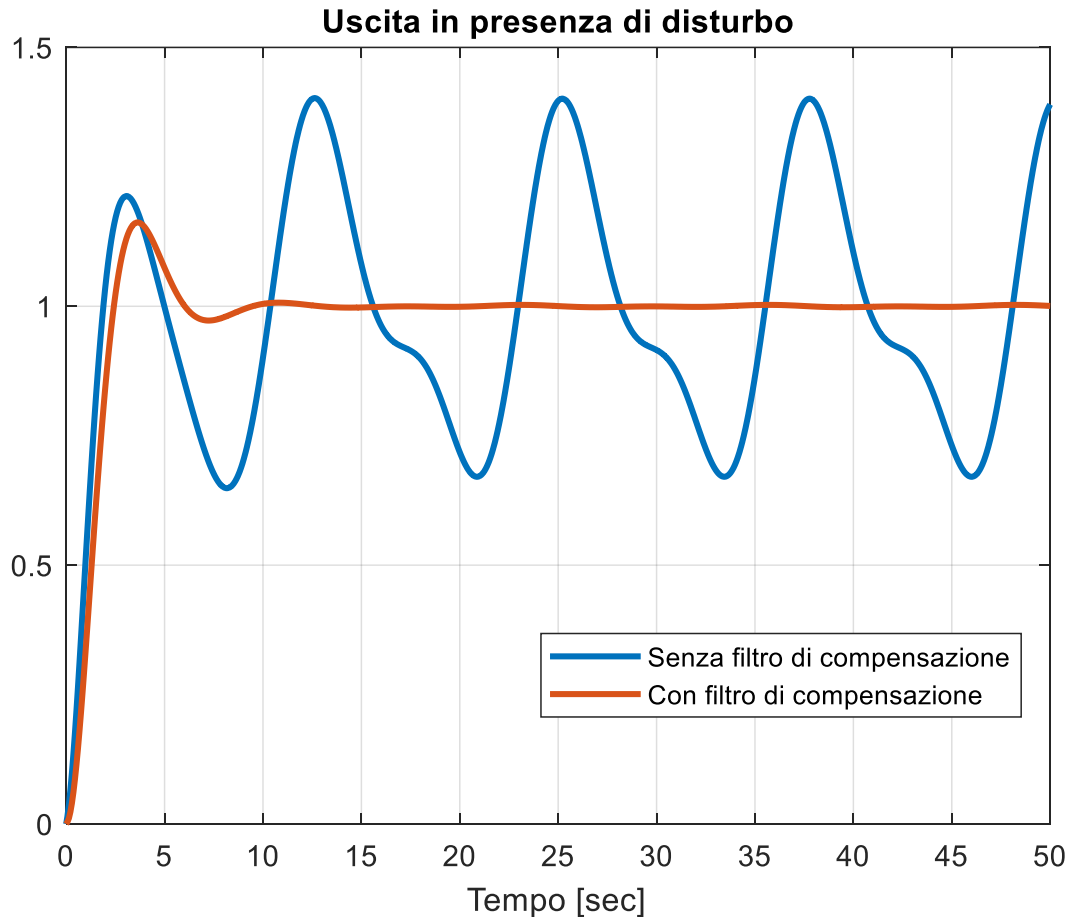
Il filtro approssimato $\hat{M}_d(s)$ fornirà pertanto una risposta analoga a quella del filtro ideale non realizzabile $M_d(s)$ in corrispondenza di segnali in ingresso aventi componenti spettrali nella banda $[0, 1] \text{ rad/s}$

Testiamo in simulazione le prestazioni del sistema di controllo con e senza il filtro di compensazione del disturbo misurabile. Si ponga $d(t) = 5 \sin(0.5t) + \cos(t)$

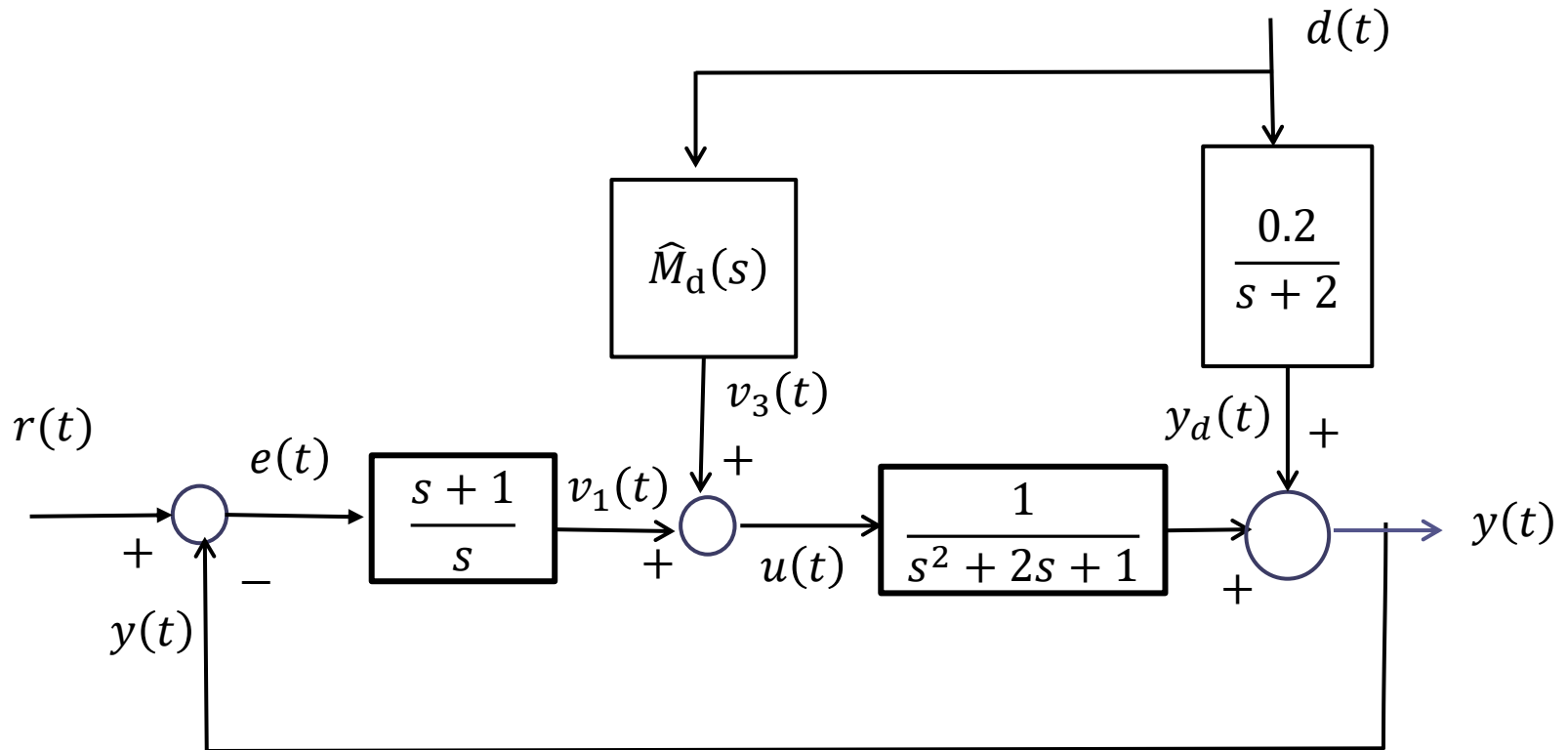


Sistema di controllo **senza il filtro di compensazione** del disturbo





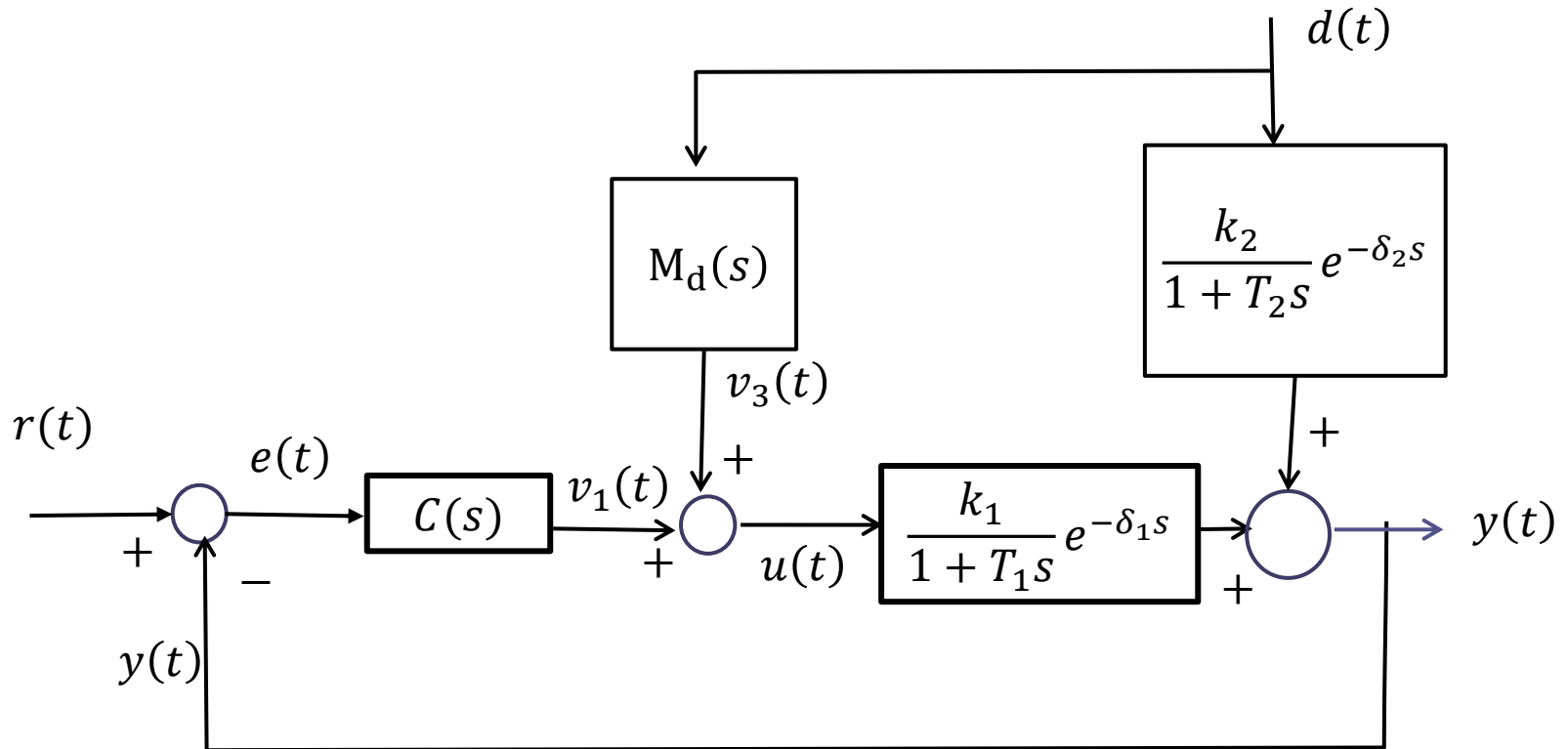
Nel sistema di controllo **con il filtro di compensazione** del disturbo, l'effetto del disturbo sull'uscita è completamente rimosso e si ottiene la medesima risposta che si otterrebbe in assenza di disturbo.



Interpretazione: il filtro di compensazione del disturbo genera un segnale $v_3(t)$ che, propagandosi attraverso il processo $\frac{1}{s^2+2s+1}$, dà luogo ad un segnale di uscita uguale ed opposto ad $y_d(t)$, di fatto annullando completamente ogni effetto del disturbo sull'uscita.

Esempio

Compensazione dei disturbi misurabili nel caso in cui le FdT ingresso-uscita e disturbo uscita sono entrambe di tipo FOPDT



Filtro di compensazione del disturbo

$$F_u^y(s) = \frac{k_1}{1 + T_1 s} e^{-\delta_1 s}$$

$$F_d^y(s) = \frac{k_2}{1 + T_2 s} e^{-\delta_2 s}$$

$$M_d(s) = -\frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)} = -\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} e^{-(\delta_2 - \delta_1)s}$$



Il filtro $M_d(s)$ è **fisicamente realizzabile solo se $\delta_2 \geq \delta_1$**

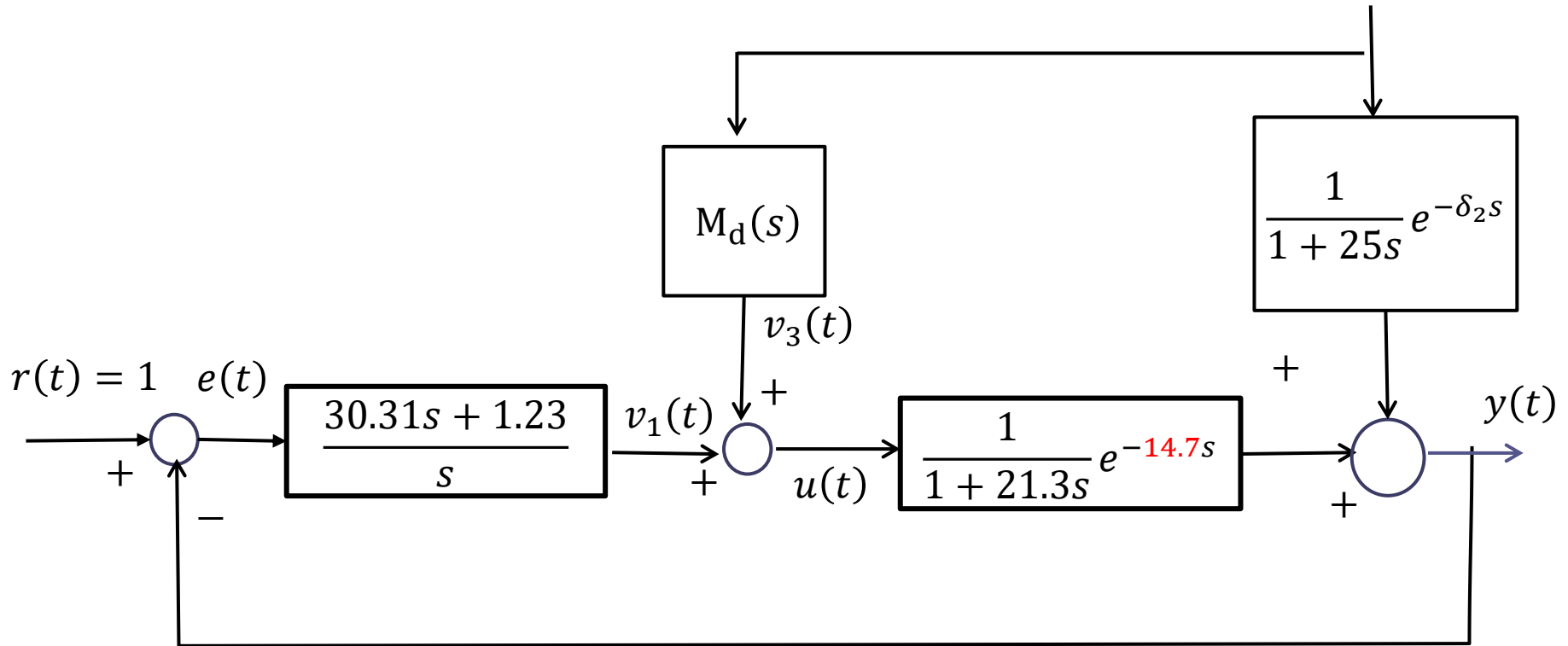
Nel caso in cui $\delta_1 > \delta_2$ si deve implementare il filtro approssimato

$$\hat{M}_d(s) = -\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$$

che sarà in grado di garantire unicamente una compensazione approssimata del disturbo, tanto più scadente al crescere della differenza $\delta_1 - \delta_2$

Consideriamo il seguente esempio numerico

$$d(t) = 5 \sin(0.5t) + \cos(t)$$



in corrispondenza di 4 valori distinti per il ritardo δ_2

$$\delta_2 = 35s$$

$$\delta_2 = 20s$$

$$\delta_2 = 14s$$

$$\delta_2 = 13s$$

$$\delta_2 = 35s$$

$$\delta_2 = 20s$$

$$\delta_2 = 14s$$

$$\delta_2 = 13s$$

I primi due valori considerati per il ritardo δ_2 sono maggiori del ritardo $\delta_1 = 14.7$ della FdT ingresso-uscita, e come risultato il filtro di compensazione del disturbo è fisicamente realizzabile ed assume la forma

$$M_d(s) = -\frac{1 + 21.35s}{1 + 25s} e^{-(\delta_2 - 14.7)s}$$

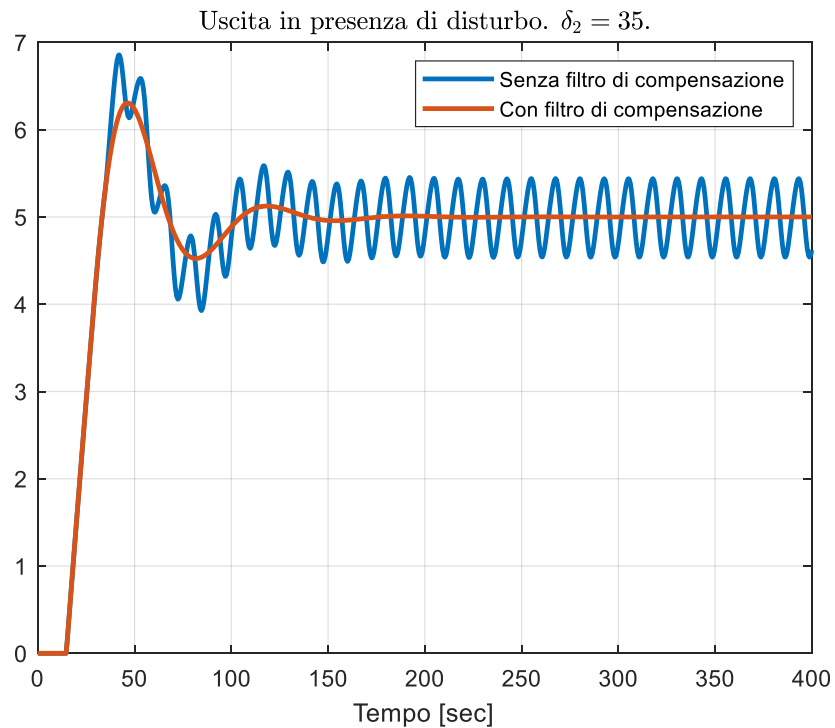
In entrambi i casi ci attendiamo una compensazione esatta del disturbo

Gli ultimi due valori considerati per il ritardo δ_2 sono invece inferiori del ritardo $\delta_1 = 14.7$ della FdT ingresso-uscita, e come risultato il filtro di compensazione del disturbo risulta non fisicamente realizzabile e deve essere approssimato come segue

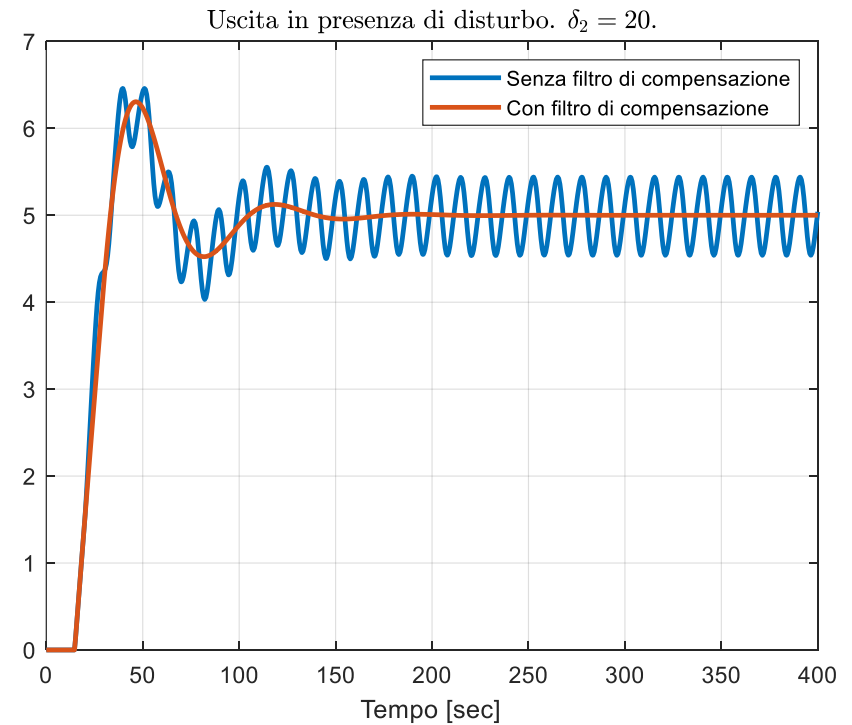
$$\hat{M}_d(s) = -\frac{1 + 21.35s}{1 + 25s}$$

Ci si attende una compensazione approssimata del disturbo, più scadente quando $\delta_2 = 13s$ in quanto si sta rimuovendo dalla FdT del filtro un termine di anticipo di ampiezza maggiore.

$$\delta_2 = 35s$$

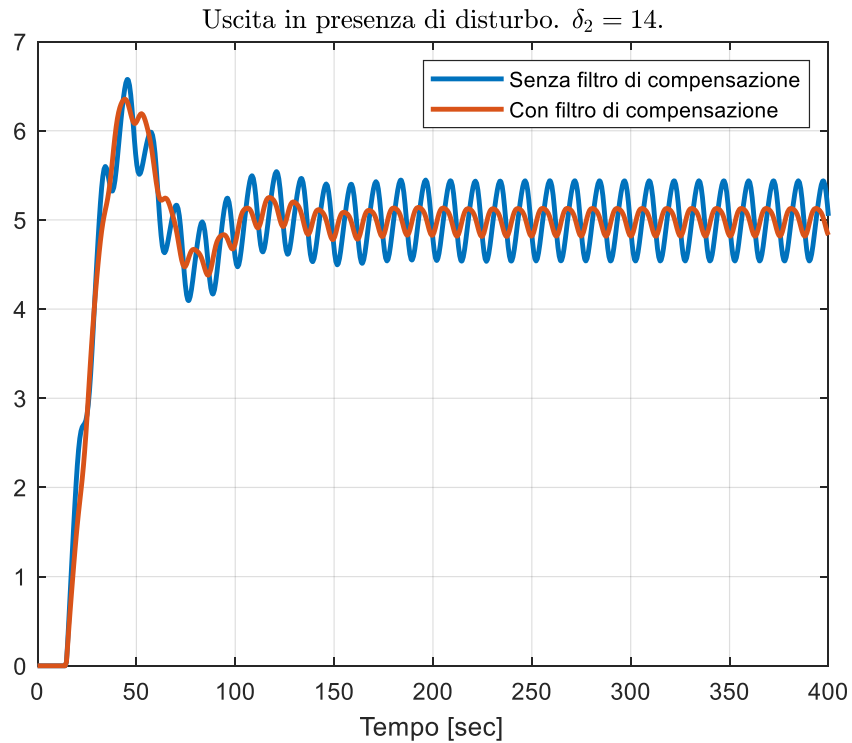


$$\delta_2 = 20s$$

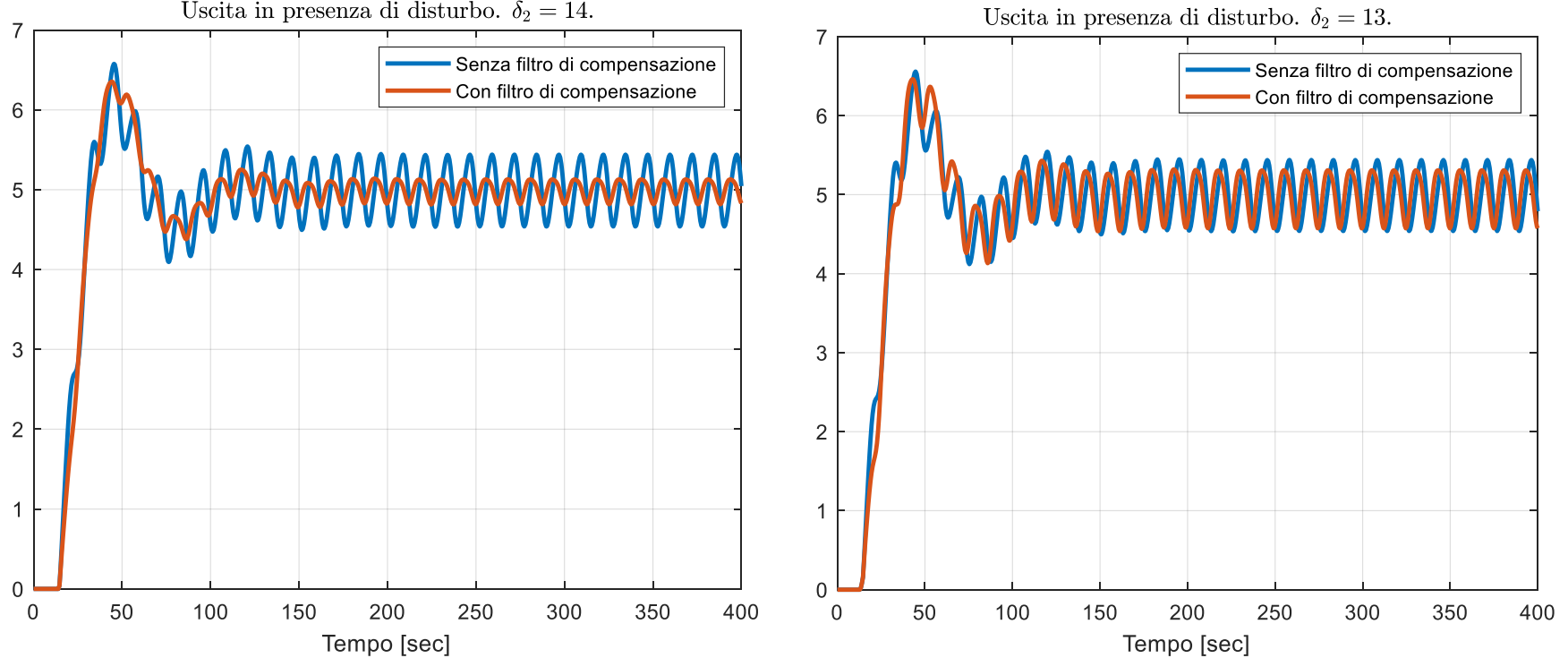


compensazione esatta del disturbo

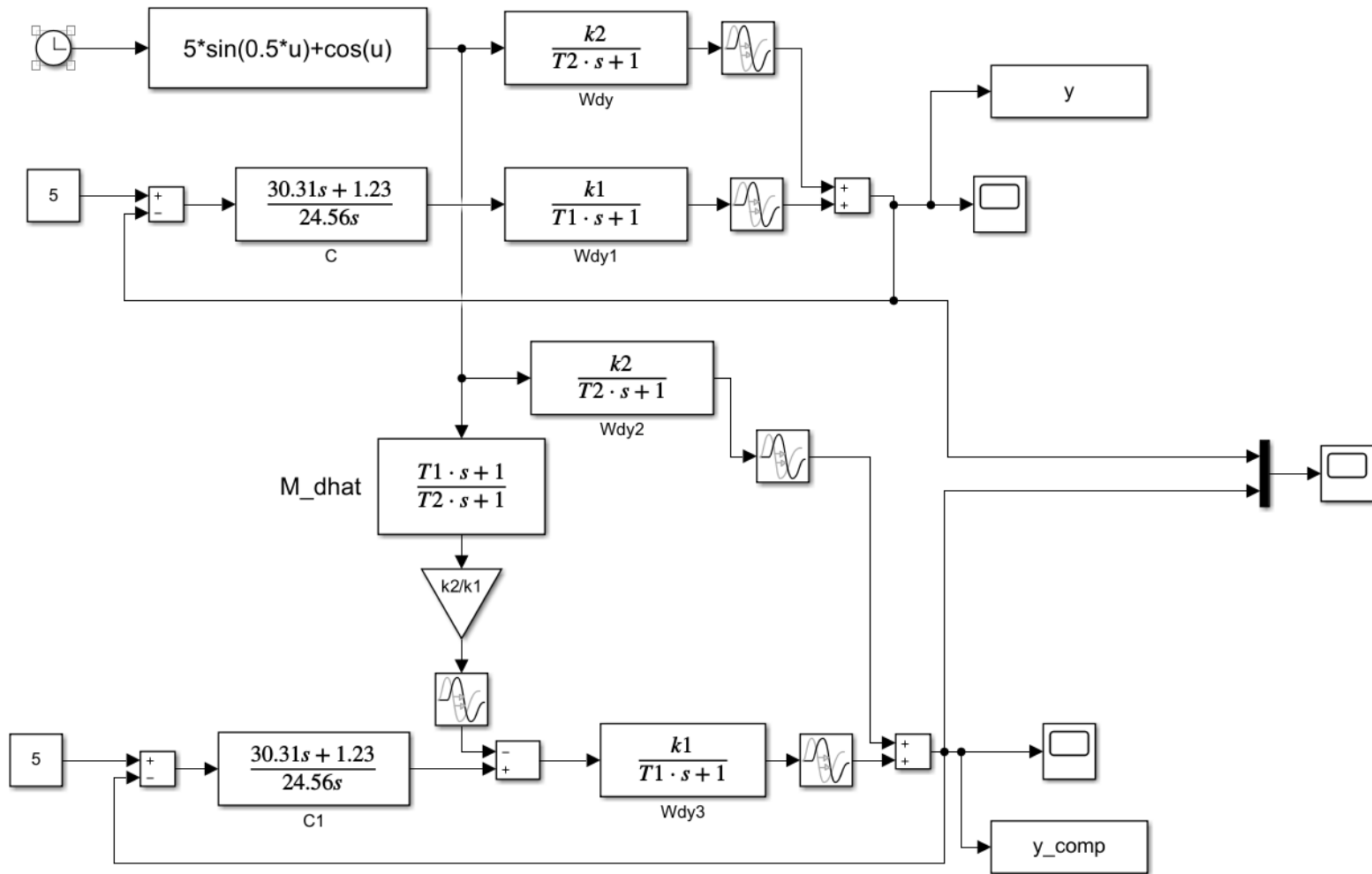
$$\delta_2 = 14s$$



$$\delta_2 = 13s$$

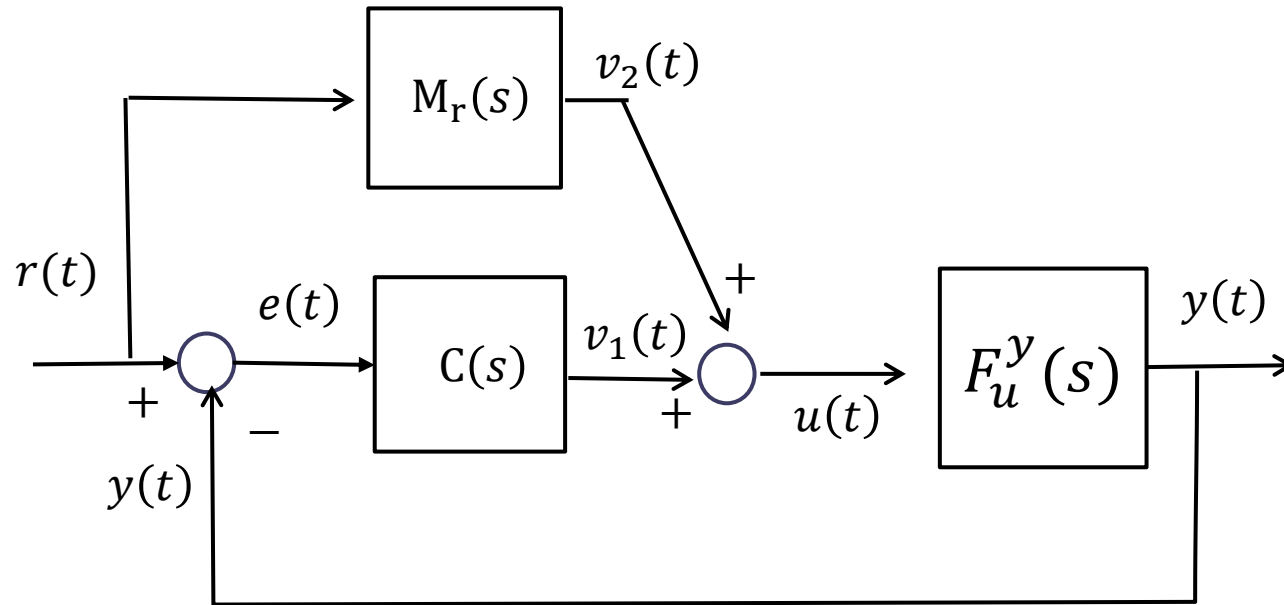


compensazione approssimata del disturbo, più scadente quando $\delta_2 = 13s$



Files `CompDisturbiMisurabili_2022b.slx`
`CompDisturbiMisurabili_2022b_script.m`

Anticipo del set-point



La FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita è la seguente:

$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_r(s)F_u^y(s) + C(s)F_u^y(s)}{1 + C(s)F_u^y(s)}$$

La FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita è la seguente:

$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_r(s)F_u^y(s) + C(s)F_u^y(s)}{1 + C(s)F_u^y(s)}$$

Scegliendo il filtro nella forma seguente

$$M_r(s) = \frac{1}{F_u^y(s)}$$

si ottiene

$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = 1$$

che implica il **perfetto inseguimento di set point aventi forma arbitraria**.

