Capitolo 2

Forme bilineari

Definizione 2.0.1. *Una forma bilineare su uno spazio vettoriale V è una applicazione*

$$\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

che è lineare in entrambi gli argomenti, ossia tale che per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\phi(a{\cdot}\mathbf{u} + b{\cdot}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a\phi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{2.1}$$

$$\phi(\mathbf{w}, a{\cdot}\mathbf{u} + b{\cdot}\mathbf{v}) = a\phi(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + b\phi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \tag{2.2}$$

Indicheremo con $B^2(V)$ l'insieme delle forme bilineari su V.

Esercizio 2.0.2. *Sull'insieme $B^2(V)$ si considerino le seguenti operazioni di somma e prodotto per uno scalare:*

$$(\phi + \psi)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ \ , \ \ (\lambda{\cdot}\phi)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Si dimostri che rispetto a tali operazioni l'insieme $B^2(V)$ è uno spazio vettoriale.

Di seguito alcuni esempi di forme bilineari su $\mathbb{R}^3$.

$$\phi_1\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1,$$
$$\phi_2\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3,$$
$$\phi_3\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Esempio 2.0.3. *Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_3$ dei vettori liberi nello spazio Euclideo. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi non nulli e $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ i rispettivi rappresentanti nel punto A. Definiamo come* angolo *tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il numero* *reale $\theta \in [0, \pi]$ che misura l'angolo definito dalle semirette AB e AC. Tale definizione non dipende dalla scelta del punto A. Definiamo l'applicazione $\bullet : \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathcal{V}_3$ tale che, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_3$,*

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} := \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

dove θ denota l'angolo formato tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Tale applicazione è una forma bilineare su $\mathcal{V}_3$.

Definizione 2.0.4. *Una forma bilineare ϕ su V si dice* simmetrica *se per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, e* antisimmetrica *se per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.*

Si osservi che se ϕ è antisimmetrica allora si ha $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$.

Esempio 2.0.5. *La forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ data da $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$ è simmetrica.*

Esempio 2.0.6. *La forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ data da $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 - x_2y_1$ è antisimmetrica.*

Esempio 2.0.7. *La forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ data da $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_3$ non è nè simmetrica nè antisimmetrica.*

Denoteremo con $S^2(V)$ e $A^2(V)$ i sottoinsiemi di $B^2(V)$ formati dalle forme bilineari simmetriche e antisimmetriche rispettivamente.

Esercizio 2.0.8. *Si verifichi che $S^2(V)$ e $A^2(V)$ sono sottospazi di $B^2(V)$ (rispetto alle operazioni precedentemente definite), che la loro somma è diretta ed è uguale a tutto lo spazio $B^2(V)$.*

2.1 Matrice associata ad una forma bilineare

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n, $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base ordinata e ϕ una forma bilineare su V, è possibile associare a ϕ una matrice $M_B(\phi)$ nel modo seguente. $M_B(\phi)$ è la matrice quadrata di ordine $n = \dim(V)$ le cui entrate sono date da

$$[M_B(\phi)]_{ij} = \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Tale matrice è detta *matrice della forma bilineare ϕ* rispetto alla base B.

La matrice $A = M_B(\phi)$ ci permette di calcolare ϕ su una coppia qualunque di vettori una volta che si conoscono le loro componenti rispetto alla base B.

Infatti, dette $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ le componenti rispetto a B dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, rispettivamente, e X, Y le matrici colonna di tali componenti, si ha:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \mathbf{e}_j\right) \\
&\overset{\text{bilinearità}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i [AY]_i \\
&= X^t AY.
\end{aligned}$$

In particolare si osservi che la forma bilineare è simmetrica (rispettivamente, antisimmetrica) se e solo se lo è la matrice rispetto ad una base qualsiasi è simmetrica (rispettivamente, antisimmetrica)

A questo punto ci si può chiedere come cambia la matrice associata se si cambia base:

Proposizione 2.1.1. *Siano $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ due basi ordinate di V^n e P la matrice di passaggio da B' a B. Le matrici $A = M_B(\phi)$ e $A' = M_{B'}(\phi)$ di una forma bilineare ϕ su V, rispetto a alle basi B e B', sono legate dalla seguente relazione*

$$A' = P^t AP.$$

Dimostrazione. Posto $P = (p_{ij})$, si ha

$$\begin{aligned}
[A']_{ij} &= \phi(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) \\
&= \phi\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} \cdot \mathbf{e}_k, \sum_{s=1}^{n} p_{sj} \cdot \mathbf{e}_s\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{ki} \sum_{s=1}^{n} p_{sj} \phi(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} p_{ki} \sum_{s=1}^{n} p_{sj} [A]_{ks} \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{ki} [AP]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [P^t]_{ik} [AP]_{kj} \\
&= [P^t AP]_{ij}.
\end{aligned}
$$

Questo significa che $A' = P^t AP$. $\square$

Il fatto che due matrici della stessa forma bilineare ϕ rispetto a due basi siano legate come visto sopra, permette di definire il *rango* di ϕ come rango della matrice associata a ϕ rispetto ad una qualsiasi base. Questa definizione non dipende dalla base scelta grazie ad il seguente lemma.