Ovviamente tale ambiziosa pretesa deve fare i conti con il fatto che il filtro dovrà essere asintoticamente stabile (la FdT $F_u^y(s)$ non deve avere zeri instabili) e soprattutto **fisicamente realizzabile**.

Se il grado relativo della FdT ingresso-uscita $F_u^y(s)$ è maggiore di zero (cioè se possiede un numero di poli maggiore del numero degli zeri) il compensatore $M_d(s)$ non è fisicamente realizzabile e deve essere reso tale mediante una sua approssimazione.

In analogia con le considerazioni sviluppate nell'ambito del progetto dei filtro di compensazione del disturbo misurabile, è possibile ottenere un filtro fisicamente realizzabile con la seguente modifica (aggiunta di un numero sufficiente di poli reali negativi coincidenti)

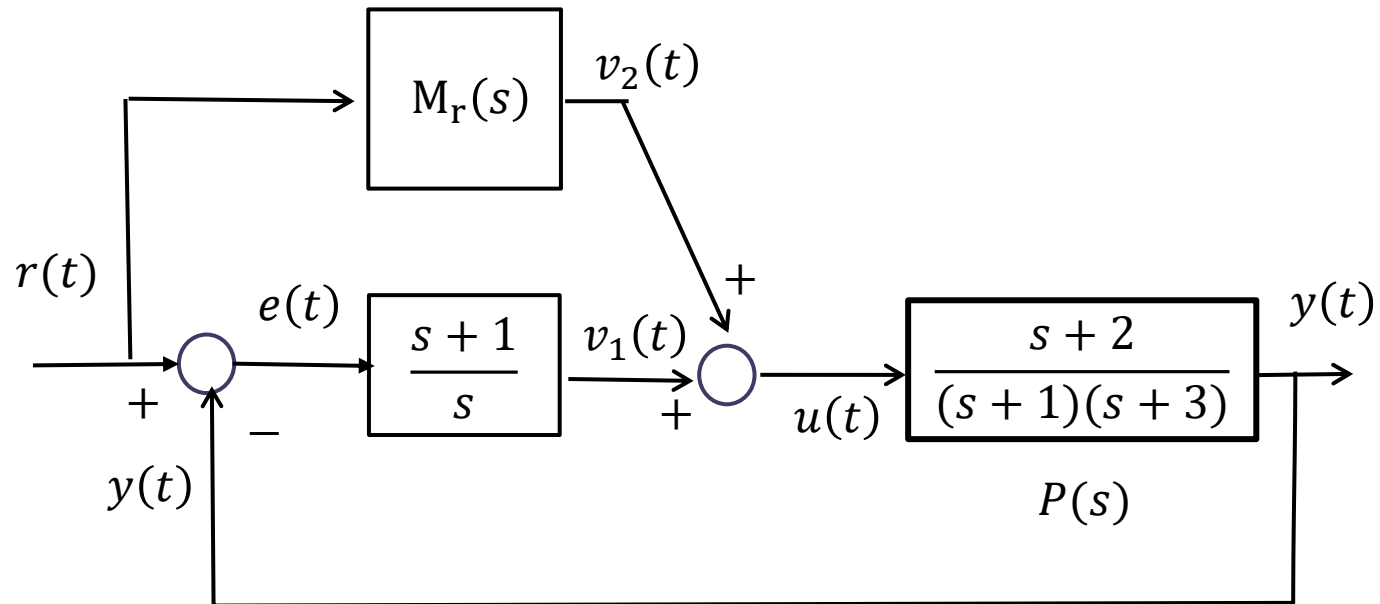
$$\widehat{M}_r(s) = M_r(s) \frac{1}{(\tau s + 1)^h} \quad h = G_{rel}\{F_u^y(s)\}$$

Il criterio di scelta per il valore di τ è fare in modo che diagrammi di Bode del compensatore ideale $M_r(s)$ e della sua versione approssimata $\widehat{M}_r(s)$ devono coincidere **nella banda del set point**.

La fisica irrealizzabilità del filtro $M_r(s)$ si verifica anche se la FdT ingresso uscita $F_u^y(s)$ include un termine di ritardo $e^{-\delta s}$.

In tale situazione infatti, $M_r(s)$ contiene un termine di anticipo del tipo $e^{\delta s}$ che non può essere implementato. In tale scenario, l'unica strada percorribile è ignorare il termine di anticipo rimuovendolo dalla $M_r(s)$.

Esempio



Il set point ha componenti spettrali nella banda $[0, \omega_d]$ rad/s , con $\omega_d = 0.2 rad/s$

Progettare il filtro di anticipo del set point.

$$M_r(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)}$$

Non fisicamente realizzabile

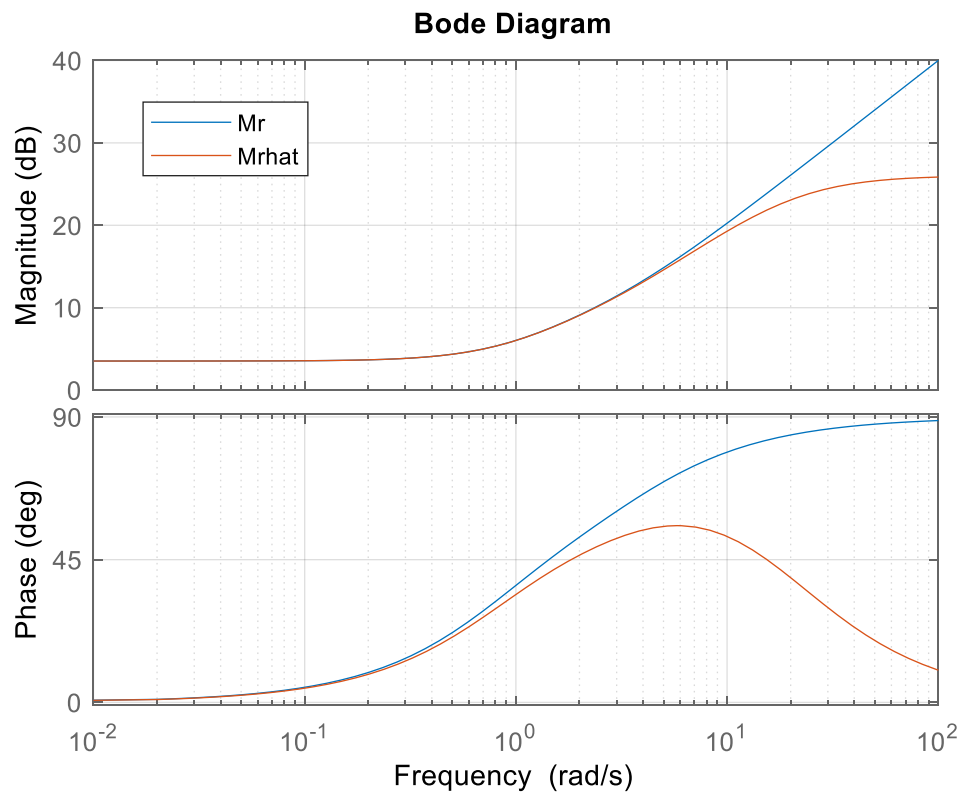
Filtro approssimato e reso fisicamente realizzabile con l'aggiunta di un polo in alta frequenza

$$\widehat{M}_r(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(\tau s+1)}$$

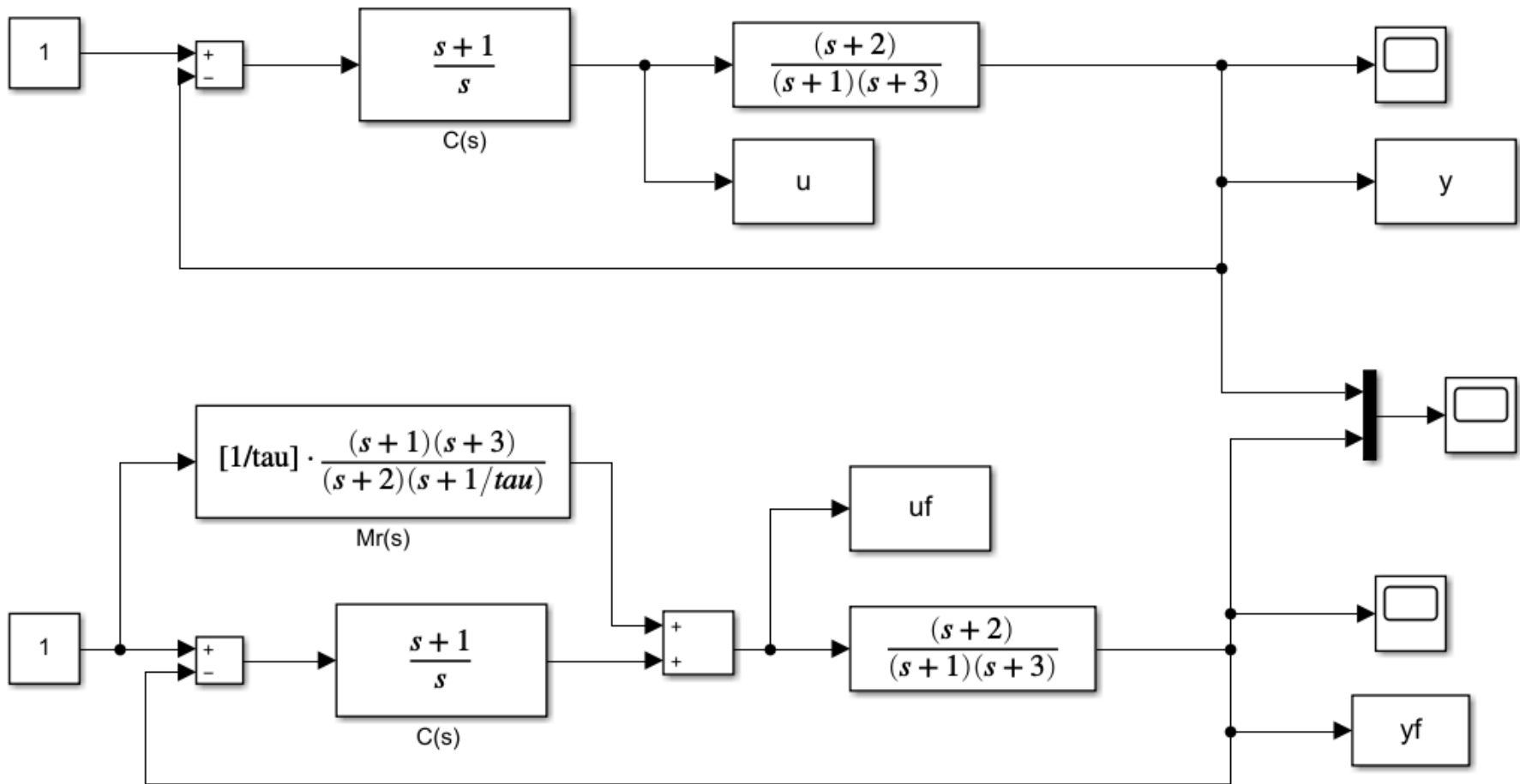
$$\tau = \frac{1}{100\omega_d} = 0.05s$$

Due decadi più in alta frequenza rispetto alla banda ω_d del set point

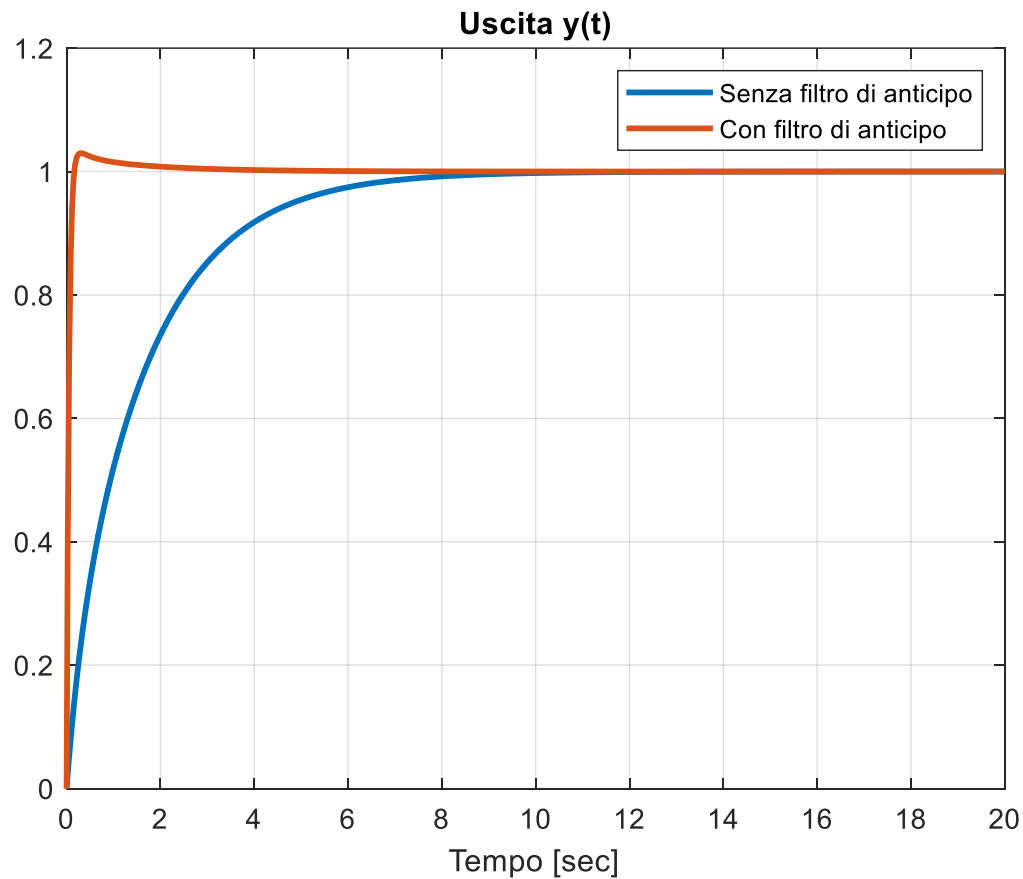
Verifichiamo che con tale scelta per la costante di tempo τ i diagrammi di Bode del filtro e della sua versione approssimata sono sovrapposti nella banda del set-point



Il filtro approssimato fornirà pertanto una risposta analoga a quella del filtro ideale non realizzabile in corrispondenza di segnali in ingresso aventi componenti spettrali nella banda $[0, 0.2] \text{ rad/s}$



Files AnticipoSetpoint2022.slx
 AnticipoSetpoint2022_script.m

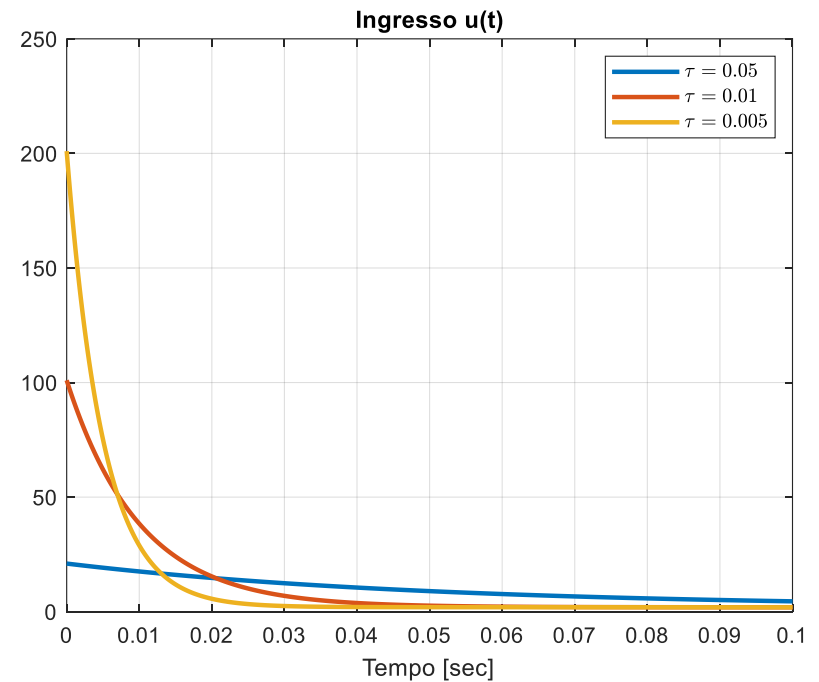
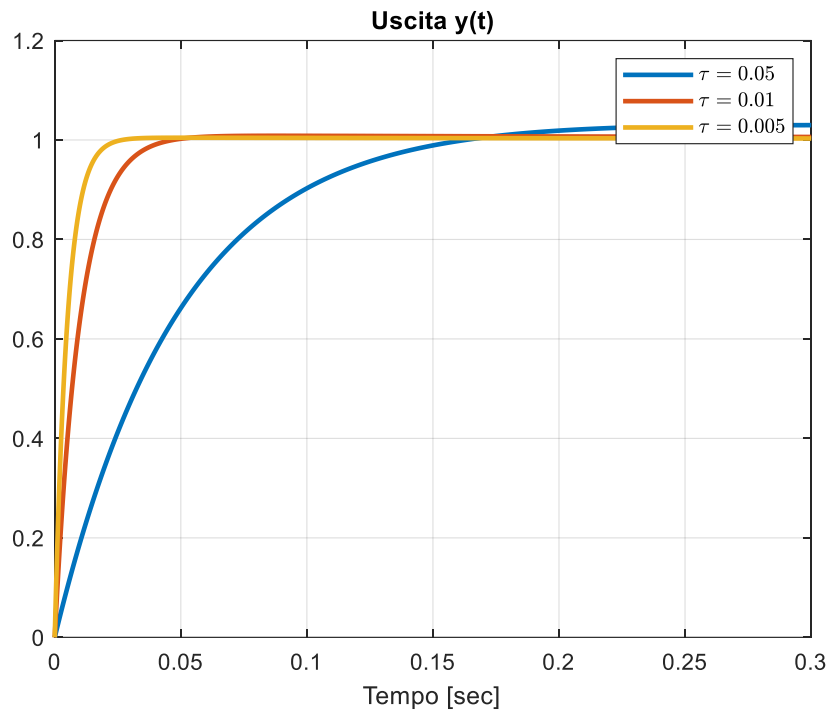


La risposta viene significativamente migliorata e velocizzata.

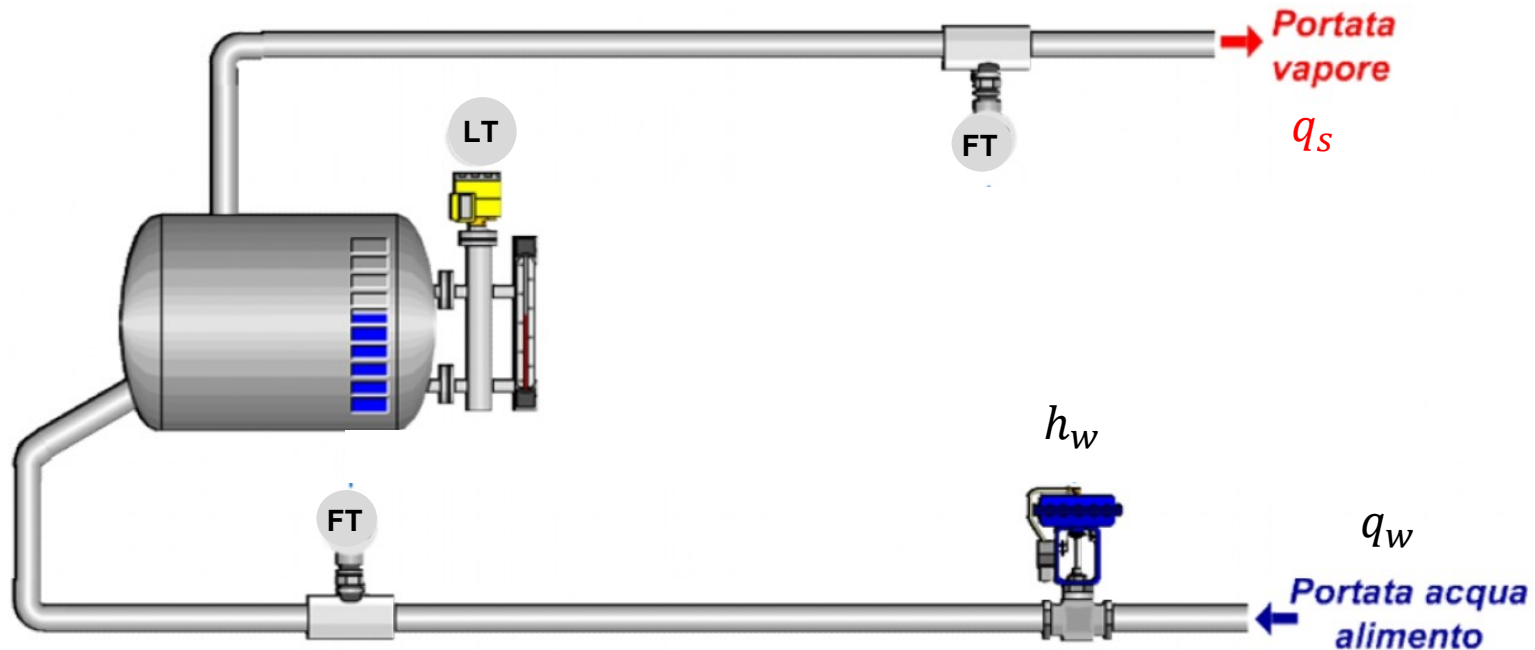
Riducendo ulteriormente il valore di τ si ottiene una risposta sempre più simile a quella ideale (il gradino unitario).

Dove si «paga» questo progressivo ulteriore miglioramento delle prestazioni?

Al decrescere di τ l'ingresso $u(t)$ presenta dei picchi progressivamente più marcati



La regolazione di livello «a 3 elementi» nei generatori di vapore



La regolazione di livello “a tre elementi” nel corpo cilindrico dei generatori di vapore è un esempio classico di regolazione che accoppia il controllo in cascata con la compensazione dei disturbi misurabili.

q_w portata massica acqua di alimento

ℓ livello nel corpo cilindrico

q_s portata massica del vapore

h_w comando della valvola di adduzione dell'acqua di alimento

ABB MEASUREMENT & ANALYTICS | APPLICATION NOTE

Drum level control using a ControlMaster PID controller

Three-element drum level control system



Precision control of drum level from a preconfigured control strategy

Measurement made easy

System classification	Load change capabilities	
	Magnitude	Rate
Single-element	Moderate	Slow
Two-element	Moderate	Moderate
Three-element	Wide	Fast

Il processo è modellato dal seguente bilancio di massa

$$\rho A \frac{d\ell}{dt} = q_w(t) - q_s(t)$$

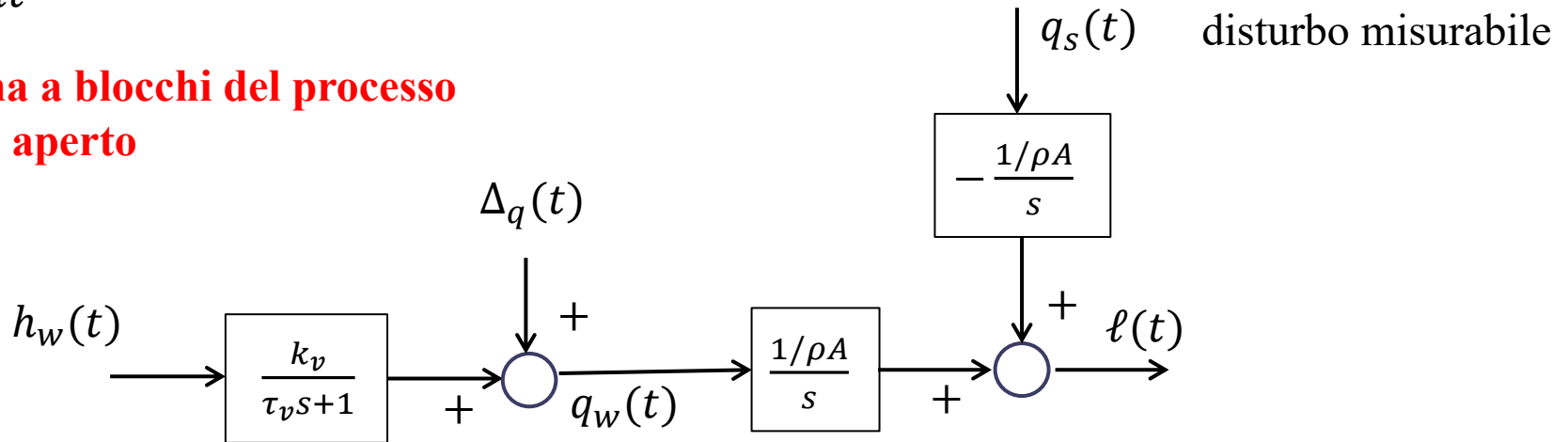
ρ = densità dell'acqua

A = sezione orizzontale del serbatoio alla quota ℓ^{des}

al quale si abbina la dinamica della valvola di adduzione dell'acqua di alimento

$$\tau_v \frac{dq_w}{dt} + q_w(t) = k_v h_w(t)$$

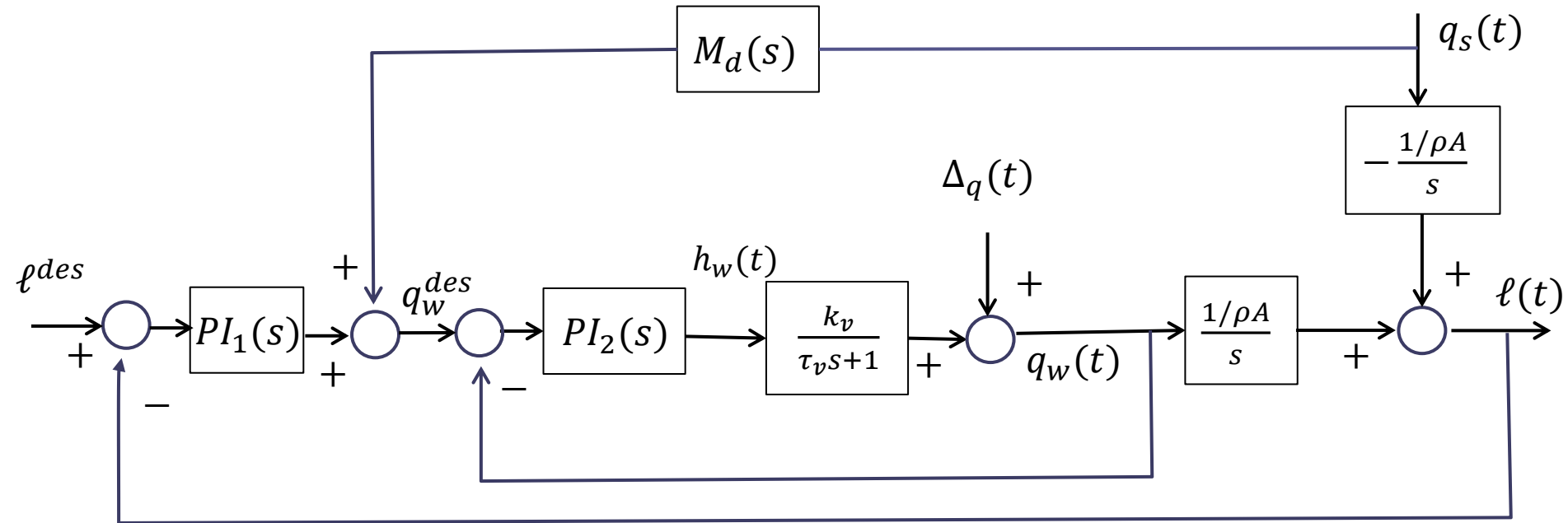
Schema a blocchi del processo a ciclo aperto



$\Delta_q(t)$

Disturbo sulla portata dovuto a variazioni di pressione sulla linea e non linearità nel comportamento dinamico della valvola

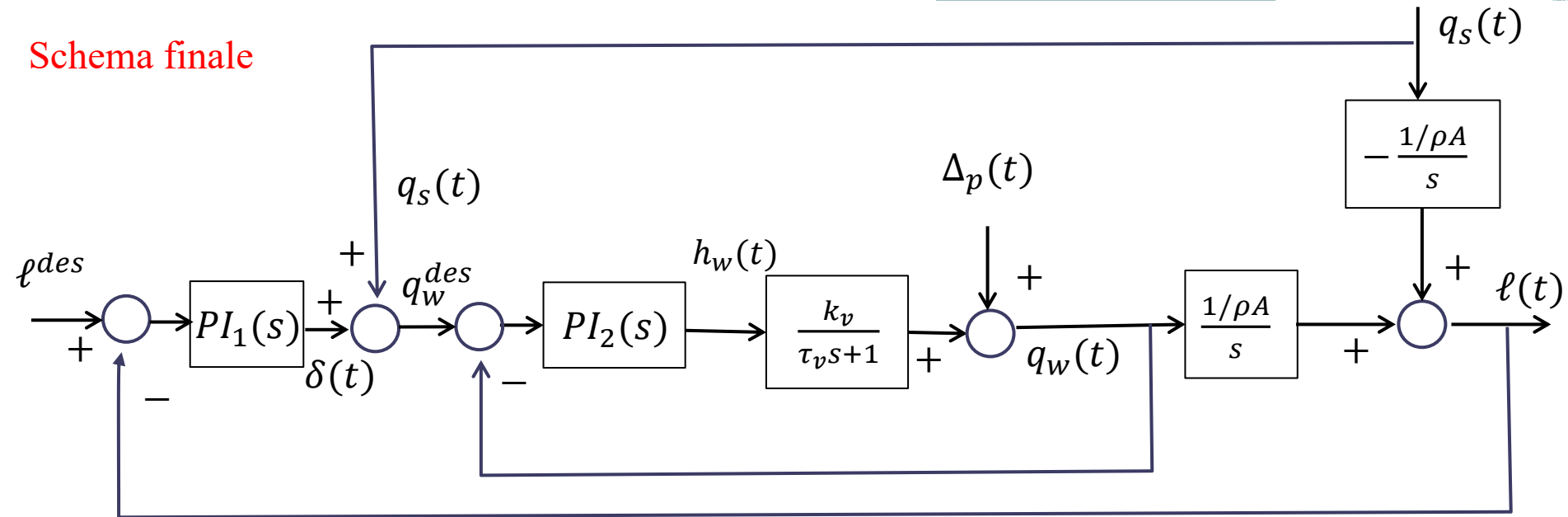
Il processo è regolato mediante la seguente architettura, che prevede un sistema di **controllo in cascata** con anello primario di livello ed anello secondario di portata abbinato alla **compensazione del disturbo misurabile** rappresentato dalla portata del vapore uscente



$$M_d(s) = -\frac{\frac{1}{\rho A}}{\frac{1}{s}} = 1$$

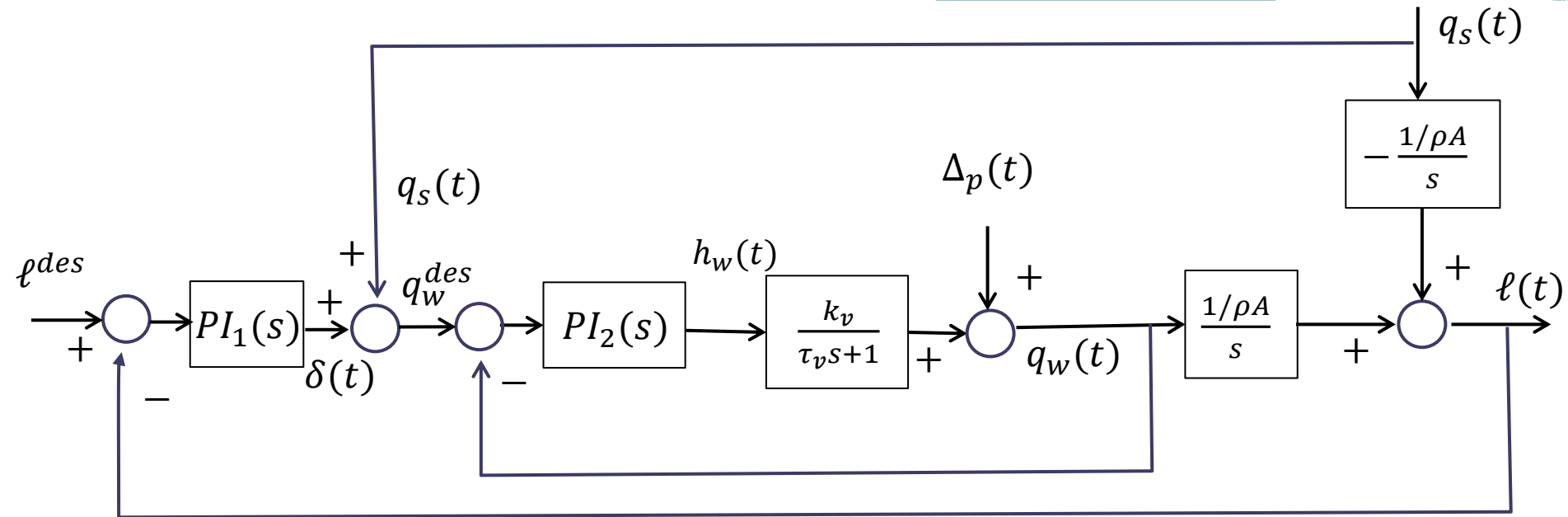
Approssimando l'anello secondario del sistema di controllo mediante un sistema unitario istantaneo ($q_w = q_w^{des}$), il filtro di compensazione del disturbo diventa un filtro unitario

Schema finale



Il risultato finale è pertanto quello di imporre una portata desiderata dell'acqua di alimento uguale alla portata del vapore uscente più un termine aggiuntivo $\delta(t)$ ottenuto come uscita di un regolatore PI che riceve in ingresso l'errore di livello $l^{des} - l(t)$

$$q_w^{des}(t) = q_s(t) + \delta(t) \quad \delta(t) = PI_1(l^{des} - l(t))$$



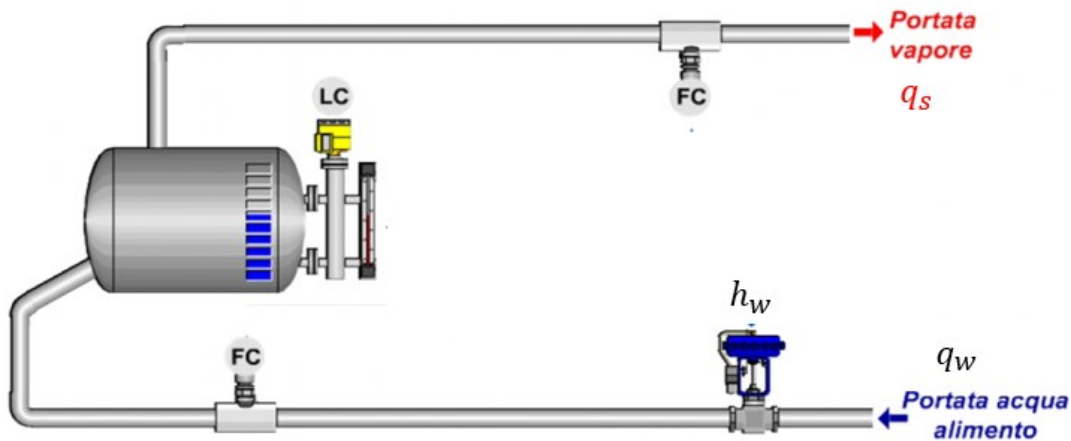
$$q_w^{des}(t) = q_s(t) + \delta(t)$$

$$\delta(t) = PI_1(\ell^{des} - \ell(t))$$

Ipotizzando un anello di portata istantaneo ($q_w(t) = q_w^{des}(t)$) si ha

$$\delta(t) = q_w(t) - q_s(t)$$

Il segnale in uscita dal regolatore $PI_1(s)$ va in pratica a definire la portata netta in ingresso al serbatoio



Ciò rende evidentemente più efficace il sistema di controllo nel fronteggiare rapide variazioni della portata del vapore uscente.

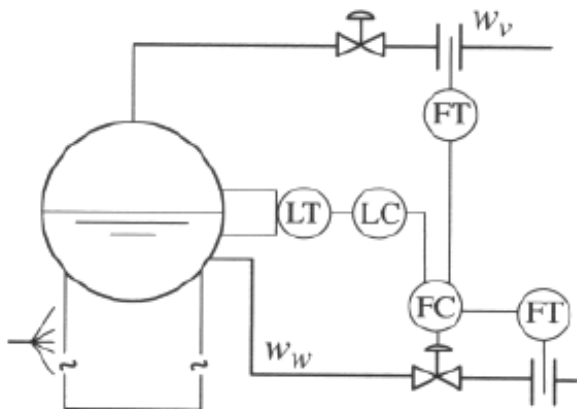


Diagramma P&I della regolazione a 3 elementi del livello.

LT Trasmittitore di livello

FT Trasmittitori di portata

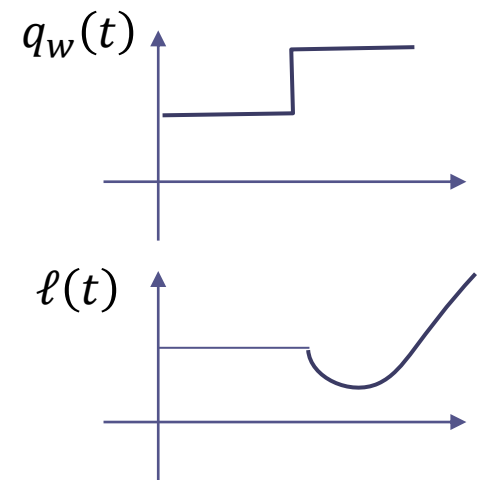
LC Controllore di livello (il regolatore dell'anello primario)

FC Controllore di portata (il regolatore dell'anello secondario)

L'utilizzo di una architettura così sofisticata per un problema di regolazione che, sulla base del modello del processo, potrebbe sembrare semplice, è giustificato dalla occorrenza di **fenomeni piuttosto complessi** che intervengono in presenza di **variazioni a gradino della portata dell'acqua di alimento e della portata del vapore uscente**, fenomeni non inclusi nel semplice bilancio di massa che ci ha condotto a ricavare il modello del primo ordine

1. Variazione a gradino dell'H₂O di alimento.

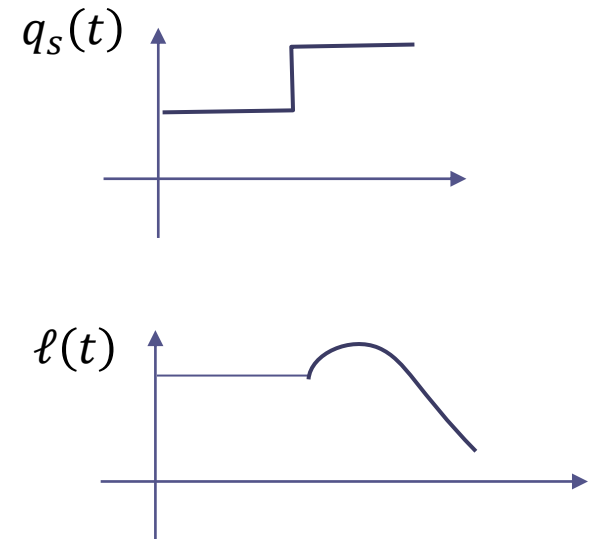
In caso di aumento a gradino della portata dell'acqua (fredda) di alimento con portata vapore costante, il volume di acqua calda esistente nel corpo cilindrico subisce inizialmente una contrazione dovuta a fenomeni transitori di natura termodinamica che, a seconda del tipo di corpo cilindrico, può portare a rilevanti abbassamento di livello. Successivamente, dopo un certo intervallo temporale che può essere di parecchi secondi, a causa del continuo afflusso di acqua di alimento in eccesso rispetto alla portata del vapore uscente, il livello torna a crescere.



Cosa implica questo fenomeno in termini di modellazione ?

2. Variazione a gradino del prelievo di vapore

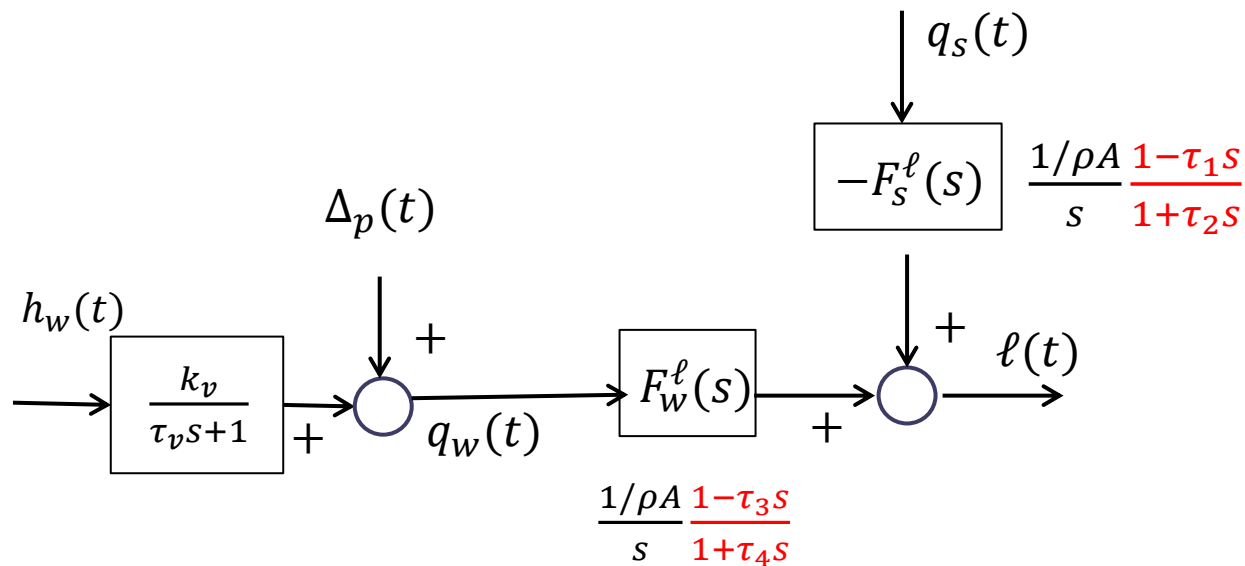
Nel caso di aumento a gradino della portata vapore spillata, a parità di portata acqua alimento, nel corpo cilindrico si verifica una brusca riduzione di pressione con diffusa evaporazione anche in profondità e conseguente possibilità non di abbassamento, ma bensì di «rigonfiamento apparente» del liquido con aumento transitorio del livello misurato. Il problema è meno critico in presenza di una riduzione a gradino del prelievo del vapore.



A causa di questi due fenomeni, se la portata acqua alimento fosse comandata solo in funzione del livello, si avrebbero fenomeni di instabilità dovuti al fatto che **la regolazione sarebbe portata a produrre correzioni opposte a quelle effettivamente necessarie.**

Per queste ragioni, il sistema di regolazione, più diffusamente usato è quello a 3 elementi, in cui il segnale di livello, confrontato con il valore prefissato, determina tramite il regolatore PI_1 il valore per la **portata netta di alimento** necessaria ad annullare l'errore di livello.

Una rappresentazione più accurata della dinamica del processo tale da includere i fenomeni di risposta inversa (undershooting) precedentemente citati è pertanto la seguente

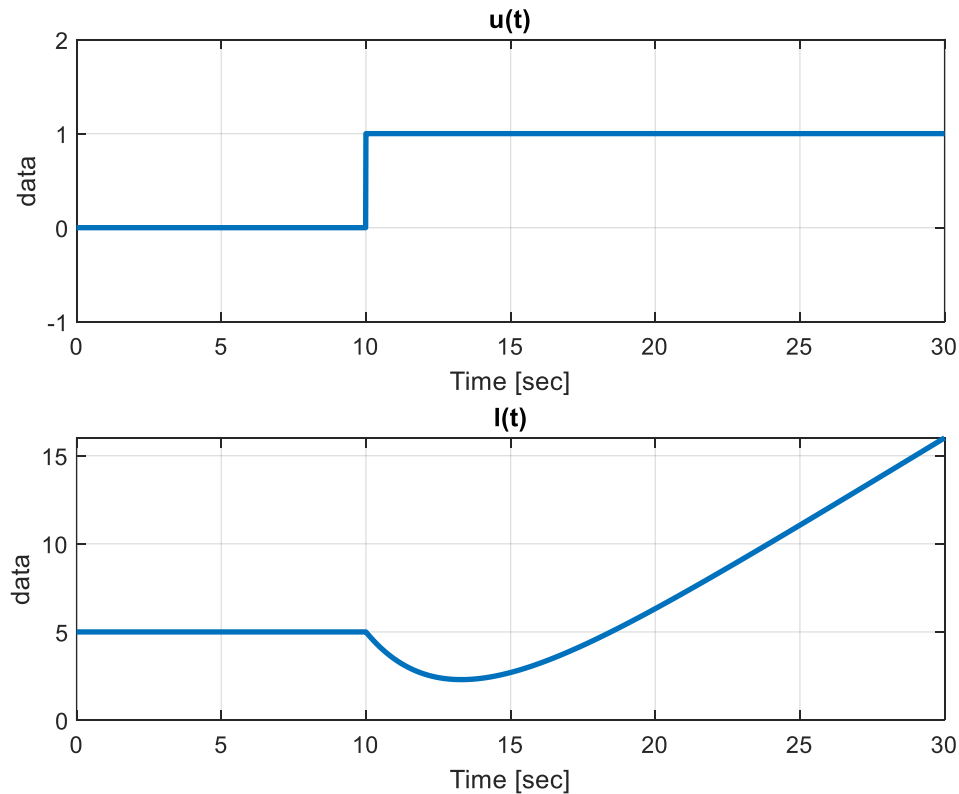


$$F_s^\ell(s) = \frac{1/\rho A}{s} \frac{1-\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$$

$$F_w^\ell(s) = \frac{1/\rho A}{s} \frac{1-\tau_3 s}{1+\tau_4 s}$$

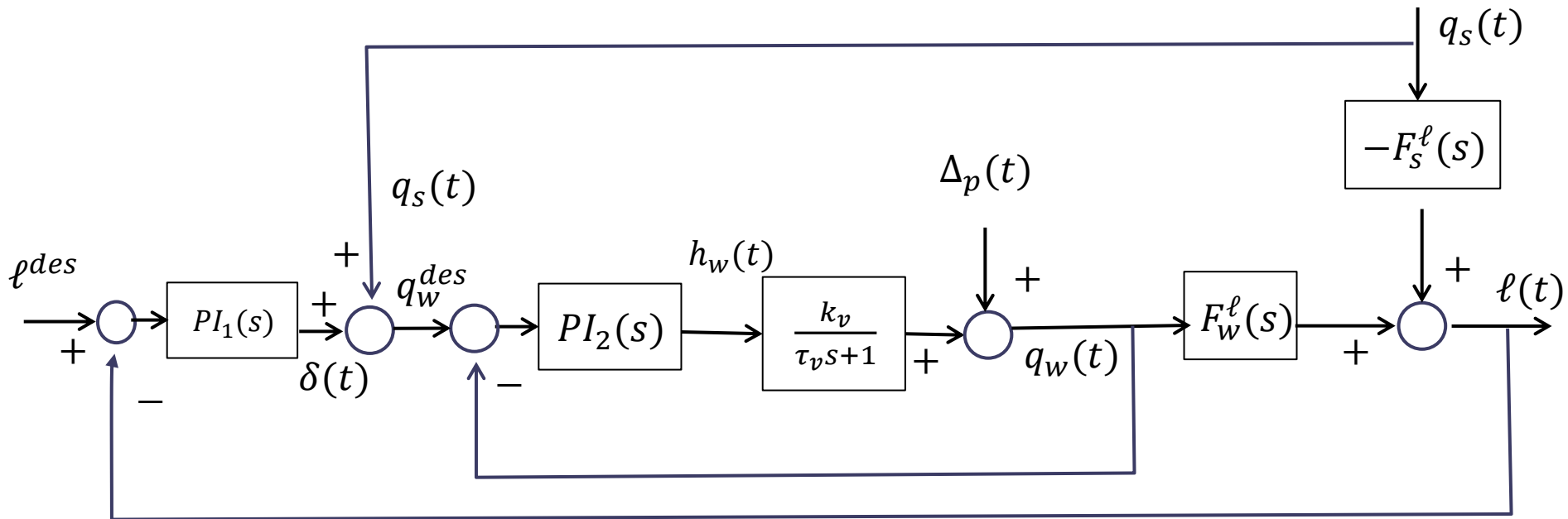
$$F(s) = \frac{1}{s} \frac{1-6s}{1+3s}$$

Esempio di risposta al gradino di una FdT con un polo nell'origine ed una ulteriore coppia polo-zero con lo zero reale positivo ed il polo reale negativo



Files `esempioZeroInstabile.slx`
`esempioZeroInstabile_script.m`

Regolazione a tre elementi con i modelli di processo che tengono conto dei fenomeni di risposta inversa del livello nel corpo cilindrico



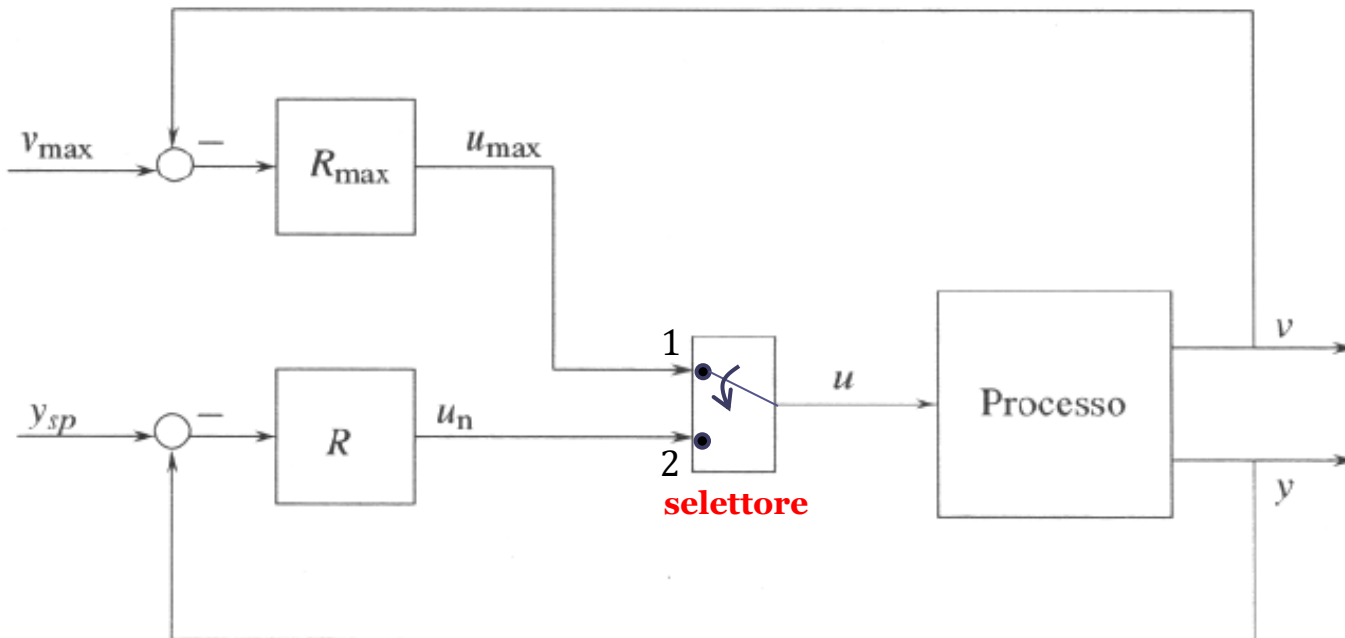
$$F_s^\ell(s) = \frac{1/\rho A}{s} \frac{1 - \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

$$F_w^\ell(s) = \frac{1/\rho A}{s} \frac{1 - \tau_3 s}{1 + \tau_4 s}$$

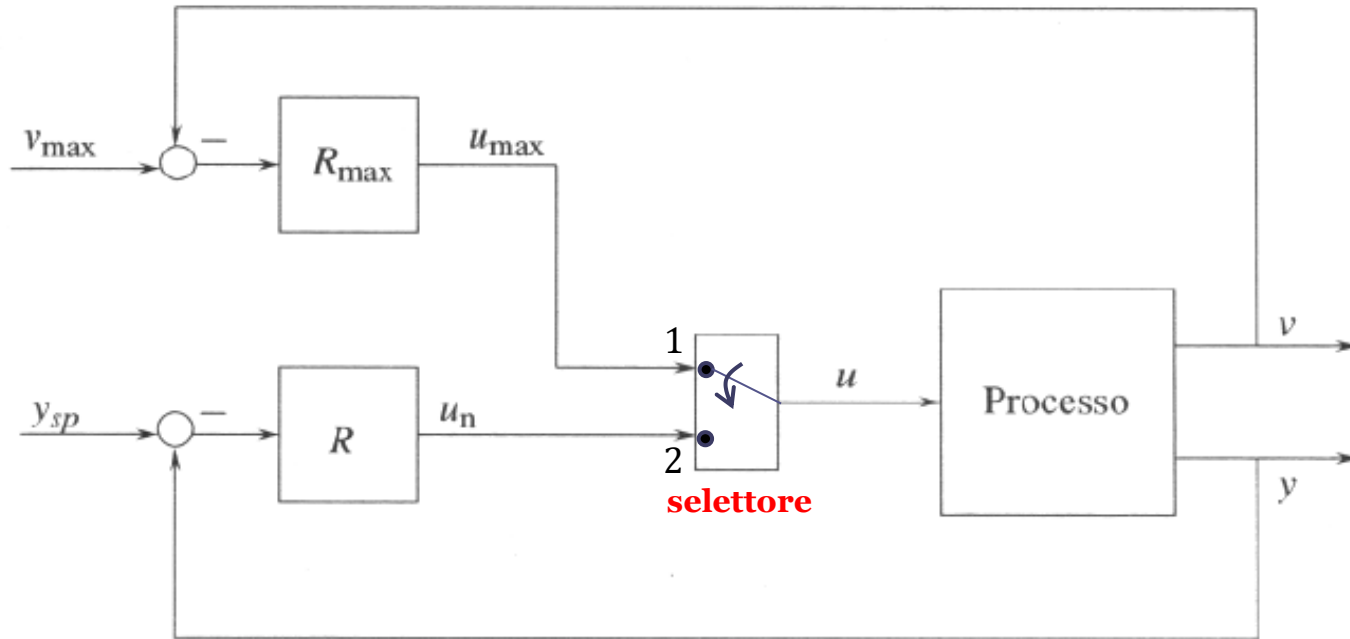
Controllo con selettore (override control)

Si usa quando nel controllare una variabile si devono soddisfare **vincoli** inerenti una o più variabili “secondarie”. Viene anche detto controllo “override”.

Si faccia riferimento allo schema seguente. La variabile y è la variabile principale, ed y_{sp} è il relativo set-point. La variabile secondaria v non deve invece superare la soglia massima v_{max} (soft constraint). Il sistema di controllo contiene un blocco selettore che abilita il passaggio del segnale di controllo u_{max} generato dal controllore R_{max} o del segnale di controllo u_n generato dal controllore R .



La logica di commutazione può essere definita in vari modi.

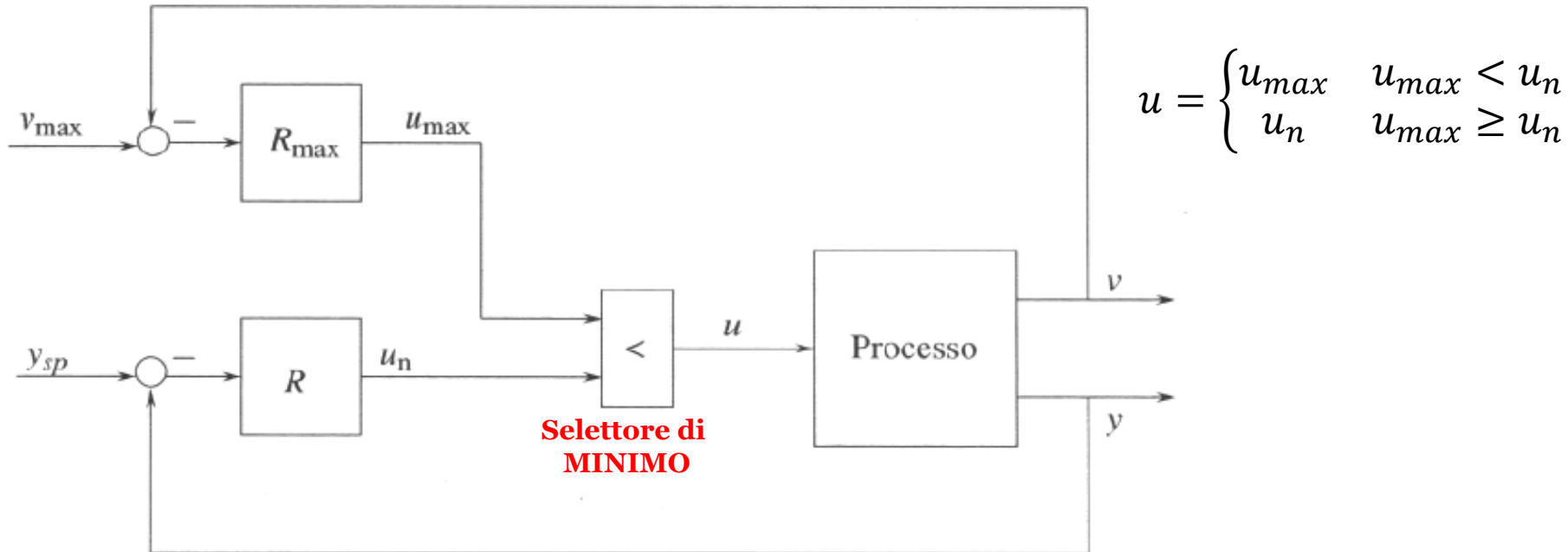


Una possibile logica di commutazione è la seguente:

Selettore in posizione: $\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{quando } v \geq v_{max} \\ 2 \quad \text{quando } v < v_{max} \end{array} \right.$

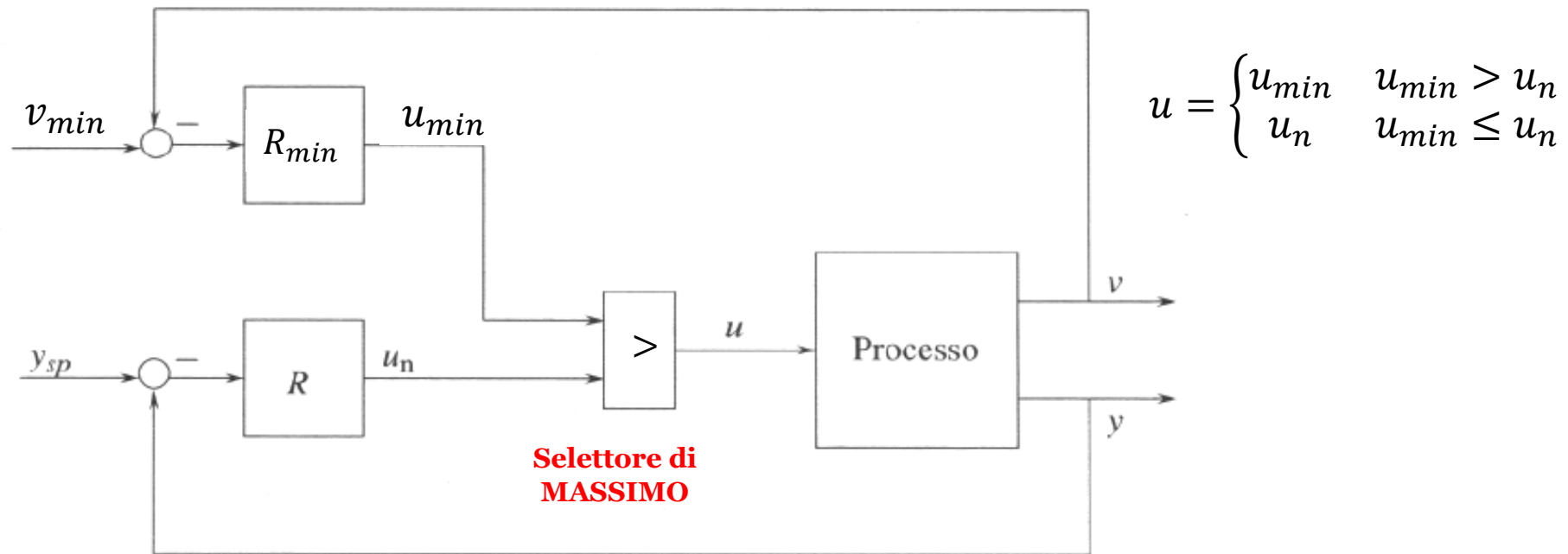
L'unico attuatore disponibile è impiegato per il normale controllo della uscita primaria y fintanto che v rimane inferiore al limite, mentre è utilizzato per far rientrare v sotto il limite quando il limite viene superato.

Una soluzione alternativa per implementare la commutazione fra i due controllori con un comportamento simile prevede di impiegare un blocco **selettore di minimo**, che abilita il «passaggio» del segnale di ingresso inferiore fra u_{max} ed u_n



Tale soluzione ha il vantaggio di garantire la continuità dell'ingresso applicato al processo a cavallo delle commutazioni del selettore.

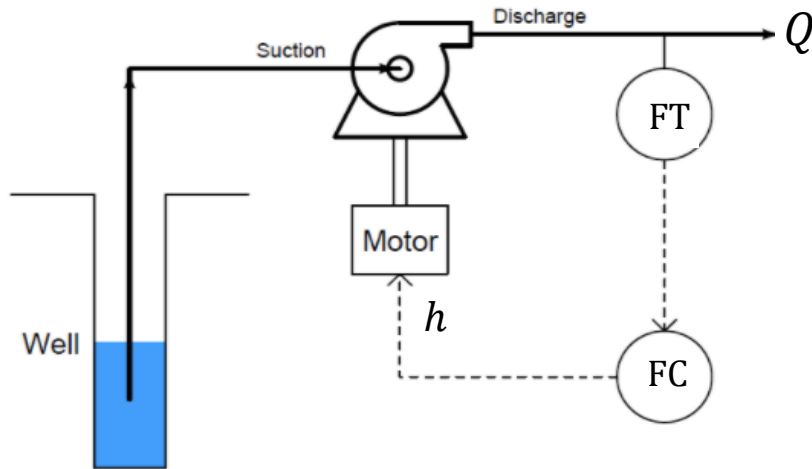
Per garantire invece che la variabile secondaria v non scenda al di sotto della **soglia minima** v_{min} si deve utilizzare un **selettore di massimo**



Nel caso di controllori con azione integrale (PI/PID), qualunque sia la logica di commutazione adottata si deve prestare attenzione ad evitare che nel regolatore non attivo la componente integrale aumenti eccessivamente (ciò indurrebbe un pesante fenomeno di wind-up al momento della sua successiva attivazione). Una possibilità è azzerare la componente integrale del controllore che viene attivato.

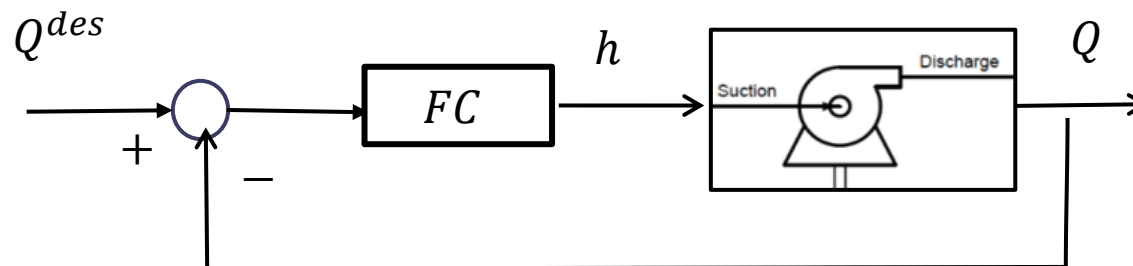
Esempi

Sistema di pompaggio

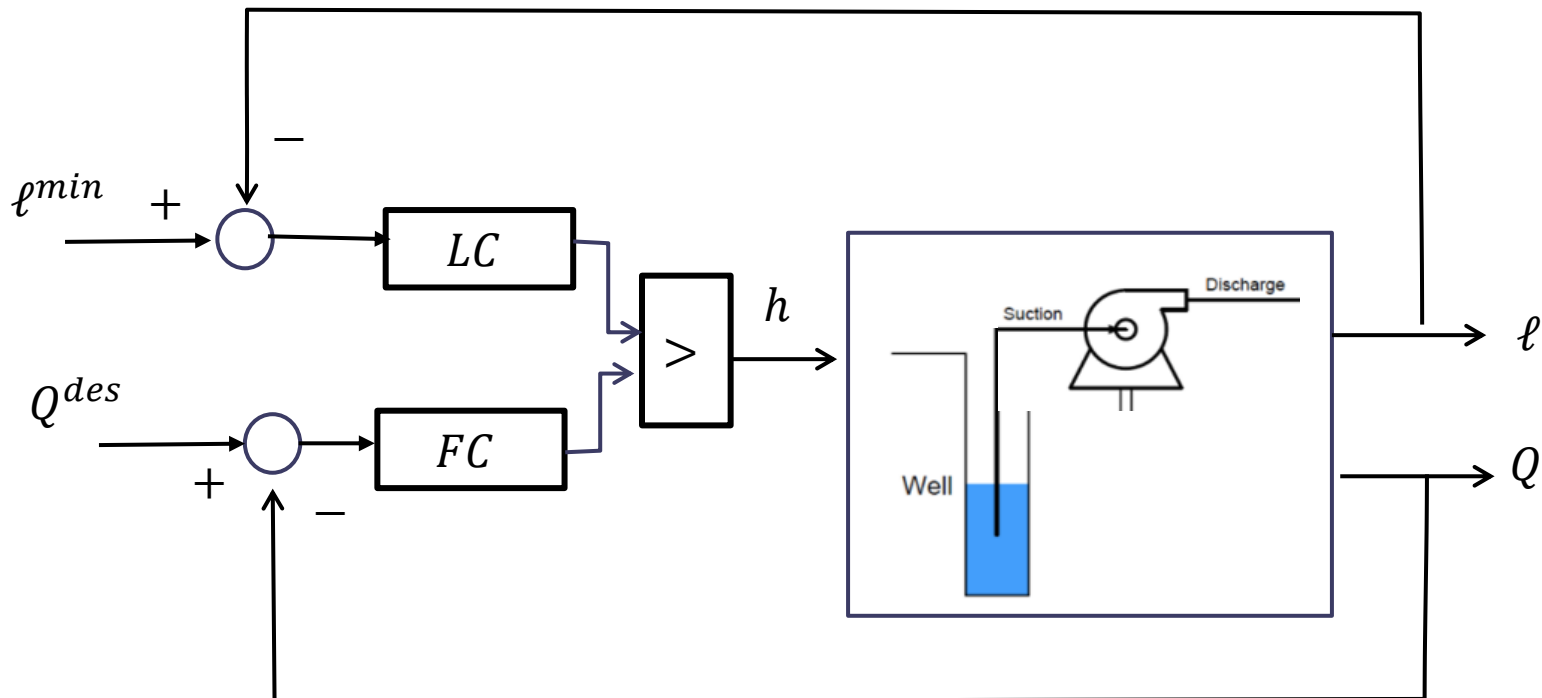


Sistema di pompaggio che deve aspirare un liquido da un pozzo sotterraneo ed erogare una portata Q predefinita all'utenza (h è il comando della pompa a velocità variabile)

Lo schema mostrato in figura (in cui FT rappresenta un sensore/**trasmettitore** di portata, ed FC un **controllore** di portata) rappresenta una modalità di funzionamento non sicura in cui la pompa rischierebbe di aspirare liquido anche dopo che il pozzo sia stato svuotato (con relativo danneggiamento della stessa)

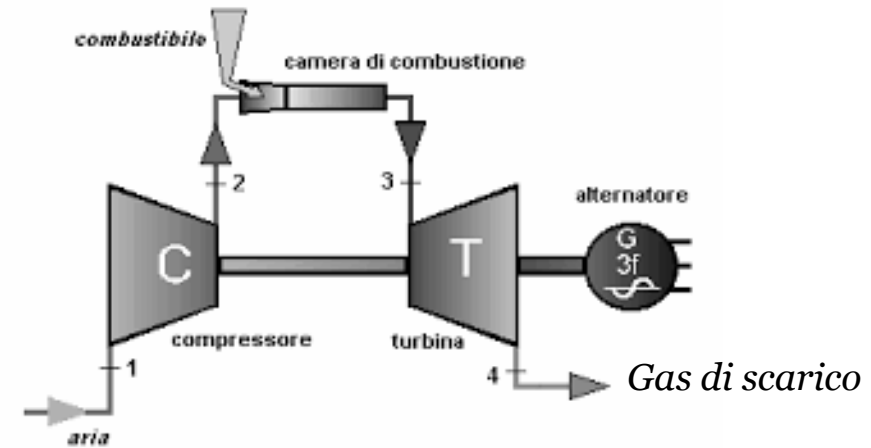
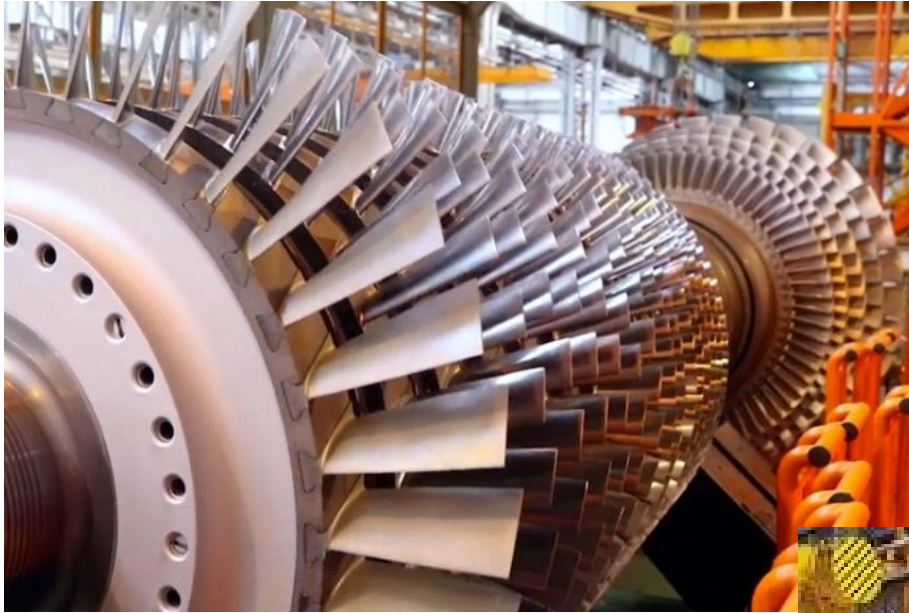


Bisogna monitorare il livello del liquido nel pozzo, e fare in modo che il numero di giri della pompa si riduca progressivamente al ridursi del livello nel pozzo. In luogo di una soluzione di «*hard override*» in cui la pompa viene disattivata nel momento in cui il livello ℓ del pozzo scende al di sotto di un valore minimo, si può implementare una logica basata su un **selettore di massimo** per ottenere uno spegnimento più graduale.



Regolazione di velocità di una turbina a gas

Impiego in impianti per la produzione di energia elettrica



La turbina è posta in rotazione dalla miscela che espande in turbina dalla camera di combustione investendone la palettatura.



Impianti di produzione di energia a ciclo combinato (turbina a gas e turbina a vapore)



Compressore,
camera di combustione, turbina a
gas e
generatore sincrono



Produzione di vapore dal calore
residuo dei fumi di scarico



FUEL/IGV CONTROLLER

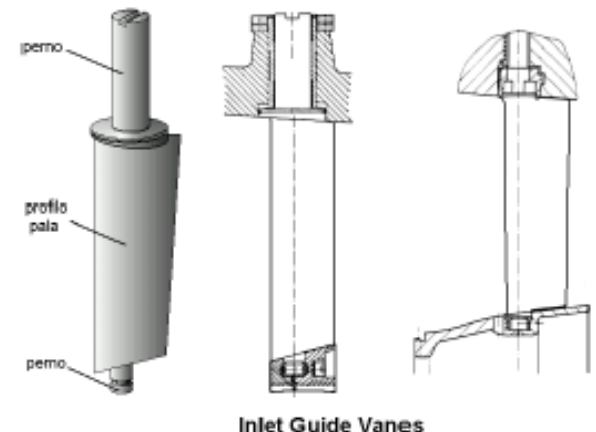
Variabili di uscita

- ω *Velocità angolare del gruppo compressore-turbina-alternatore*
- P_{el} *Potenza elettrica istantanea immessa in rete*
- T_f *Temperatura dei gas di scarico (limitazione - override)*

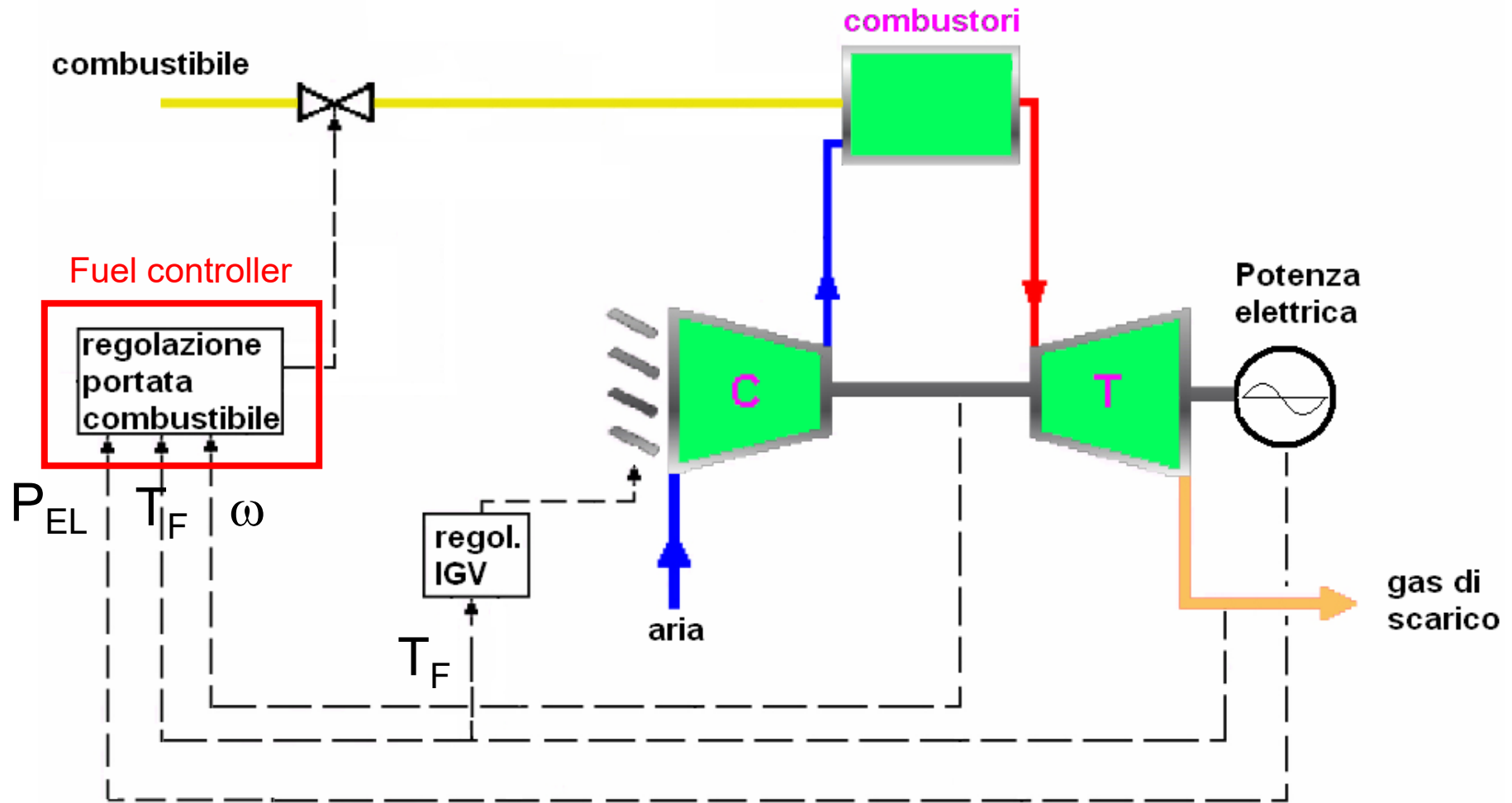
Variabili di ingresso

Q_{fuel} *Portata di combustibile
(immesso in camera di combustione)*

*Portata di aria aspirata
(variata tramite le Inlet Guide
Vanes, IGV)*

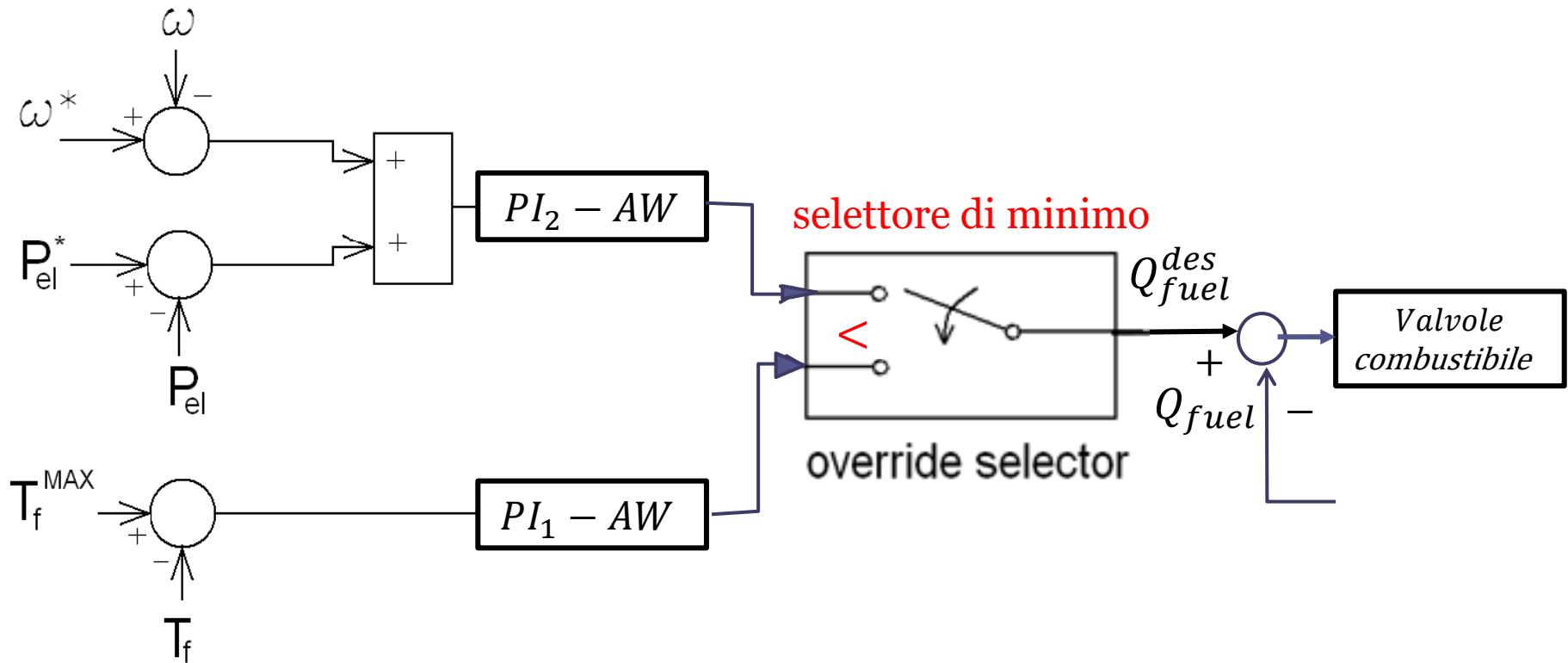


Fuel/IGV controller



Fuel controller (semplificato)

La portata del gas combustibile è modulata mediante un sistema di **controllo in cascata** con due anelli esterni in parallelo di velocità/potenza e di temperatura (con **over-ride e selettore di minimo**) ed anello interno di portata.



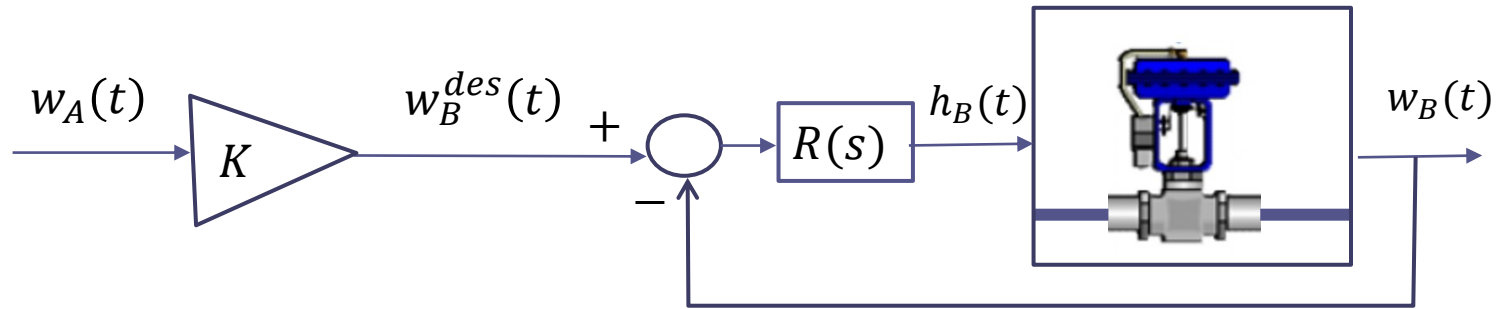
Controllo di rapporto (ratio control)

Un ulteriore esempio di sistema di controllo in cui possono coesistere più anelli fra loro accoppiati, non più «annidati» come nel controllo in cascata ma in serie.

Uno degli ambiti in cui trova maggiore applicazione è costituito da processi in cui sia necessario **miscelare fra loro dei fluidi o delle polveri in un rapporto assegnato**.

Questa è una esigenza comune nell'industria chimica, in cui un prodotto si ottiene miscelando fra loro reagenti in modo che siano soddisfatti rapporti stechiometrici ben precisi. Una applicazione di grande rilievo in cui si riscontra tale esigenza è il **controllo della combustione**, in cui le portate di combustibile e di aria immesse in camera di combustione devono soddisfare un preciso rapporto stechiometrico onde garantire una combustione stabile e completa e con un elevato rendimento termico.

Schema di base del controllo di rapporto

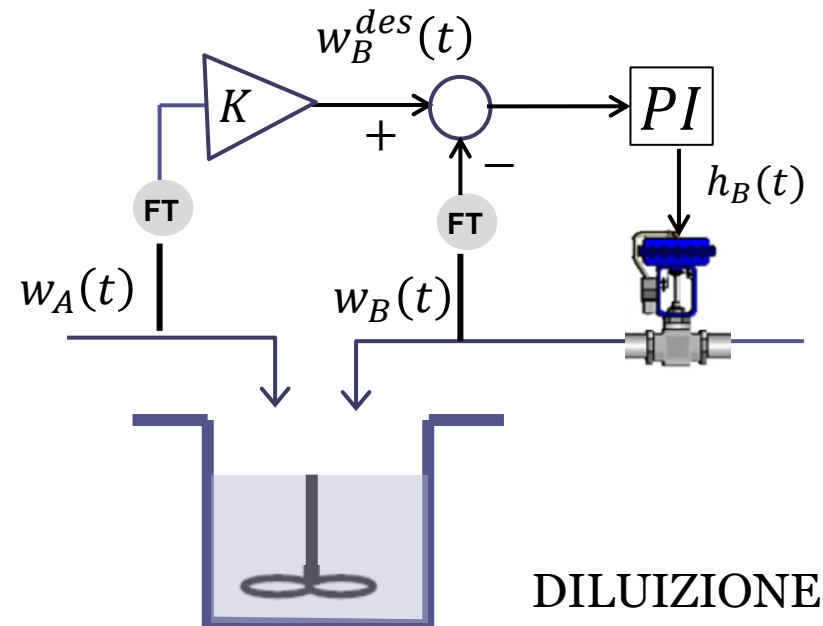


K è il rapporto stechiometrico desiderato fra le portate $w_A(t)$ e $w_B(t)$ delle sostanze A e B.

Target:
$$\frac{w_B(t)}{w_A(t)} = K$$

La portata $w_A(t)$ viene **misurata** ed il suo valore moltiplicato per K definisce il set-point $w_B^{des}(t)$ per la portata della sostanza B.

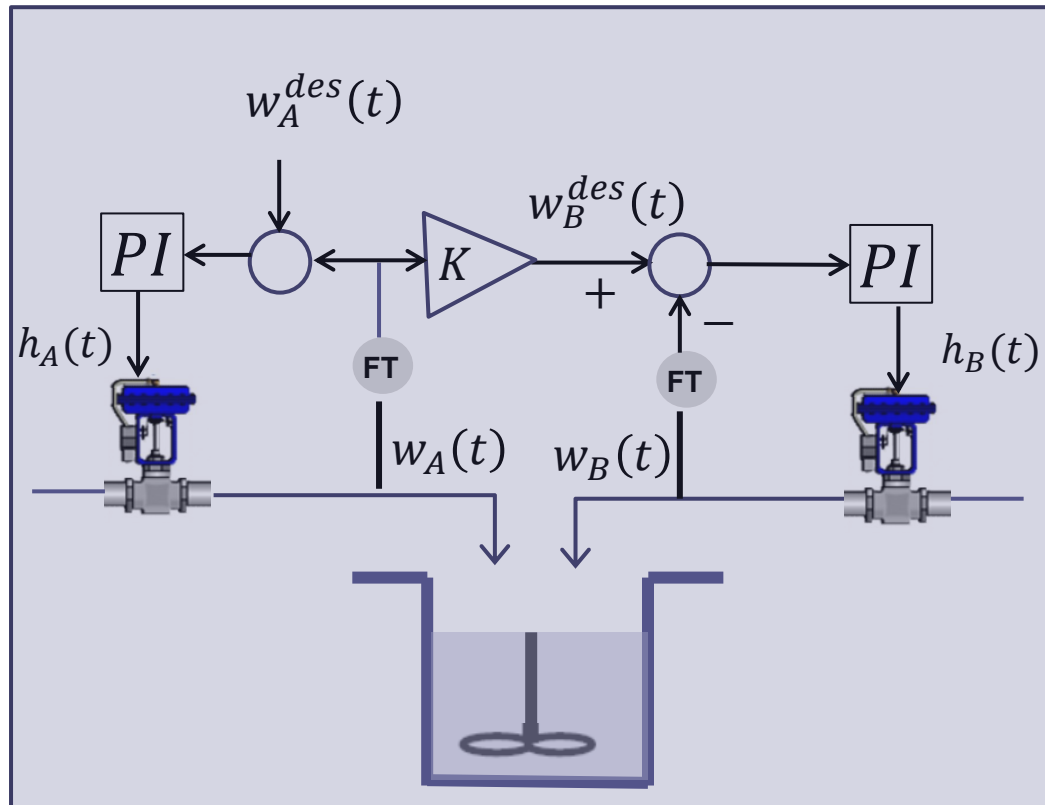
$$w_B^{des}(t) = K w_A(t)$$



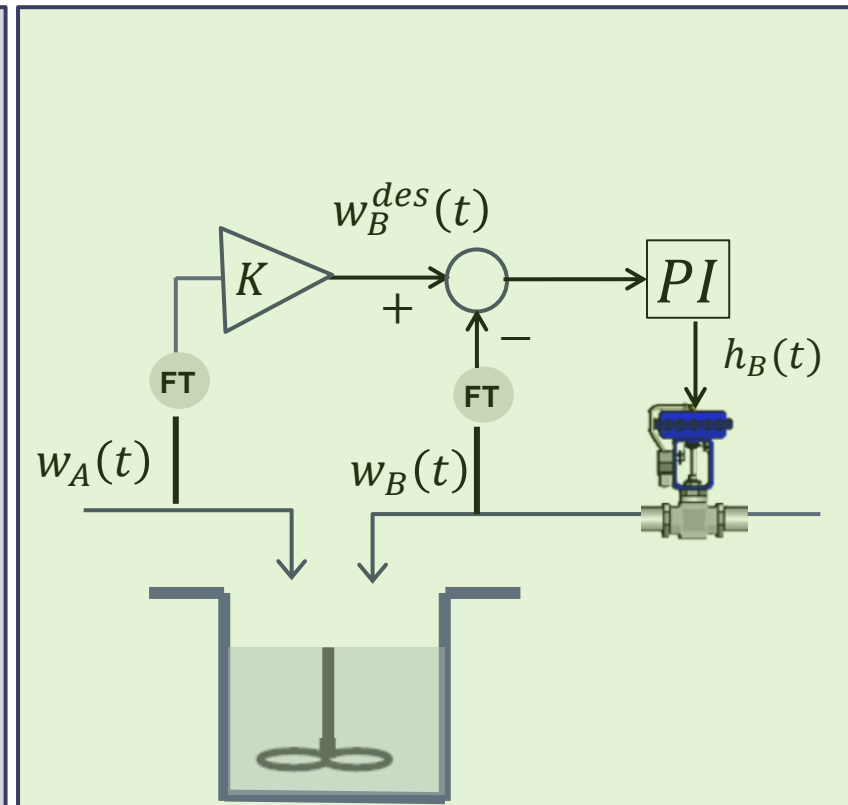
DILUIZIONE

In funzione del fatto che la portata $w_A(t)$ della sostanza A sia asservita o meno ad un loop di regolazione, si parla di «miscelazione» oppure di «diluizione»

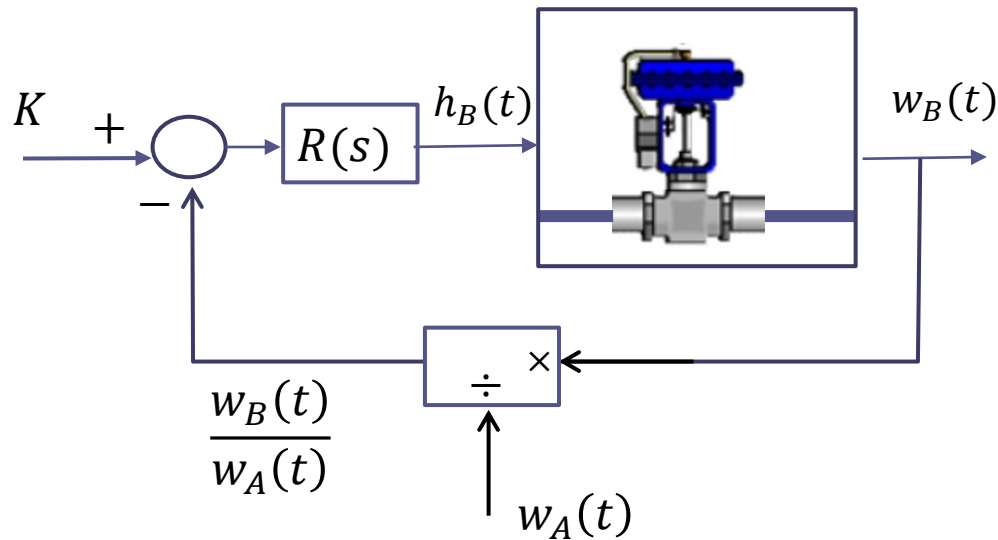
MISCELAZIONE



DILUIZIONE



Il controllo di rapporto è realizzato anche attraverso il seguente schema alternativo



Se $w_A(t)$ è soggetto ad ampie variazioni si tende a preferire la soluzione illustrata nelle slides precedenti, in quanto la variazione nel guadagno dell'anello di controllo che si avrebbe nello schema soprariportato avrebbe influenze potenzialmente nefaste sulla stabilità e sulle prestazioni dello schema.

Controllo della combustione

Il controllo della combustione in una caldaia rappresenta una regolazione critica per via del gran numero di realizzazioni e dell'impatto in termini sia economici (in una combustione mal gestita l'efficienza energetica crolla) che ambientali (elevati tassi di inquinamento)

L'architettura di riferimento prevede una combinazione fra il controllo in cascata, il controllo di rapporto, ed il controllo con selettore.

Gli attuatori sono due:

La valvola di adduzione del combustibile, che consente di modulare la portata $w_c(t)$ del combustibile immessa in camera di combustione (CdC)

Le serrande aria, la cui apertura consente di modulare la portata $w_a(t)$ dell'aria comburente immessa in CdC

E' una regolazione critica anche per la presenza di peculiari aspetti di sicurezza conseguenti alla necessità di immettere combustibile in CdC solo in presenza di fiamma, onde evitare rischi di esplosione.

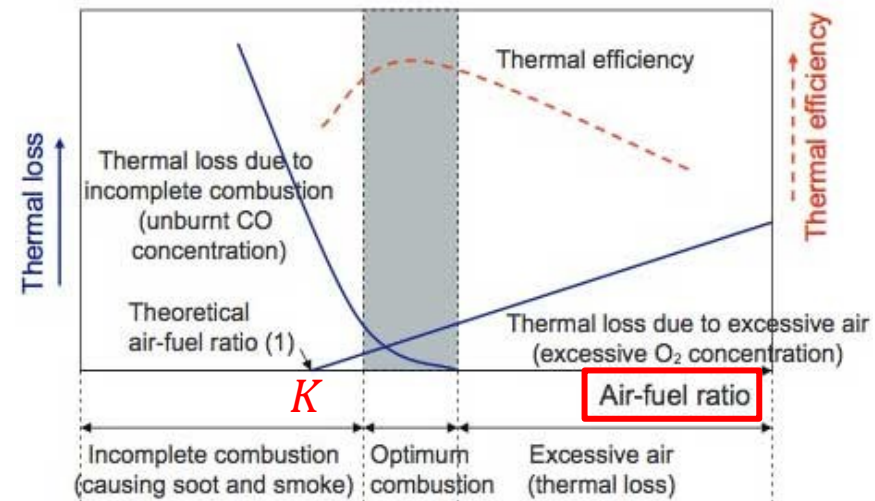
La combustione è una reazione chimica esotermica tra il carbonio contenuto nel combustibile e l'ossigeno contenuto nell'aria comburente.

Fra la portata d'aria e la portata del combustibile deve sussistere un preciso rapporto stechiometrico K («air-fuel ratio») volto a «sostenere» la combustione.

$$\frac{w_a(t)}{w_c(t)} = K$$

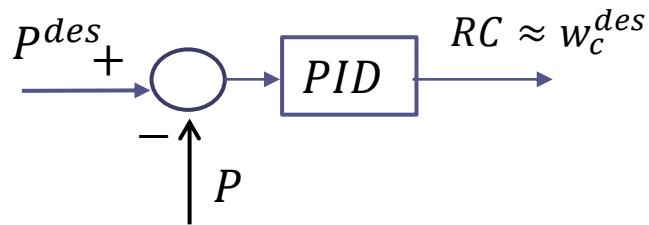
Se il rapporto $w_a(t)/w_c(t)$ è inferiore a K si accumula in CdC dell'incombusto, con conseguenti rischi di esplosione.

Il punto di funzionamento ottimale prevede un **piccolo eccesso d'aria** rispetto al rapporto stechiometrico, onde garantire che la combustione avvenga in maniera completa. Tale accesso d'aria non deve però essere troppo elevato onde evitare una eccessiva riduzione della temperatura T della fiamma, con conseguente crollo del rendimento (il trasferimento della energia termica generata durante la combustione avviene difatti in prevalenza mediante irraggiamento, ed è pertanto proporzionale a T^4)

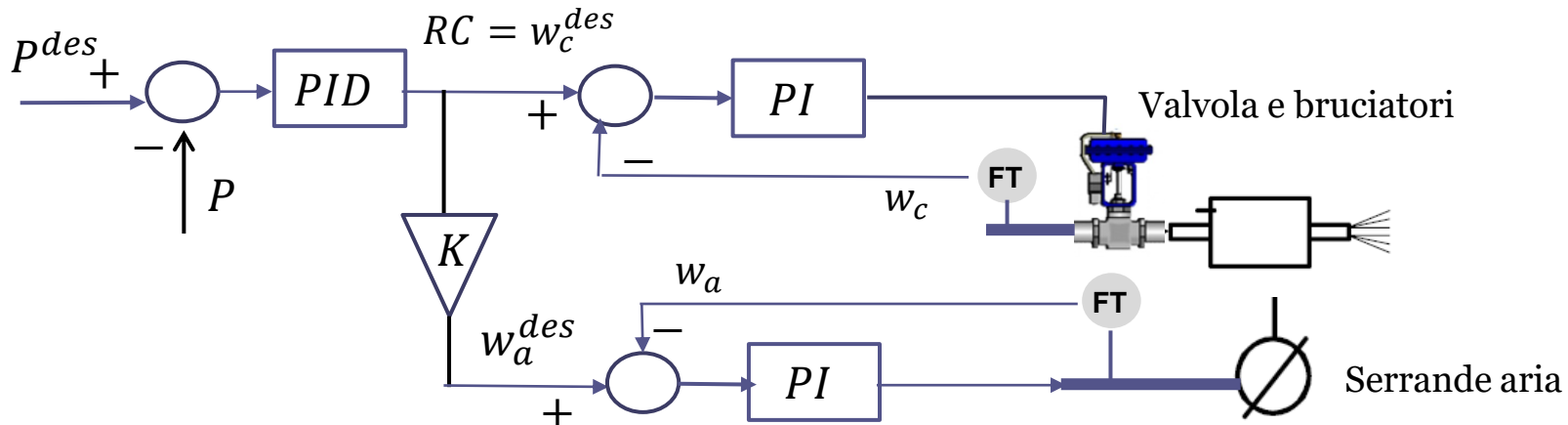


Nelle caldaie di medie e grandi dimensioni, la supervisione ed il controllo della combustione è asservito ad un complesso sistema di controllo automatico.

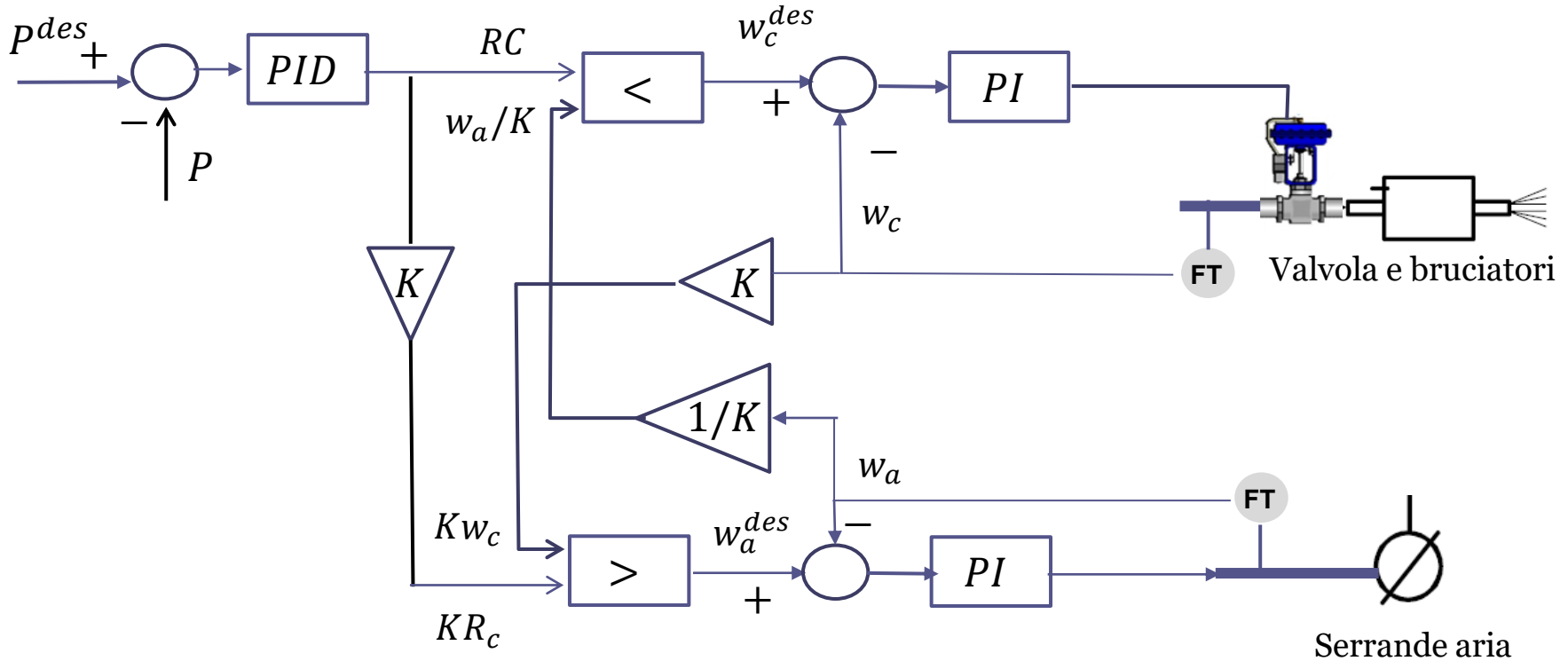
Il punto di partenza è un anello di pressione, nel quale si impiega tipicamente un controllore PID che fornisce un segnale RC chiamato «Richiesta caldaia», il cui significato è assimilabile al set-point per la portata del combustibile.



Si potrebbe determinare il set point per la portata dell'aria moltiplicando per K la richiesta caldaia, ed impiegando successivamente tali segnali nell'ambito di una regolazione in cascata



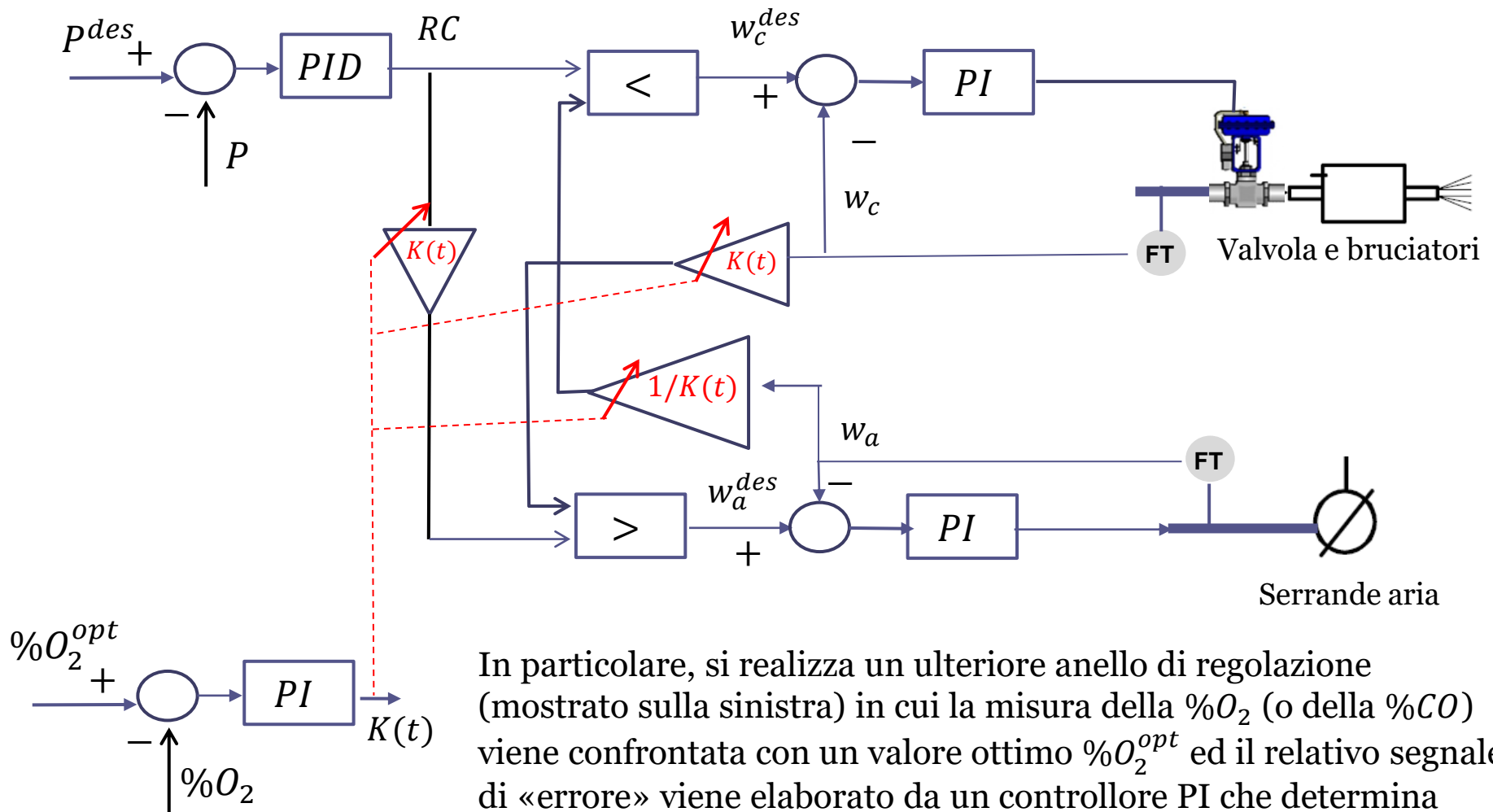
In realtà si impiega una architettura più sofisticata che vede coinvolto il controllo con selettore ed il controllo di rapporto:



Il **selettore di minimo** serve a garantire che il set point per la portata del combustibile non sia mai superiore al valore w_a/K che la portata d'aria immessa in ogni istante in CdC (e misurata istante per istante) consente di bruciare.

Il **selettore di massimo** serve invece a garantire che il set point per la portata dell'aria non sia mai inferiore al valore Kw_c che serve a garantire la combustione della portata del combustibile immessa in ogni istante in CdC (e misurata istante per istante)

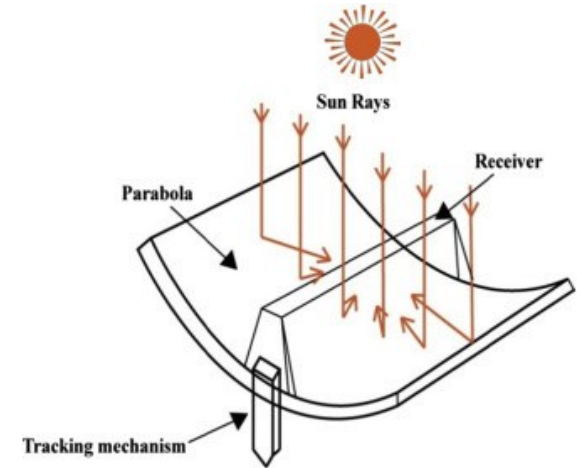
Vi è un **ulteriore possibile affinamento dello schema**. Il valore di K viene **variato istante per istante** sulla base della misura della percentuale $\%O_2$ di ossigeno (o di anidride carbonica) presente nei fumi di scarico, che costituisce un «indicatore di buona combustione».



In particolare, si realizza un ulteriore anello di regolazione (mostrato sulla sinistra) in cui la misura della $\%O_2$ (o della $\%CO$) viene confrontata con un valore ottimo $\%O_2^{opt}$ ed il relativo segnale di «errore» viene elaborato da un controllore PI che determina istante per istante il valore di K

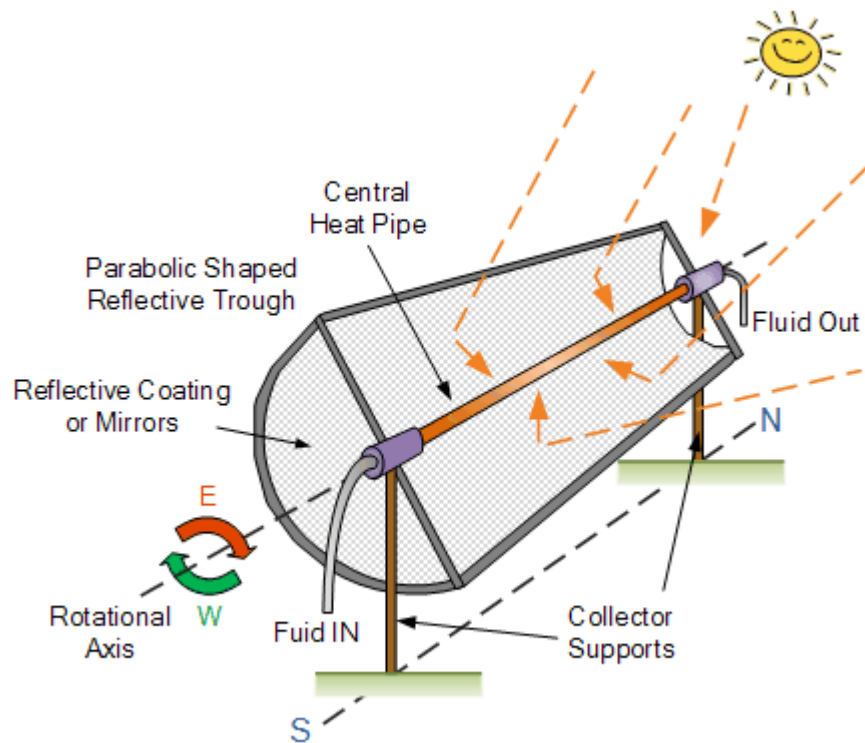
Controllo di un impianto solare termodinamico

Un impianto solare termodinamico, anche noto come CSP (Concentrating Solar Plant) sfrutta come fonte energetica primaria la radiazione solare. In una delle realizzazioni maggiormente impiegata nella pratica (parabolic through) dei **collettori solari di forma parabolica** concentrano la radiazione solare su un **tubo ricevitore** all'interno del quale transita un **fluido termovettore** che viene riscaldato e può essere impiegato per generare vapore, e quindi energia elettrica, accumulato in serbatoi di storage, o utilizzato in altri modi ancora.



Un impianto CSP prevede numerose regolazioni in funzione della particolare configurazione impiantistica.

La posizione angolare degli specchi parabolici viene variata nell'arco della giornata in funzione dell'angolo di incidenza della radiazione solare



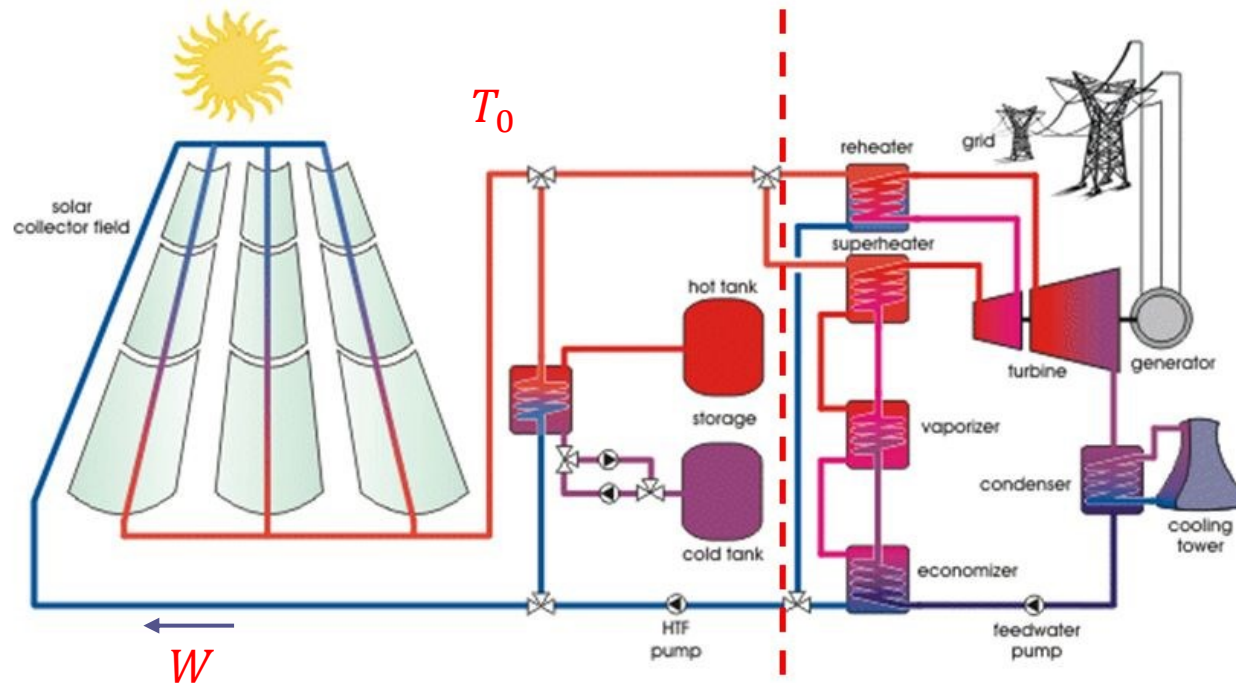
E' una regolazione predittiva le cui principali criticità sono di carattere meccanico, date le grosse dimensioni dei collettori.

Specchi di Fresnel come alternativa ai parabolic trough



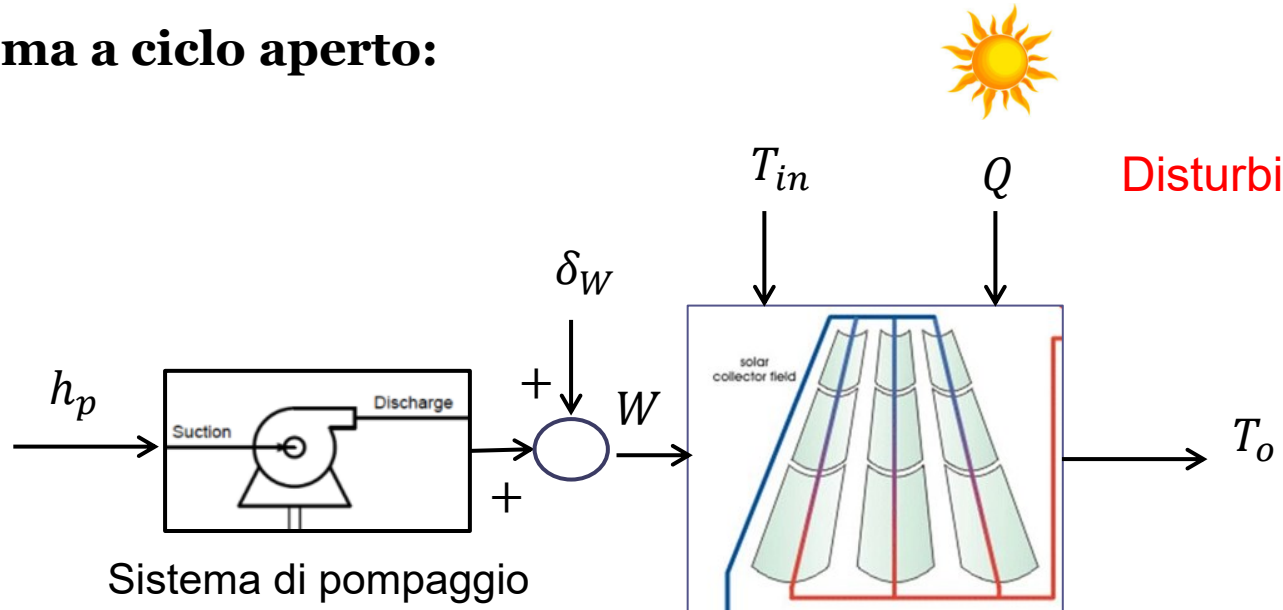
La regolazione del «campo solare», ben più problematica da un punto vista «controllistico», ha come parametro di **ingresso** principale la portata W con cui il fluido termovettore viene fatto circolare nei tubi ricevitori, e come parametro di **uscita** la temperatura T_0 del fluido termovettore all'uscita del campo solare. Altrettanto delicata è la gestione dei sistemi di accumulo e dell'interfacciamento con il sistema di produzione di energia.

Schematic of a CSP plant with energy storage capability



Presentiamo una possibile architettura per il sistema di controllo del campo solare

Sistema a ciclo aperto:



h_p Comando della pompa a velocità variabile

T_{in} Temperatura del fluido all'ingresso del campo solare

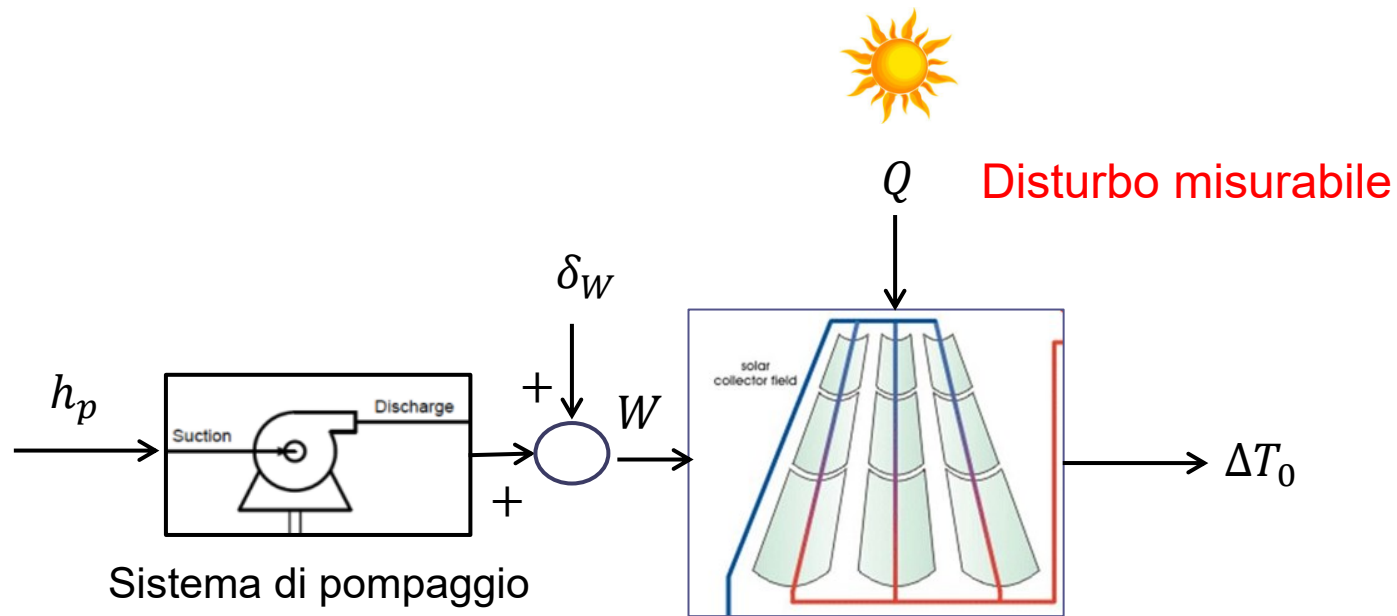
Q Potenza della radiazione solare incidente

δ_W Disturbo sulla portata

Considerando come variabile di uscita il **salto termico**

$$\Delta T_o = T_o - T_{in}$$

il modello si semplifica

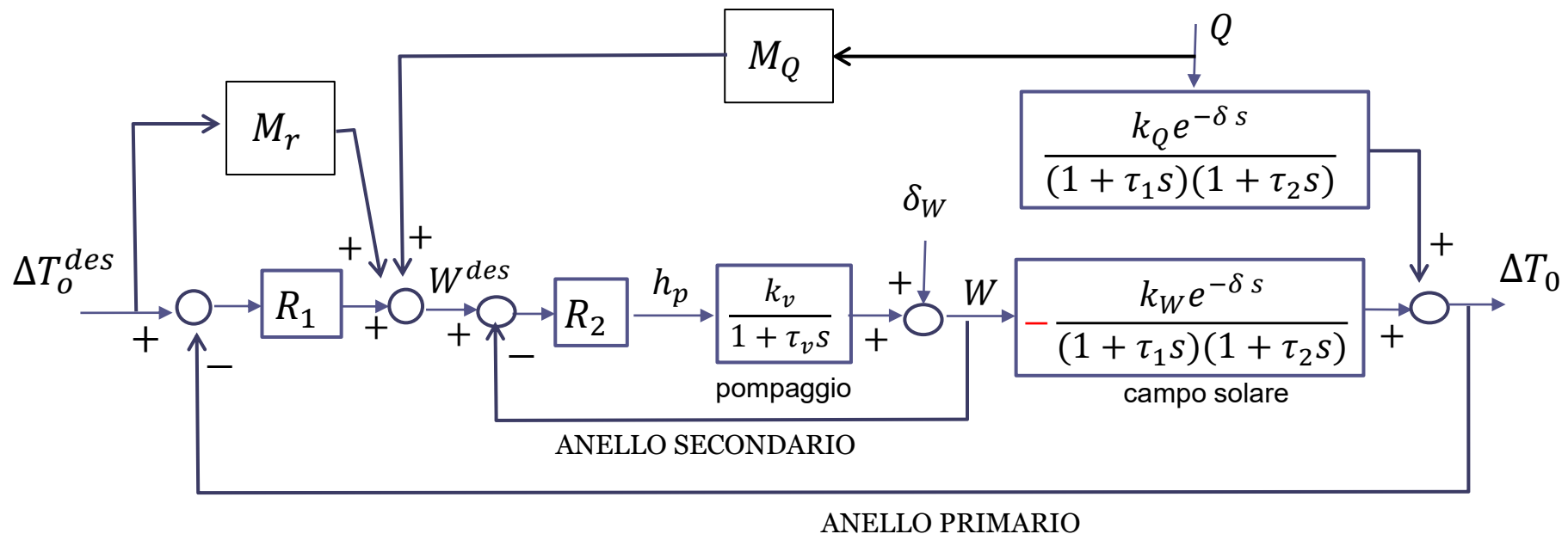


Elementi della architettura di controllo:

Controllo in cascata con anello primario sul salto termico e anello secondario sulla portata del fluido termovettore

Filtro M_Q di **compensazione del disturbo misurabile** Q

Anticipo sul set-point (filtro M_r)

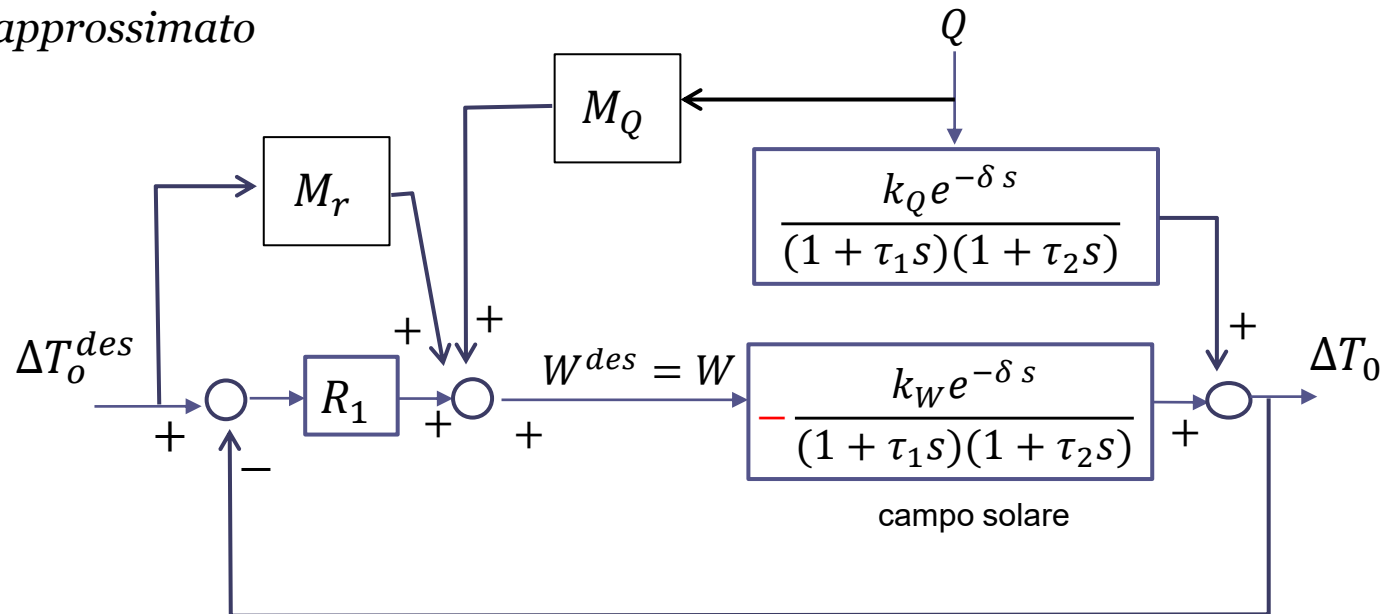


N.B. il modello del processo è **linearizzato** intorno ad un punto di lavoro

Progetto dei filtri M_Q ed M_r

Per progettare il filtro di compensazione del disturbo misurabile ed il filtro di anticipo sul set-point è conveniente approssimare l'anello secondario mediante un anello istantaneo unitario ($W=W^{des}$)

Schema approssimato



ANELLO PRIMARIO

$$M_Q = - \frac{\frac{k_Q e^{-\delta s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}}{- \frac{k_W e^{-\delta s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}} = \frac{k_Q}{k_W}$$

Il filtro di compensazione del disturbo misurabile è (idealmente) un semplice guadagno

$$M_r = \frac{1}{\frac{k_W e^{-\delta s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}} = - \frac{1}{k_W} (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) e^{\delta s}$$

Il filtro di anticipo sul set point è non fisicamente realizzabile

Prima strada per approssimare il filtro M_r : aggiungere un numero sufficiente di poli in alta frequenza

$$\widehat{M}_r = \frac{1}{k_W} \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_r s)^2}$$

Seconda strada per approssimare il filtro M_r : rimuovere gli zeri approssimandolo con un filtro statico (un guadagno)

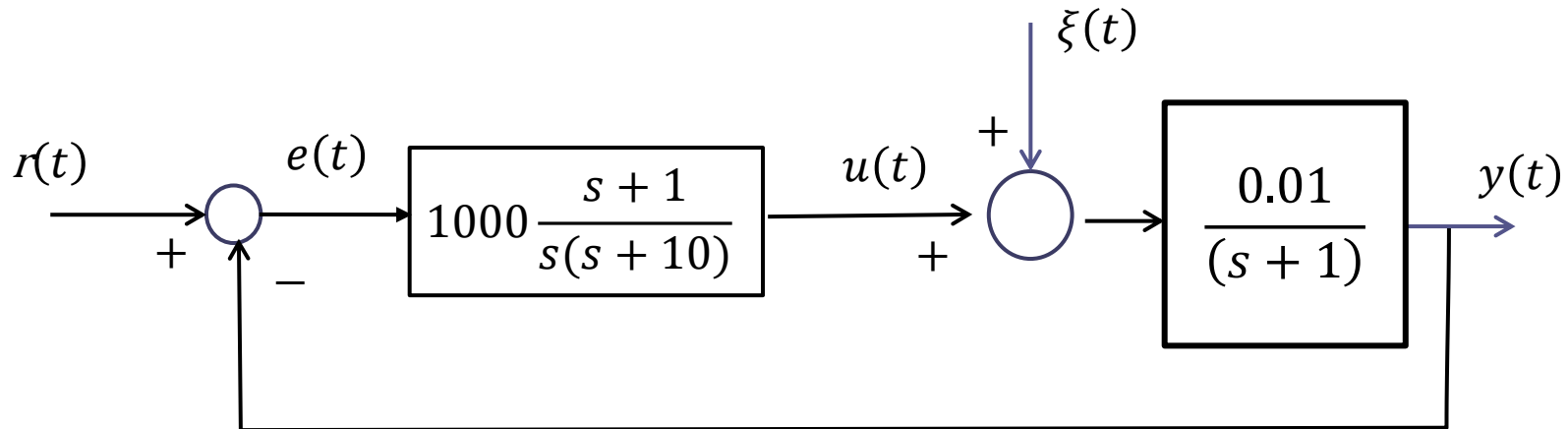
$$\widehat{M}_r = \frac{1}{k_W}$$

Il salto termico ottenibile è limitato in funzione del valore della radiazione solare incidente. La scelta del set-point ΔT_o^{des} deve tenerne conto ($\Delta T_o^{des} \leq Q k_Q$)

Nei casi in cui il valore del ritardo δ risulti molto elevato, l'architettura può essere ulteriormente arricchita inglobando al suo interno il **Predittore di Smith**.

Implementazione digitale dei controllori

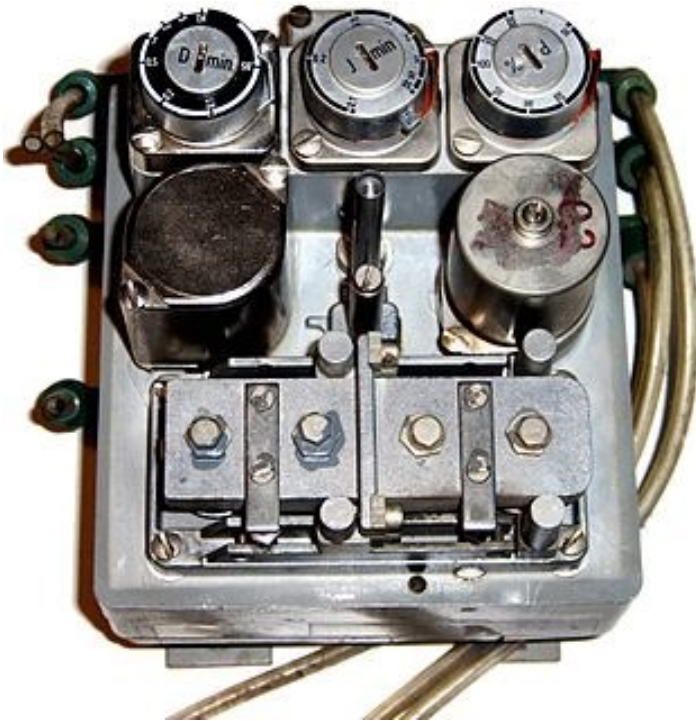
Che significa **concretamente** realizzare un sistema di controllo come quello mostrato nello schema seguente ?



Si deve generare il segnale $u(t)$ tale che
$$\frac{U(s)}{E(s)} = 1000 \frac{s+1}{s(s+10)}$$

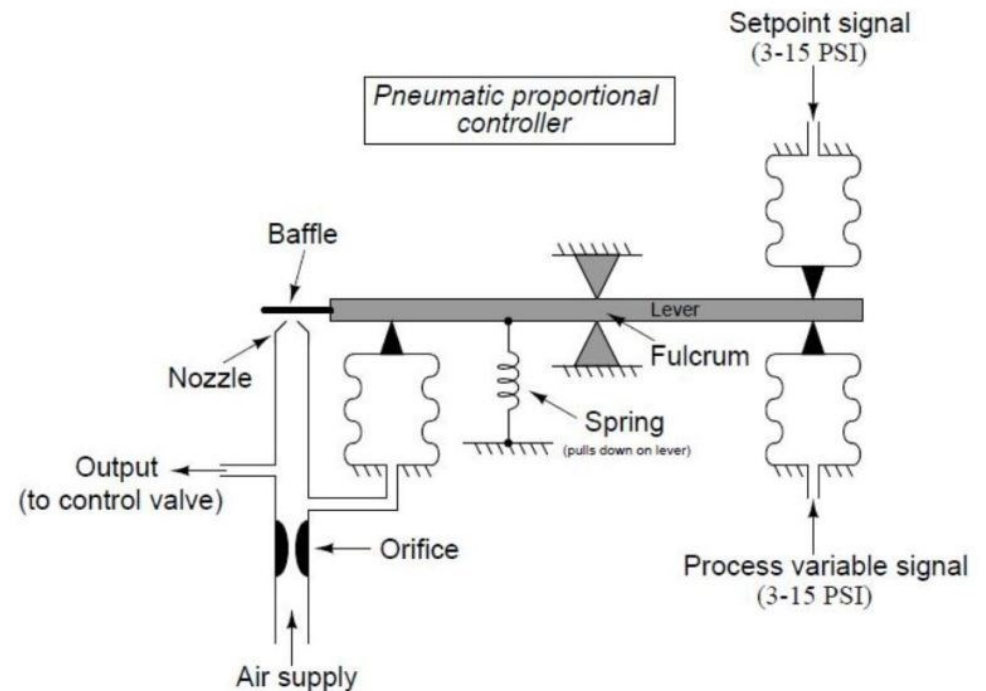
In altri termini, si deve generare **in tempo reale** la soluzione dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\ddot{u}(t) + 10 \dot{u}(t) = 1000 \dot{e}(t) + 1000 e(t)$$



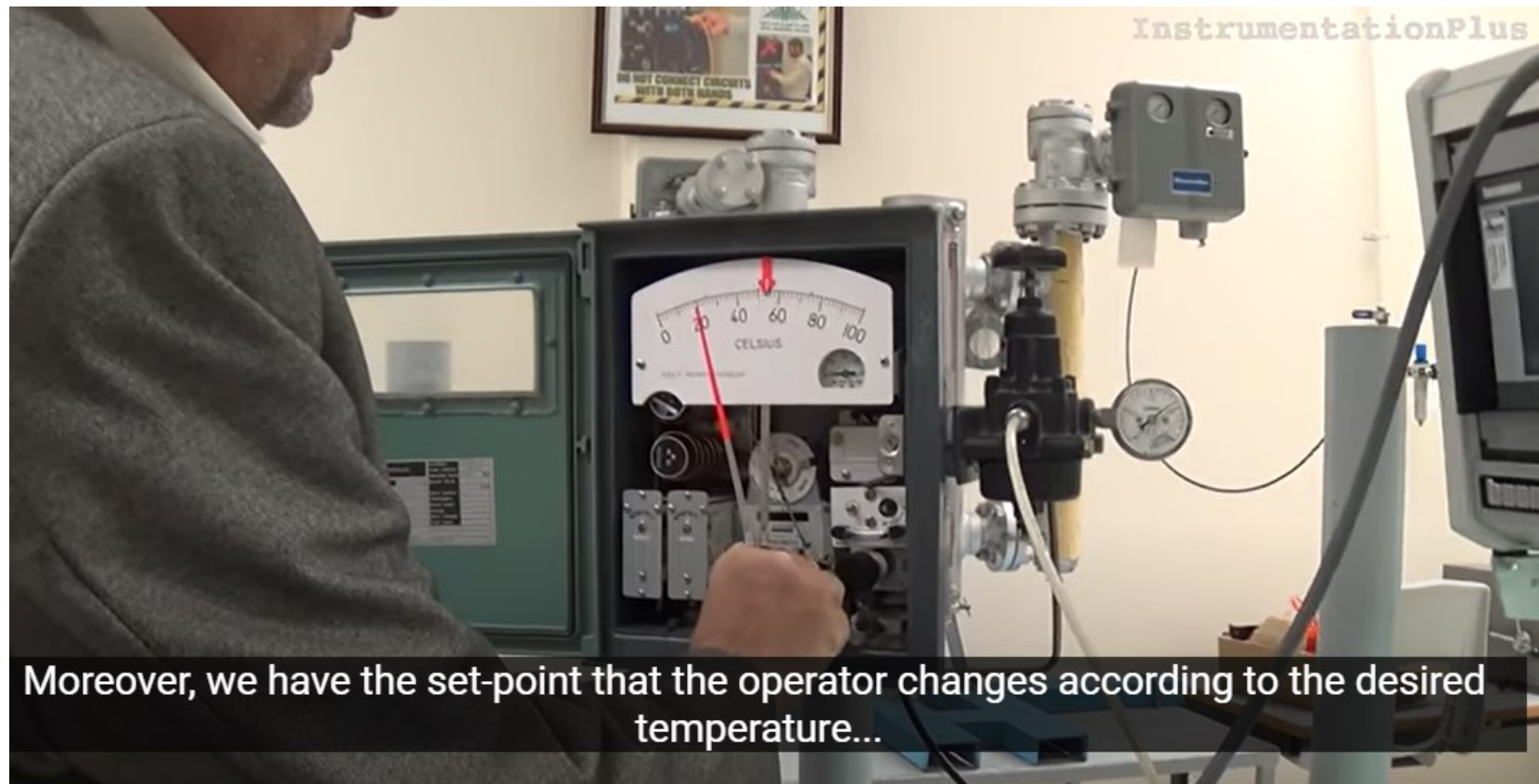
Controllore PID analogico con tecnologia **pneumatica**.

In alto sono presenti i comandi di regolazione per l'azione proporzionale (P), integrale (I) e derivativa (D).



PID Controllers in the 1940 - The 43AP Pneumatic Controller

<https://www.youtube.com/watch?v=DcUsublyzbI>

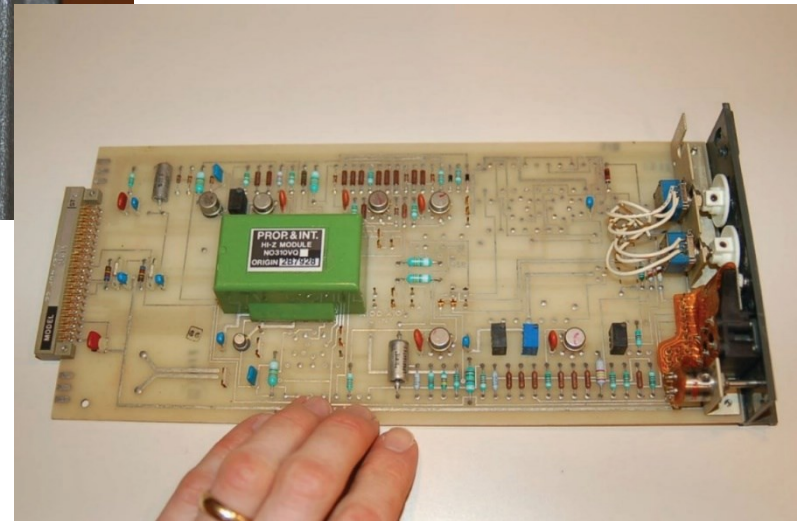


Moreover, we have the set-point that the operator changes according to the desired temperature...

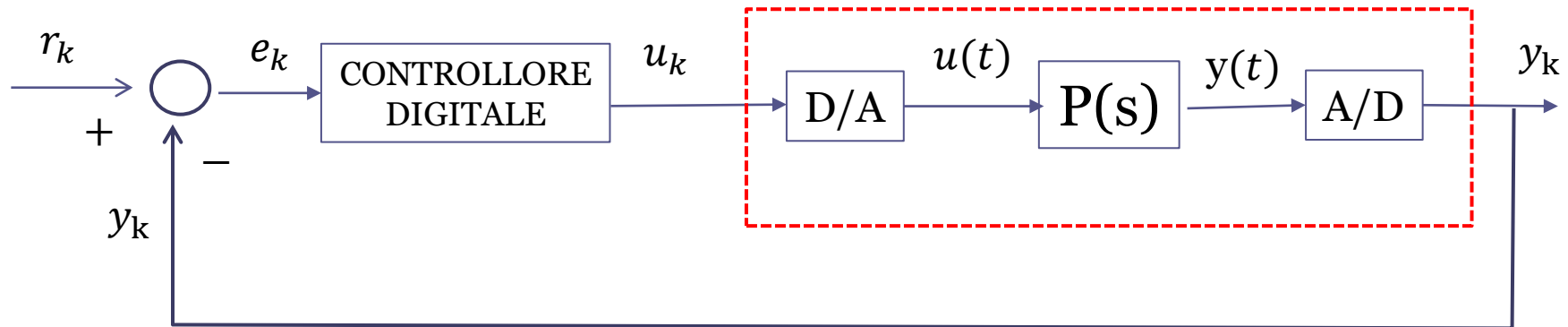


Trimmer per la taratura dei guadagni

Scheda elettronica di controllo



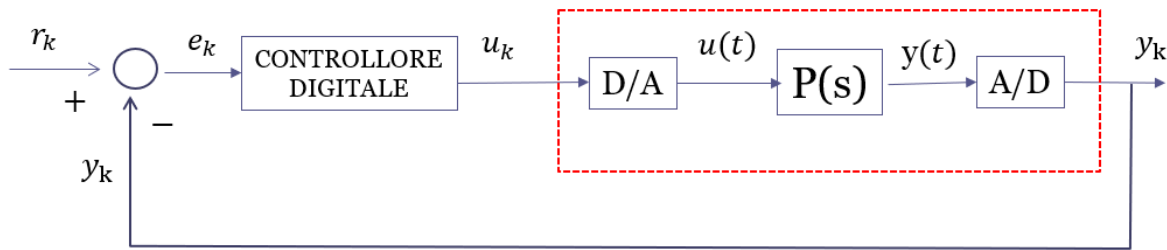
Nella pratica attuale, i sistemi di controllo vengono implementati **per via numerica** utilizzando dei microprocessori digitali che elaborano la **sequenza campionata** della variabile di uscita



A valle del processo (più precisamente, a valle del sensore di misura) è inserito un convertitore analogico digitale (A/D) che estrae dal segnale $y(t)$ la sequenza numerica

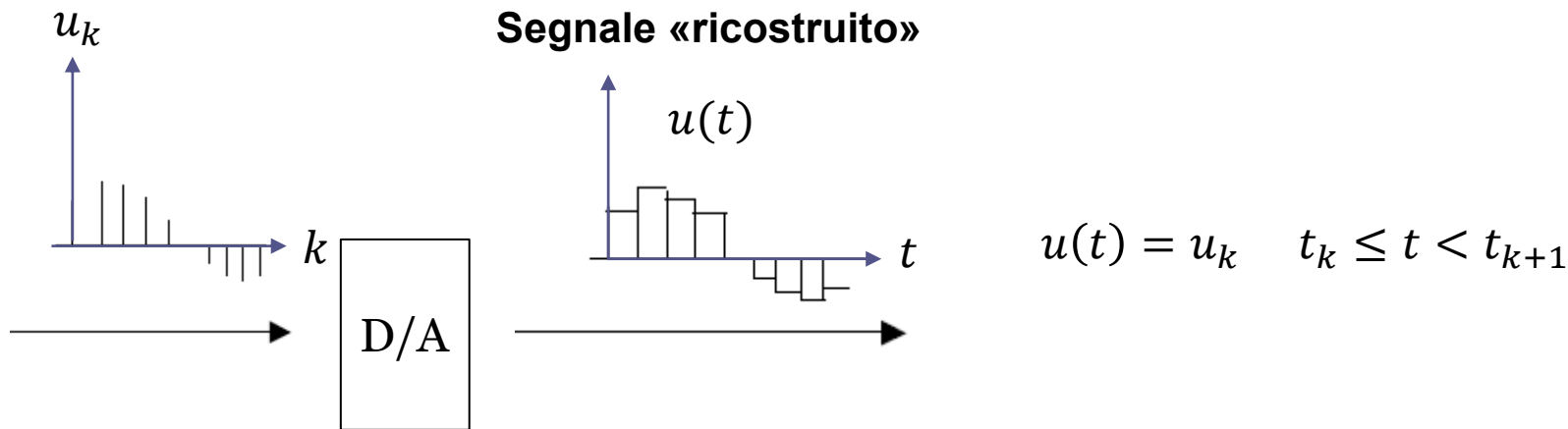
$$y_k = y(kT_c)$$

in cui T_c viene detto «**periodo di campionamento**»



Il blocco «**controllore digitale**» si attiva ogni T_c secondi effettuando il calcolo del segnale u_k ad ogni istante $t_k = kT_c$ con $k = 0, 1, 2, \dots$

Una volta che all'istante generico $t_k = kT_c$ il controllore digitale ha determinato la propria uscita u_k , questo valore transita attraverso un convertitore digitale/analogico (D/A) che converte la sequenza numerica u_k in un segnale $u(t)$ costante a tratti, di fatto «mantenendone costante» il valore fino al successivo istante di campionamento



Implementazione digitale di un controllore PID

$$u_{PID}(t) = u_P(t) + u_I(t) + u_D(t)$$

$$u_P(t) = K_P e(t) \qquad u_I(t) = \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \qquad u_D(t) = K_P T_D \frac{de(t)}{dt}$$

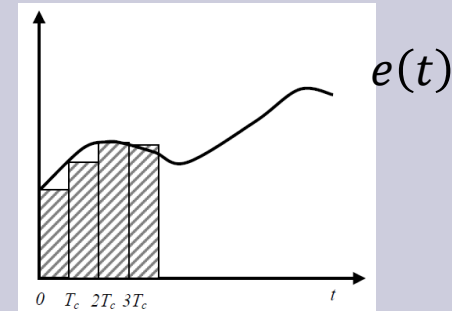
Una possibile implementazione digitale ha la forma seguente:

$$u_{PID,k} = u_{P,k} + u_{I,k} + u_{D,k}$$

P $u_{P,k} = K_P e_k$

I $u_{I,0} = 0$
 $u_{I,k} = u_{I,k-1} + T_c \frac{K_P}{T_I} e_k \qquad k = 1, 2, \dots$

Metodo dei rettangoli per approssimare numericamente (ricorsivamente) il calcolo dell'integrale



D $u_{D,k} = K_P T_D \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c}$

Differenze all'indietro per approssimare numericamente il calcolo della derivata

Legge di controllo complessiva

$$u_{PID,k} = u_{P,k} + u_{I,k} + u_{D,k} \quad (1)$$

$$= K_P e_k + u_{I,k-1} + T_c \frac{K_P}{T_I} e_k + K_P T_D \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c} \quad (2)$$

Dalla eq. (1) ritardata di un passo di campionamento:

$$\begin{aligned} u_{I,k-1} &= u_{PID,k-1} - u_{P,k-1} - u_{D,k-1} \\ &= u_{PID,k-1} - K_P e_{k-1} - K_P T_D \frac{e_{k-1} - e_{k-2}}{T_c} \end{aligned} \quad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (2) e riordinando si ottiene l'espressione finale della legge di controllo PID digitale:

$$e_{-1} = e_{-2} = u_{PID,-1} = 0$$

$$u_{PID,k} = \left(K_P + T_c \frac{K_P}{T_I} + \frac{K_P T_D}{T_c} \right) e_k - \left(K_P + 2 \frac{K_P T_D}{T_c} \right) e_{k-1} + \frac{K_P T_D}{T_c} e_{k-2} + u_{PID,k-1}$$

In forma più compatta:

$$u_{PID,k} = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2} + u_{PID,k-1}$$

$$b_0 = K_P \left(1 + \frac{T_c}{T_I} + \frac{T_D}{T_c} \right) \quad b_1 = -K_P \left(1 + 2 \frac{T_D}{T_c} \right) \quad b_2 = \frac{K_P T_D}{T_c}$$

Pseudo-codice di controllo

Inizializzazione: $k = 0 \quad u_{PID,-1} = e_{-1} = e_{-2} = 0$

Ogni T_c secondi:

Leggi y_k dal registro del convertitore A/D

Calcola $e_k = r_k - y_k$

Calcola $u_{PID,k} = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2} + u_{PID,k-1}$

Scrivi $u_{PID,k}$ nel registro del convertitore D/A

$u_{PID,k-1} := u_{PID,k}$

$e_{k-2} := e_{k-1}$

$e_{k-1} := e_k$

$k = k + 1$

Algoritmo PI (caso particolare dell'algoritmo PID con $T_D = 0$)

$$e_{-1} = u_{PI,-1} = 0$$

$$u_{PI,k} = K_P \left(1 + \frac{T_c}{T_I} \right) e_k - K_P e_{k-1} + u_{PI,k-1}$$

Pseudo-codice di controllo

Inizializzazione: $k = 0$ $u_{PI,-1} = e_{-1} = 0$

Ogni T_c secondi:

Leggi y_k dal registro del convertitore A/D

Calcola $e_k = r_k - y_k$

Calcola $u_{PI,k} = K_P \left(1 + \frac{T_c}{T_I} \right) e_k - K_P e_{k-1} + u_{PI,k-1}$

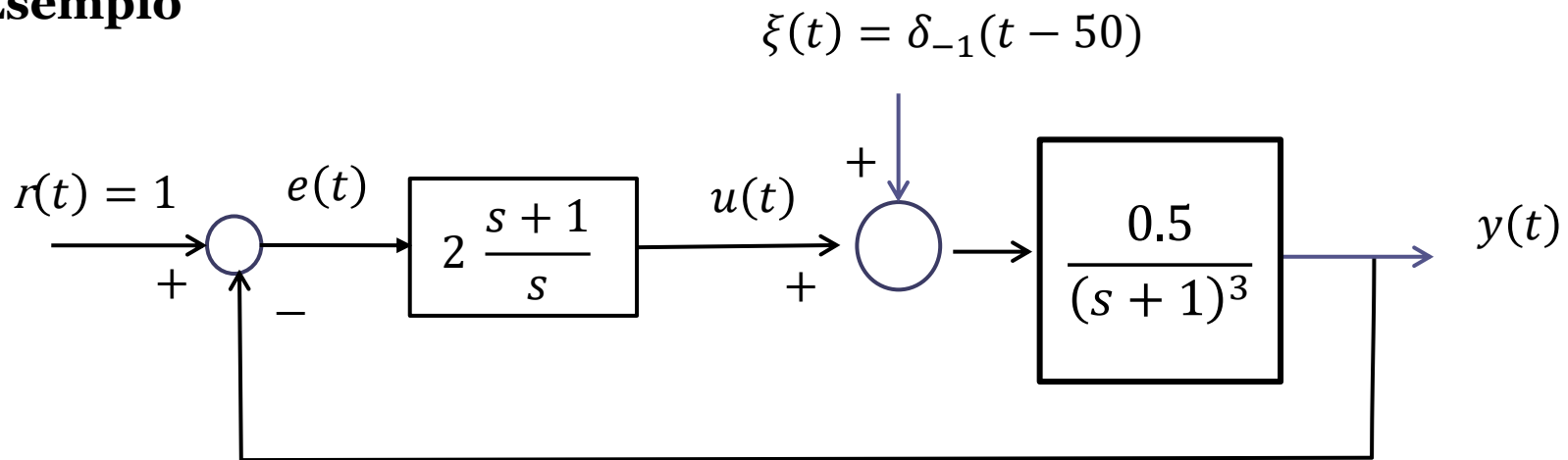
Scrivi $u_{PI,k}$ nel registro del convertitore D/A

$u_{PI,k-1} := u_{PI,k}$

$e_{k-1} := e_k$

$k = k + 1$

Esempio



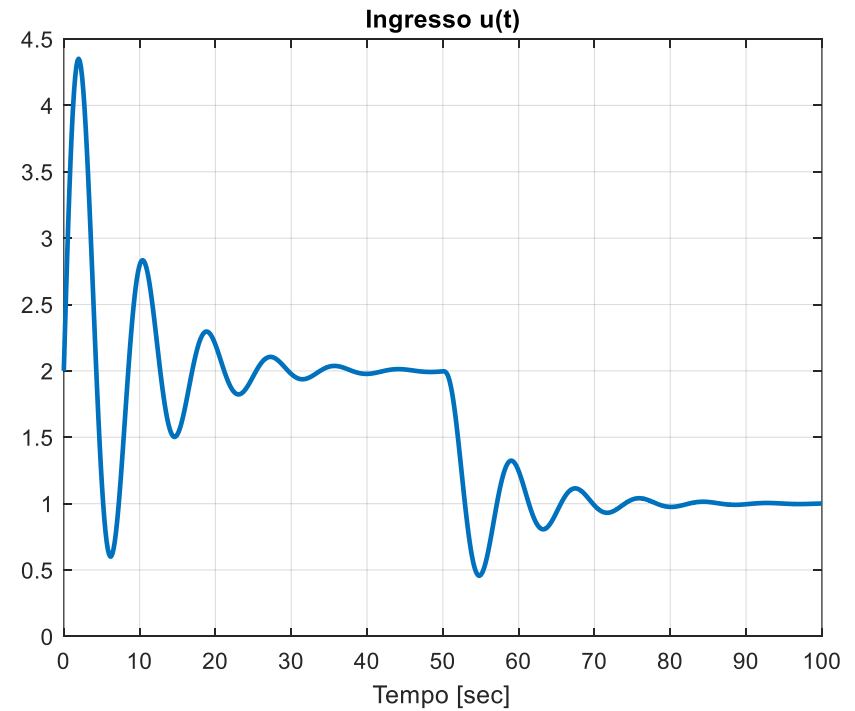
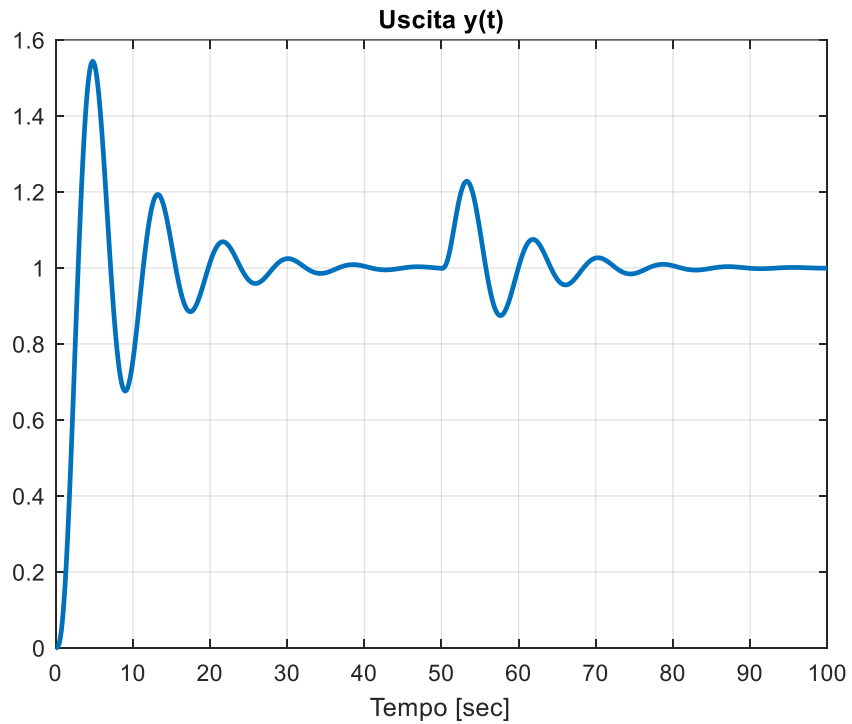
Regolatore PI con

$$K_P = 2$$

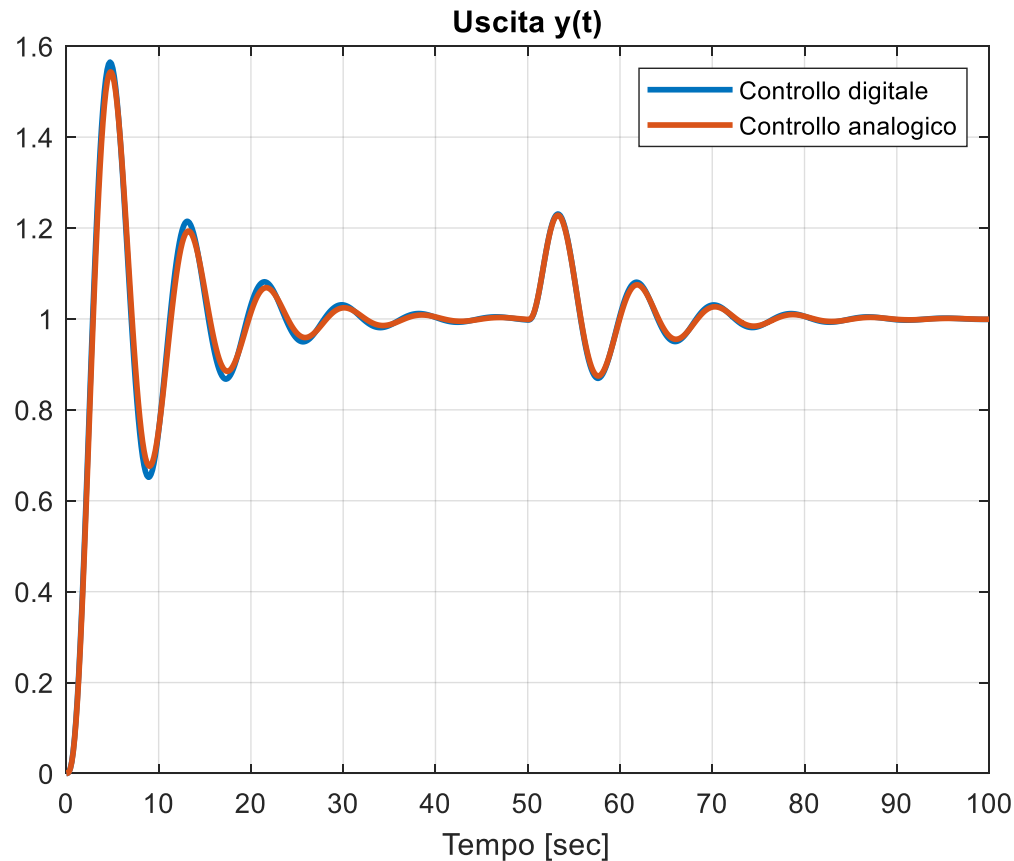
$$T_I = 1s$$

Disturbo di ampiezza unitaria che interviene a $t = 50$

Sistema di controllo a tempo continuo



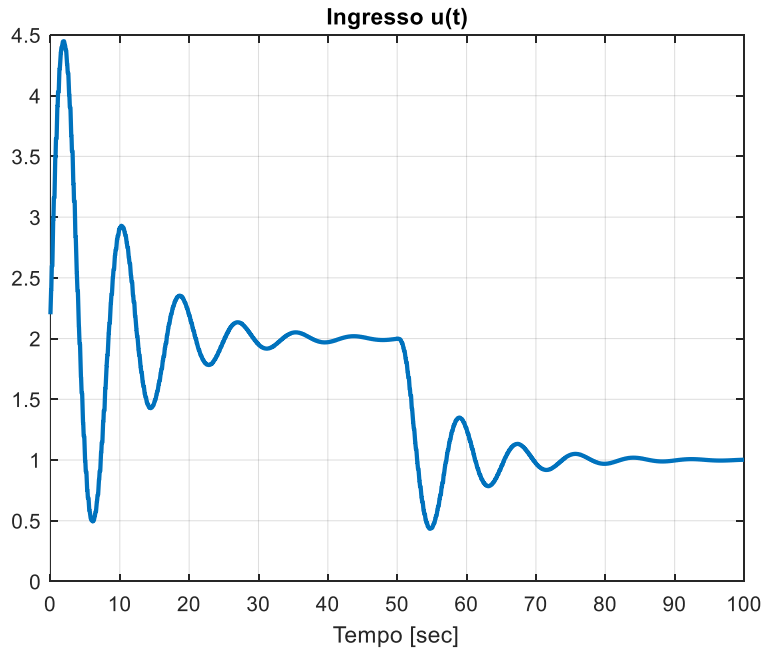
Sistema di controllo digitale con $T_c = 0.1$ s



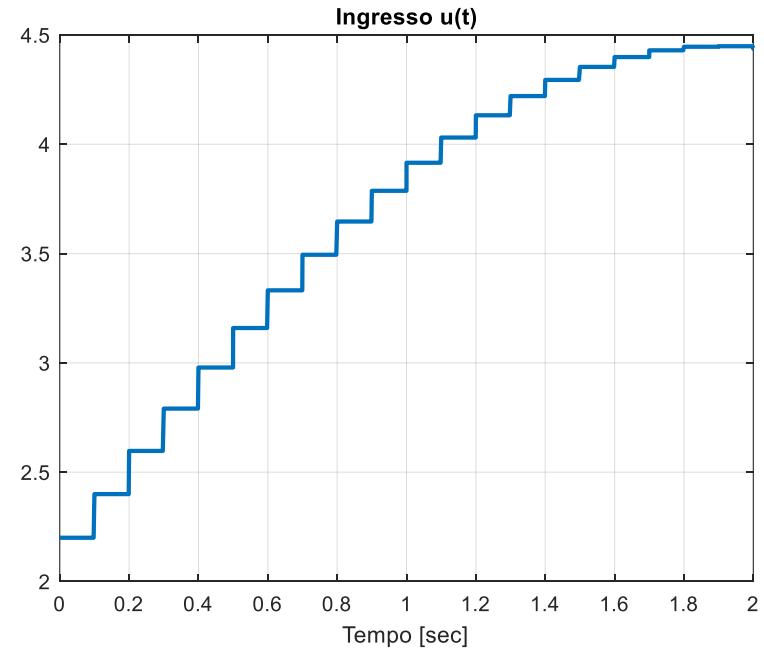
L'evoluzione temporale dell'uscita è pressoché indistinguibile da quella ottenuta impiegando il regolatore analogico

Sistema di controllo digitale con $T_c = 0.1$ s

Ingresso



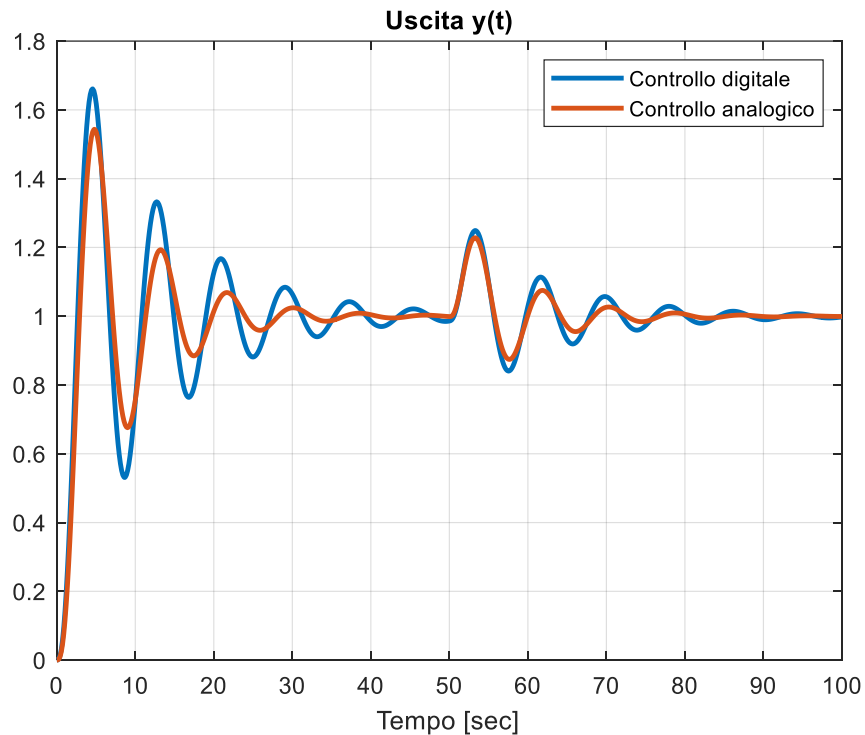
Ingresso (zoom)



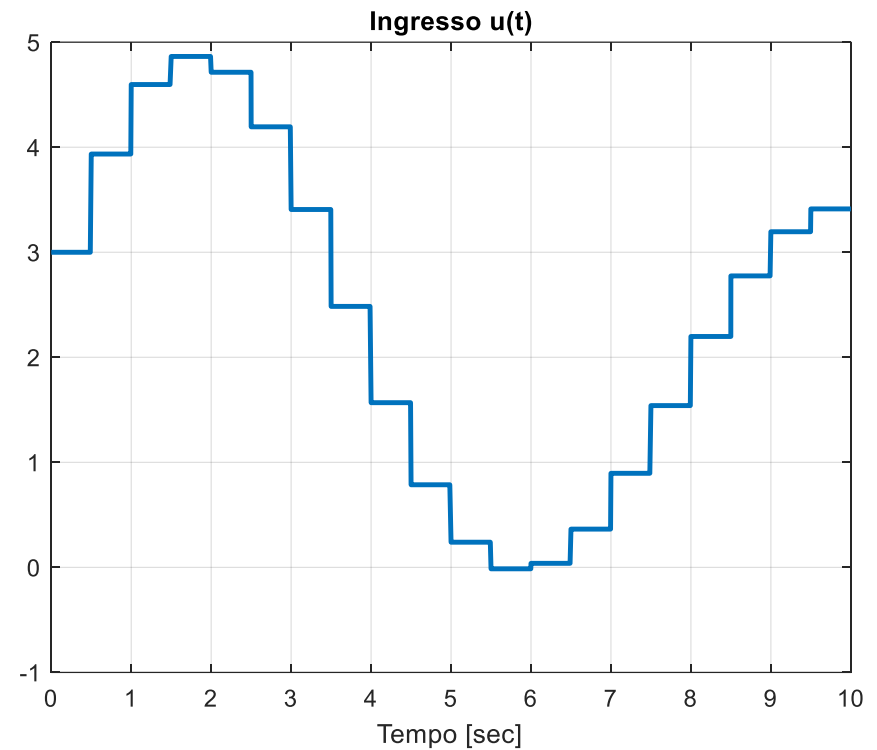
Lo zoom mostra come il segnale applicato in ingresso al processo sia costante a tratti, e venga aggiornato ogni decimo di secondo.

Sistema di controllo digitale con $T_c = 0.5 \text{ s}$

Uscita

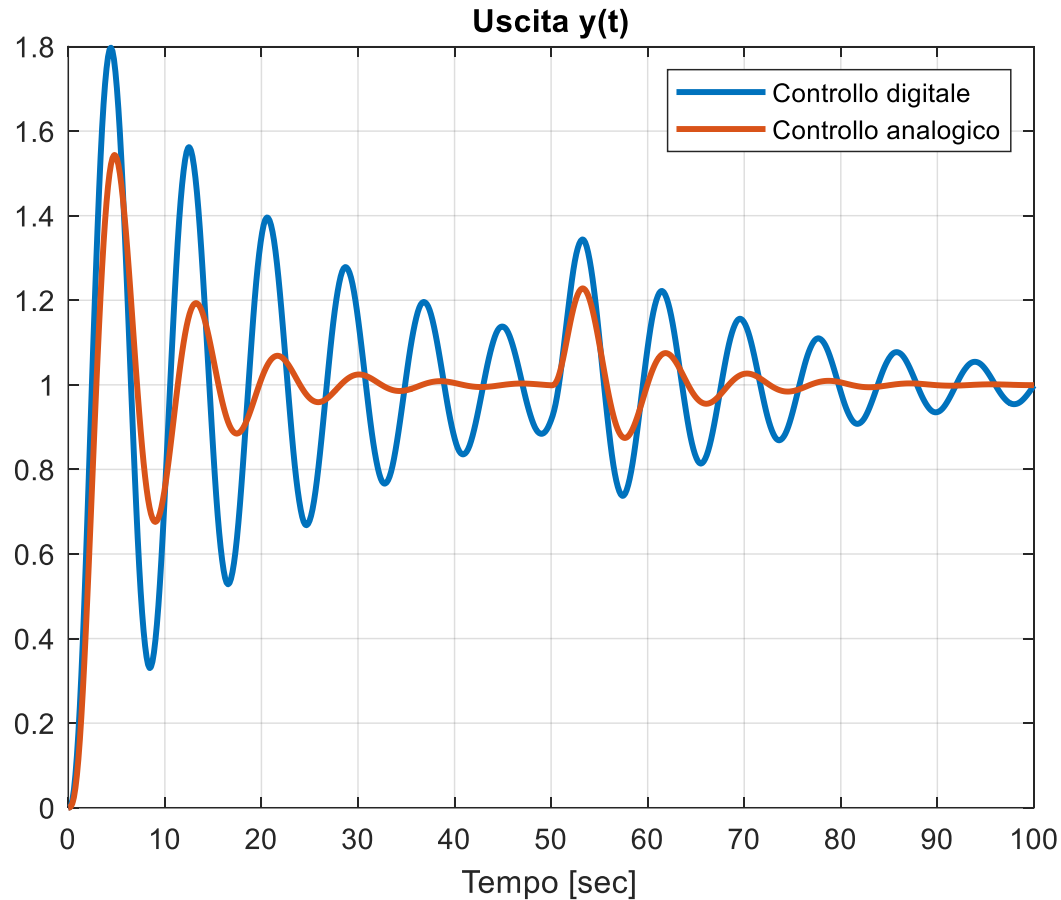


Ingresso (zoom)



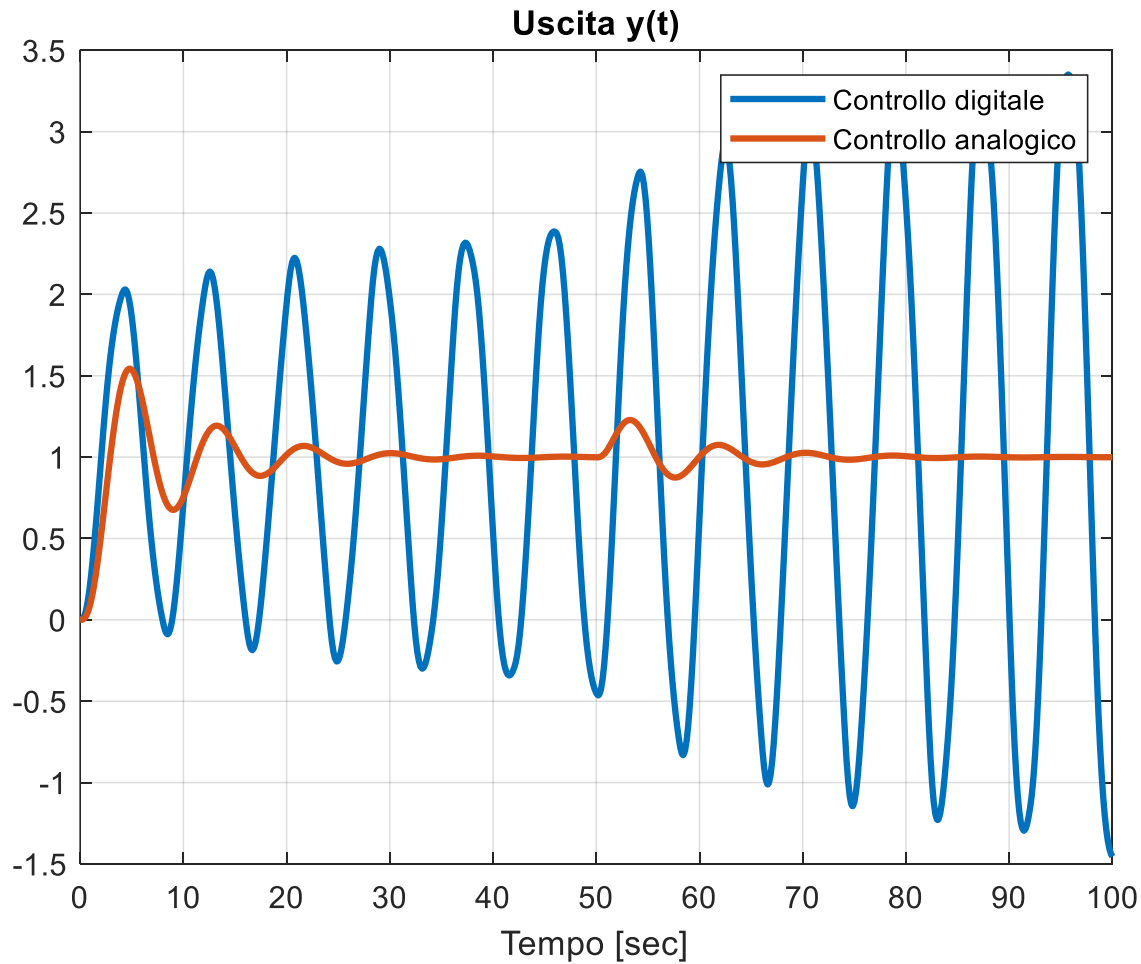
Iniziano a evidenziarsi dei deterioramenti prestazionali (maggiore sovravelongazione) dovuti all'impiego del regolatore digitale

Sistema di controllo digitale con $T_c = 1 s$



Il deterioramento prestazionale è decisamente più marcato

Sistema di controllo digitale con $T_c = 2 s$



Il sistema di controllo diventa instabile se $T_c = 2 s$

Implementazione digitale di un controllore qualunque

Metodo delle differenze finite

Per estendere il discorso ad **algoritmi di controllo di forma piu generale** torniamo all'esempio introduttivo. Un modo per ricavare un algoritmo numerico che risolva in via approssimata l'equazione differenziale

$$\ddot{u}(t) + 10 \dot{u}(t) = 1000 \dot{e}(t) + 1000 e(t)$$

è quello di valutare l'equazione differenziale al generico istante di campionamento $t = kT_c$ approssimando i termini differenziali mediante **differenze finite** all'indietro prime o seconde

$$\dot{u}(kT_c) = \dot{u}_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c} \qquad \dot{e}(kT_c) = \dot{e}_k = \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c}$$

$$\ddot{u}(kT_c) = \ddot{u}_k = \frac{u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2}}{T_c^2}$$

Sostituendo nella equazione differenziale discretizzata le corrispondenti approssimazioni, e riordinando, si ottiene dopo qualche passaggio

$$u_k = \left(\frac{2 + 10T_c}{1 + 10T_c} \right) u_{k-1} - \left(\frac{1}{1 + 10T_c} \right) u_{k-2} + \left(\frac{1000T_c(1 + T_c)}{1 + 10T_c} \right) e_k - \frac{1000T_c}{1 + 10T_c} e_{k-1}$$

Passaggi

$$\ddot{u}(kT_c) + 10 \dot{u}(kT_c) = 1000 \dot{e}(kT_c) + 1000 e(kT_c)$$



$$\frac{u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2}}{T_c^2} + 10 \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c} = 1000 \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c} + 1000 e_k$$



$$u_k \left(\frac{1}{T_c^2} + \frac{10}{T_c} \right) = \left(\frac{2}{T_c^2} + \frac{10}{T_c} \right) u_{k-1} - \frac{1}{T_c^2} u_{k-2} + \left(\frac{1000}{T_c} + 1000 \right) e_k - \frac{1000}{T_c} e_{k-1}$$



$$u_k = \left(\frac{2 + 10T_c}{1 + 10T_c} \right) u_{k-1} - \left(\frac{1}{1 + 10T_c} \right) u_{k-2} + \left(\frac{1000T_c(1 + T_c)}{1 + 10T_c} \right) e_k - \frac{1000T_c}{1 + 10T_c} e_{k-1}$$

$$u_k = \left(\frac{2 + 10T_c}{1 + 10T_c} \right) u_{k-1} - \left(\frac{1}{1 + 10T_c} \right) u_{k-2} + \left(\frac{1000T_c(1 + T_c)}{1 + 10T_c} \right) e_k - \frac{1000T_c}{1 + 10T_c} e_{k-1}$$

Si è ottenuta una relazione **ricorsiva** che esprime il valore attuale del segnale di ingresso al processo mediante una combinazione lineare tra il valore attuale e_k del segnale di errore ed alcuni valori precedenti del segnale di ingresso (u_{k-1} ed u_{k-2}) e del segnale di errore (e_{k-1})

In forma compatta:

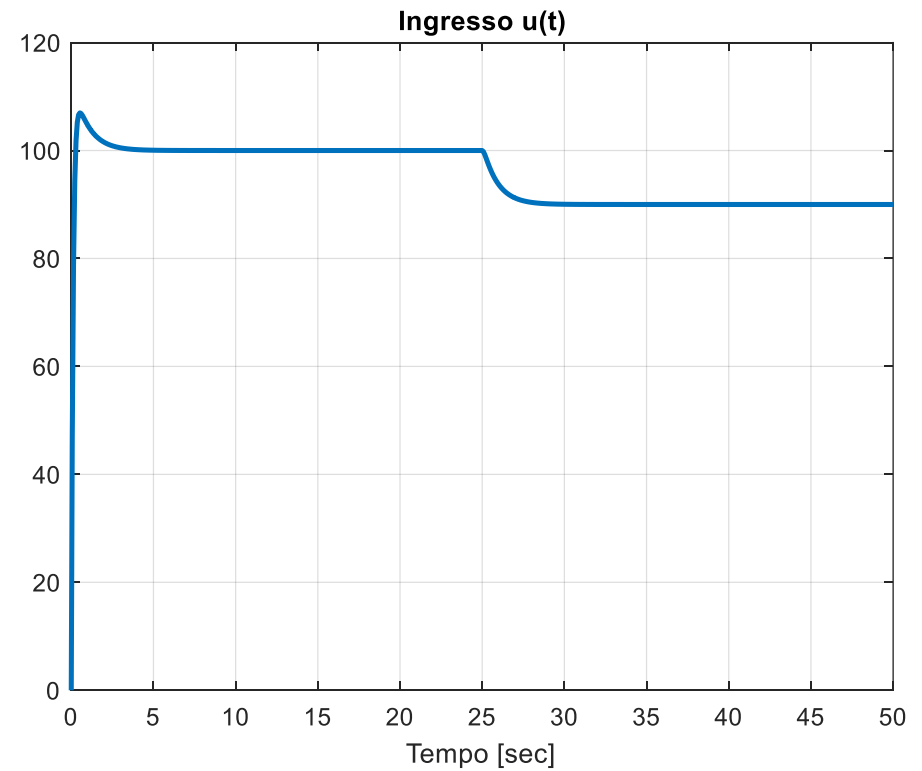
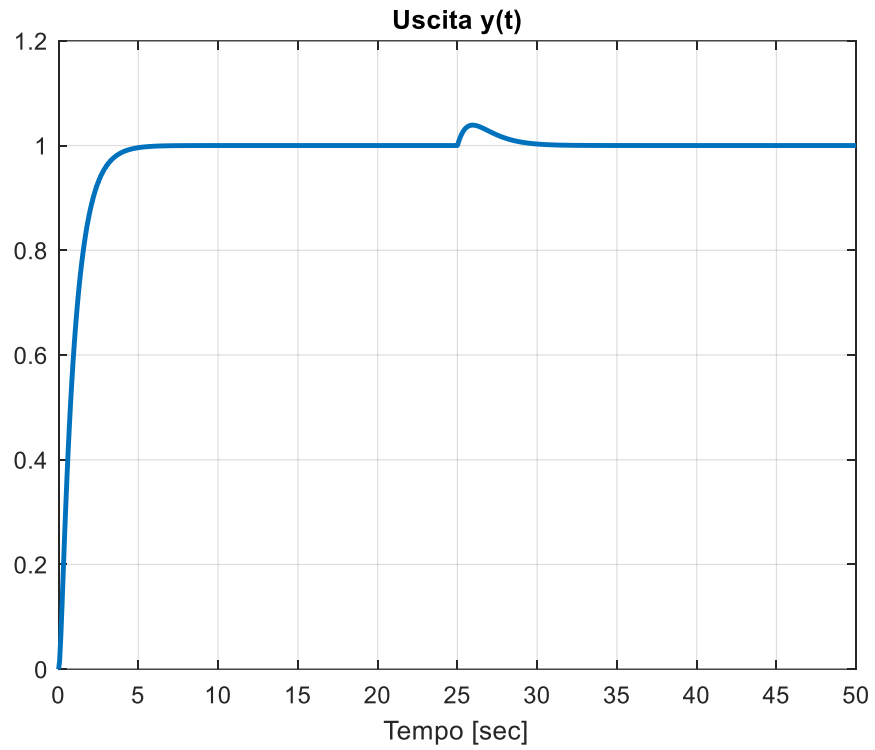
$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1}$$

$$a_1 = -\frac{2 + 10T_c}{1 + 10T_c} \quad a_2 = \frac{1}{1 + 10T_c}$$

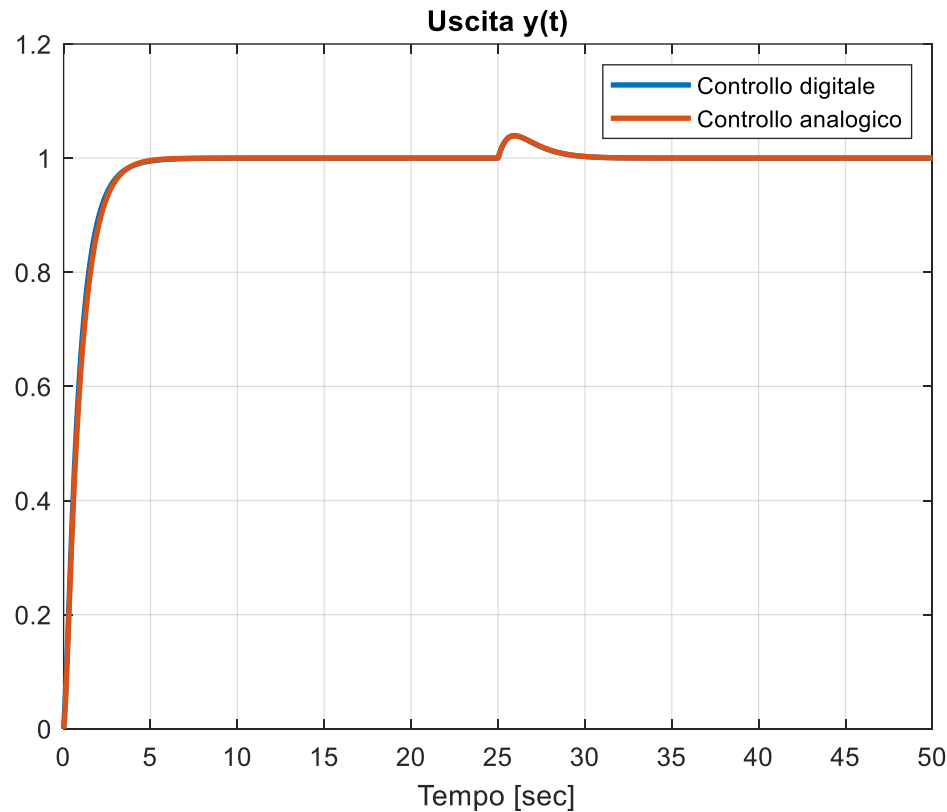
$$b_0 = \frac{1000T_c(1 + T_c)}{1 + 10T_c} \quad b_1 = -\frac{1000T_c}{1 + 10T_c}$$

Testiamo le prestazioni di questo sistema di controllo mediante simulazione dinamica

Sistema di controllo a tempo continuo



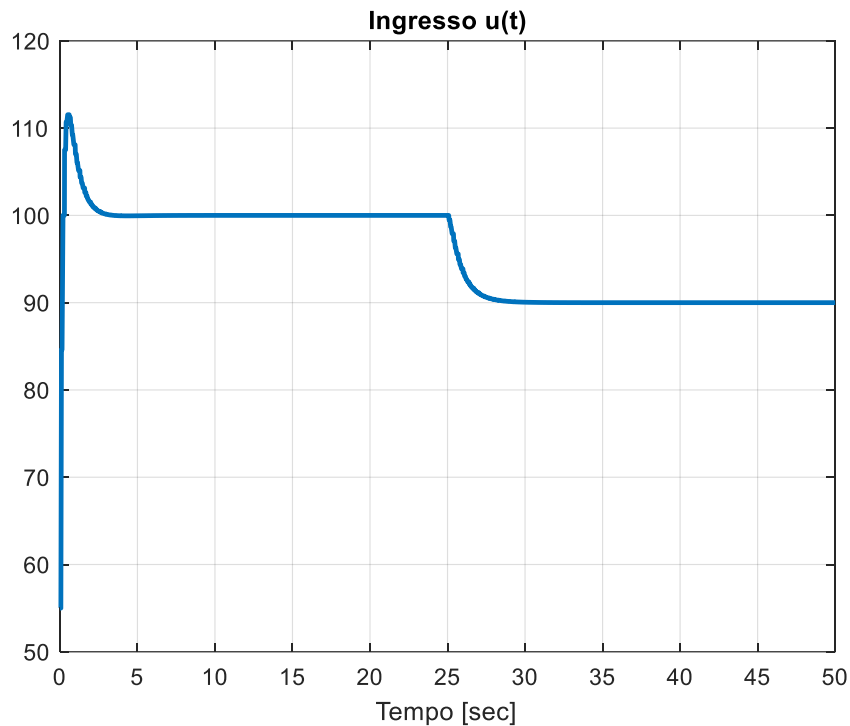
Sistema di controllo digitale con $T_c = 0.1$ s



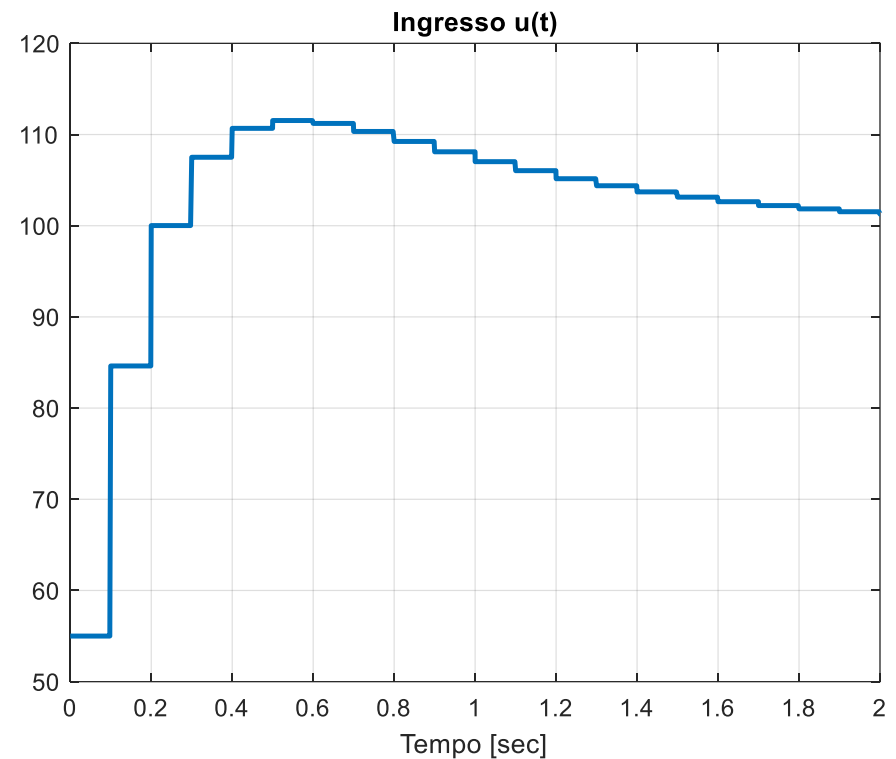
L'evoluzione temporale dell'uscita è indistinguibile da quella ottenuta impiegando il regolatore analogico

Sistema di controllo digitale con $T_c = 0.1 s$

Ingresso



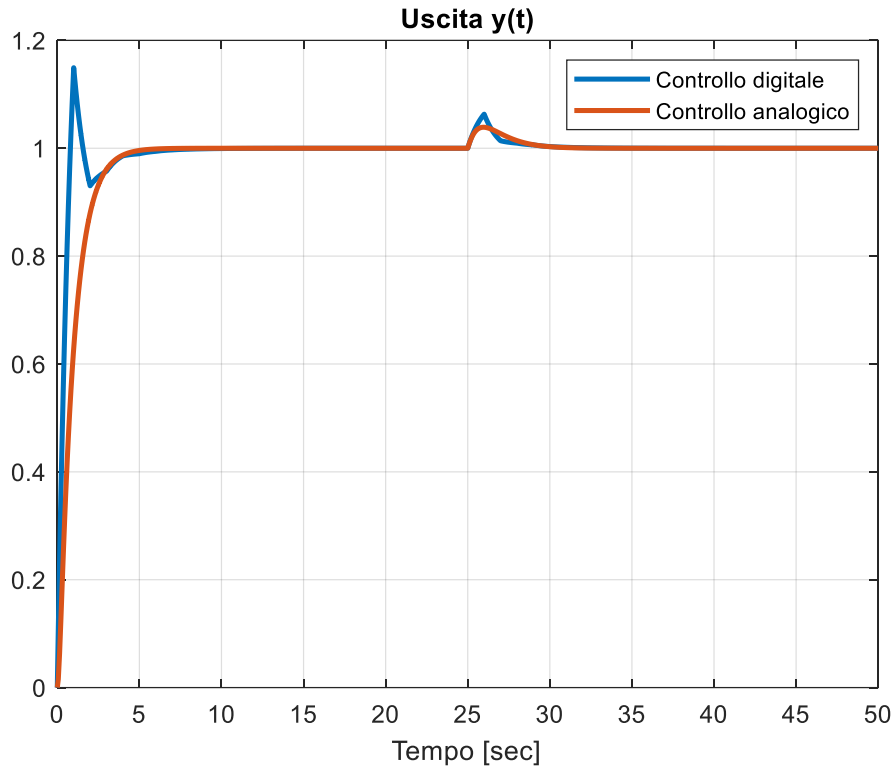
Ingresso (zoom)



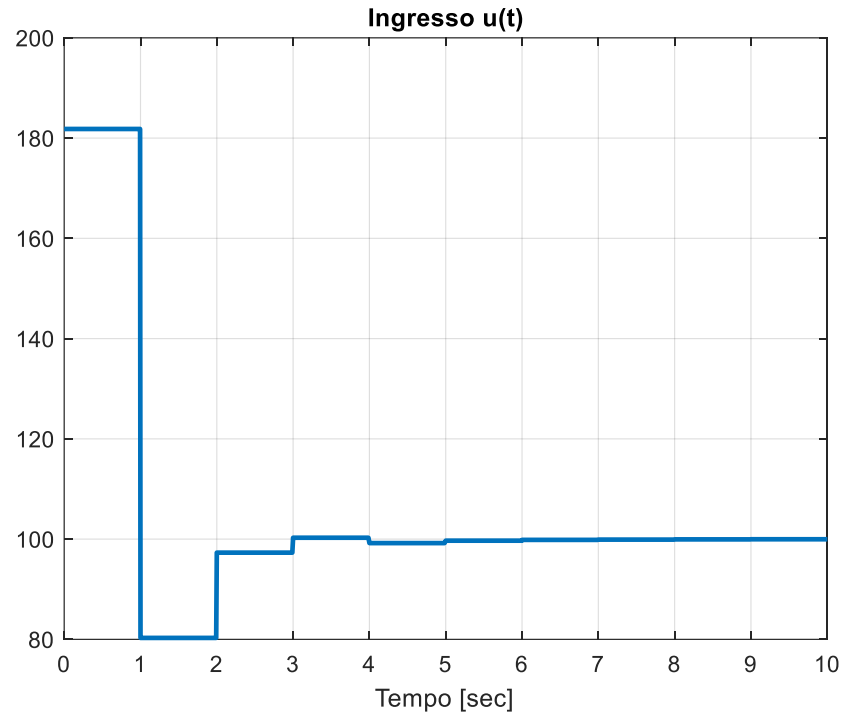
Lo zoom mostra come il segnale applicato in ingresso al processo sia costante a tratti, e venga aggiornato ogni decimo di secondo.

Sistema di controllo digitale con $T_c = 1 s$

Uscita



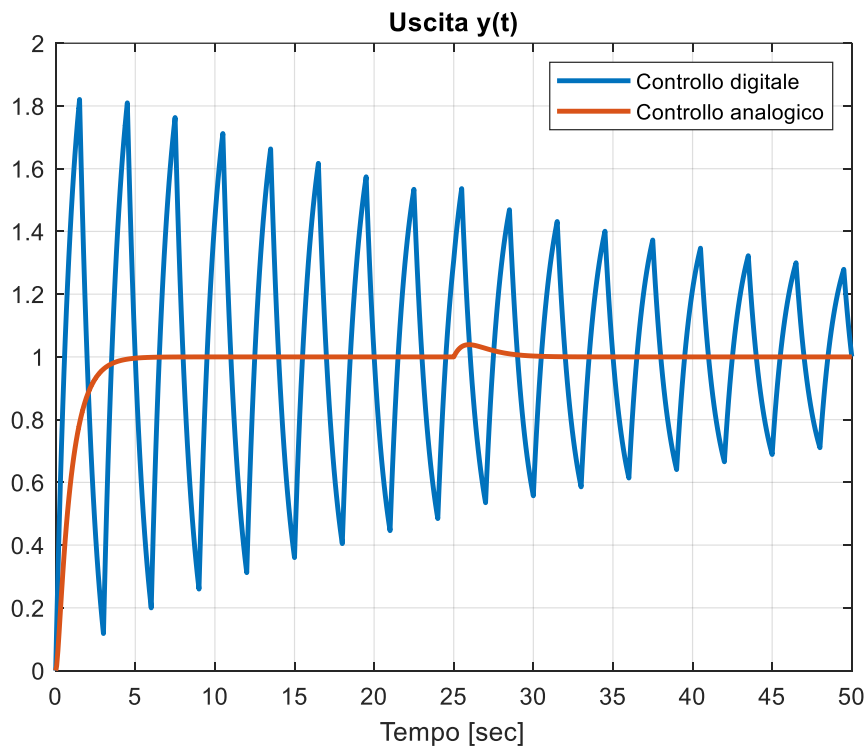
Ingresso (zoom)



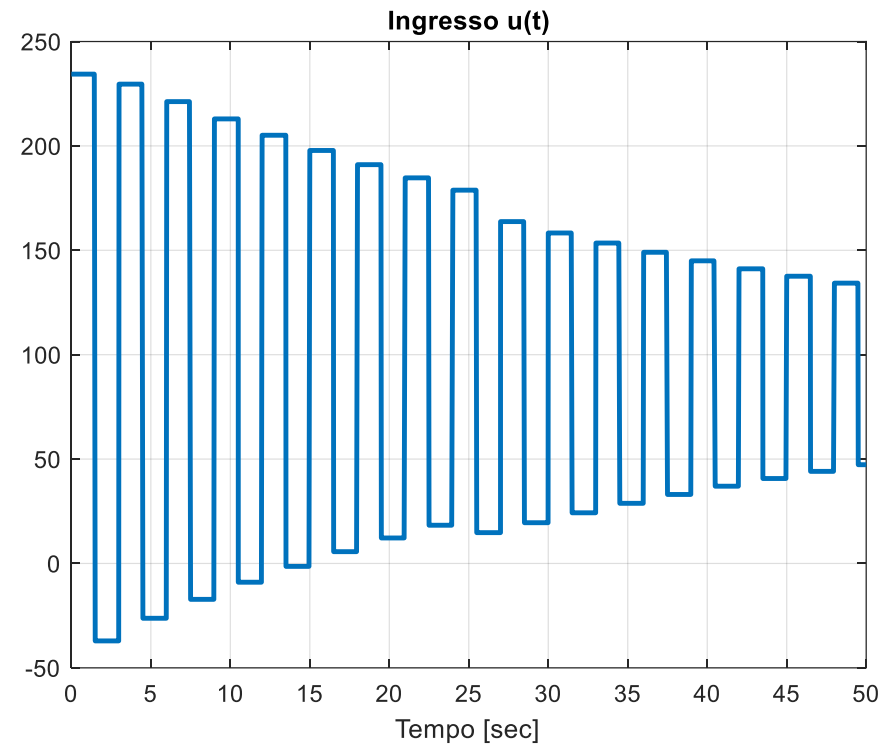
Iniziano a evidenziarsi dei deterioramenti prestazionali (comparsa di sovraelongazione) dovuti all'impiego del regolatore digitale

Sistema di controllo digitale con $T_c = 1.5 s$

Uscita

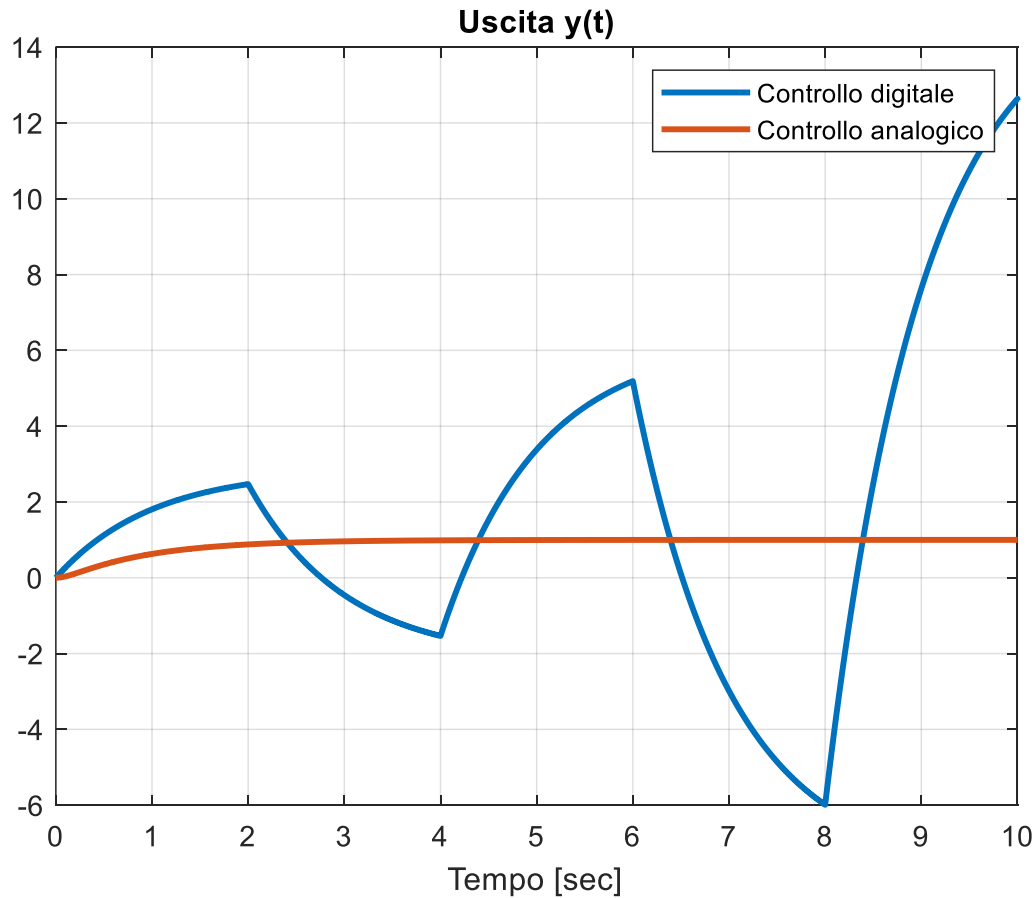


Ingresso



Il deterioramento prestazionale è nettamente più marcato

Sistema di controllo digitale con $T_c = 2 s$



Il sistema di controllo diventa instabile se $T_c = 2 s$

In casi più generali, nei sistemi di controllo lineari l'algoritmo di controllo digitale consiste in una **equazione ricorsiva alle differenze** del tipo

$$u_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_m e_{k-m} - a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \dots - a_n u_{k-n}$$

Il segnale in uscita dal controllore all'istante $t_k = kT_c$ è espresso mediante una combinazione lineare fra il valore corrente del segnale di errore ed un certo numero di campioni passati del segnale di errore e del segnale in uscita dal controllore (n.b alcuni dei coefficienti possono essere nulli)

Implementazione digitale di un controllore qualunque

Metodo di «Tustin»

Partendo dalla FdT $R(s)$ di ordine n del controllore, si opera la seguente **sostituzione**

$$s = \frac{2z - 1}{T_c z + 1}$$

ottenendo, a partire dal rapporto di polinomi in s , un rapporto di polinomi in z nella forma:

$$R_{TU}(z) = R(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{T_c z+1}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

L'espressione ricorsiva che implementa digitalmente il controllore $R(s)$ si ricava sulla base dei coefficienti a numeratore e denominatore di $R_{TU}(z)$ nella forma seguente:

$$u_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_n e_{k-n} - a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \dots - a_n u_{k-n}$$

Esempio

$$R(s) = 1000 \frac{s+1}{s(s+10)} \quad T_c = 1s \quad \text{Sostituzione} \quad s := \frac{2z-1}{T_c z+1} = 2 \frac{z-1}{z+1}$$

$$R_{TU}(z) = R(s) \Big|_{s=2 \frac{z-1}{z+1}} = 1000 \frac{2 \frac{z-1}{z+1} + 1}{2 \frac{z-1}{z+1} (2 \frac{z-1}{z+1} + 10)} = \frac{125z^2 + 83.34z - 41.66}{z^2 - 0.333z - 0.6667}$$

Implementazione digitale del controllore

$$u_k = 125e_k + 83.34e_{k-1} - 41.66e_{k-2} + 0.333u_{k-1} + 0.6667u_{k-2}$$