Lemma 2.1.2. *Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Per ogni $P \in GL(n)$ e $P' \in GL(m)$ si ha che*

$$
\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AP), \quad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P'A).
$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che per ogni $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times k}$ si ha che

$$
L((AB)^1, \dots, (AB)^k) \subseteq L(A^1, \dots, A^n).
$$

Infatti per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$

$$
\begin{aligned}
(AB)^j &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + \cdots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + \cdots + a_{2n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1j} + \cdots + a_{mn}b_{nj} \end{pmatrix} \\
&= b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= b_{1j}A^1 + \cdots + b_{nj}A^n,
\end{aligned}
$$

da cui $L((AB)^1, \dots, (AB)^k) \subseteq L(A^1, \dots, A^n)$. Allora, per ogni $P \in GL(n)$

$$
\mathrm{rg}(AP) = \dim(L((AP)^1, \dots, (AP)^k)) \leq \dim(L(A^1, \dots, A^n)) = \mathrm{rg}(A).
$$

Abbiamo quindi dimostrato

$$\mathrm{rg}(AP) \leq \mathrm{rg}(A). \tag{2.3}$$

D'altra parte $A = A \cdot I_n = A \cdot (PP^{-1}) = (AP)P^{-1}$, da cui, riapplicando (2.3) si ottiene

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}((AP)P^{-1}) \leq \mathrm{rg}(AP).$$

□

Il determinante della matrice associata ad una forma bilineare, invece, non è un invariante, poichè si ha $\det(A') = \det(P^t AP) = \det(A)(\det(P))^2$, mentre rimane invariato il suo segno, dato che si ha $(\det(P))^2 > 0$.

Definizione 2.1.3. *Una forma bilineare è detta* non degenere *se ha rango massimo, altrimenti è detta* degenere*.*

Si osservi che una forma bilineare ϕ è non degenere se e solo se il determinante della matrice associata a ϕ rispetto ad una qualunque base è non nullo.

Esempio 2.1.4. *La matrice rispetto alla base canonica della forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ data da*

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$$

è la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 2.1.5. *La matrice rispetto alla base canonica della forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ data da*

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 - x_2y_1$$

è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi ϕ ha rango 2.

Esempio 2.1.6. *La matrice rispetto alla base canonica della forma bilineare su* $\mathbb{R}^3$ *data da*

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 3x_3y_2 - x_2y_3$$

è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso la forma bilineare è non degenere.

2.1.1 Dualità e rango di una forma bilineare

Data una forma bilineare $\phi \in B^2(V)$, questa determina due applicazioni lineari $s, d : V \to V^*$, che sono definite come segue:

$$s(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}, \cdot) \quad d(\mathbf{v}) = \phi(\cdot, \mathbf{v}).$$

Questo significa che $s(\mathbf{v}) \in V^*$ è l'applicazione da V in $\mathbb{R}$ tale che $s(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ mentre $d(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = \phi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

La bilinearità di ϕ implica la linearità di $s(\mathbf{v})$ e $d(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e anche la linearità delle applicazioni s e t.

Vogliamo ora capire quando le applicazioni s e d sono degli isomorfismi, nel caso in cui V abbia dimensione finita. In tal caso è sufficiente verficare che s e d siano iniettive. Vediamo il caso di s, in quanto quello di d è del tutto simile.

Si ha $\ker(s) = \{\mathbf{v} \in V : s(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$. Il nucleo è ridotto al solo vettore nullo se e solo se $s(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vale a dire

$$s(\mathbf{v})(\mathbf{w}) = 0 \ \forall \mathbf{w} \in V \implies \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

cioè $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \ \forall \mathbf{w} \in V \implies \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Allo stesso modo si ha che d è iniettiva se e solo se

$$\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \ \forall \mathbf{v} \in V \implies \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Vogliamo ora dimostrare che queste due proprietà sono equivalenti al fatto che ϕ sia non degenere. A tale fine consideriamo una base $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di V e la sua base duale $B^* = \{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$. Scriviamo la matrice di s rispetto a tali basi:

$$s(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\mathbf{e}^i.$$

Per calcolare s_{ij} basta applicare $s(\mathbf{e}_j)$ a $\mathbf{e}^i$ ottendendo

$$s_{ij} = s(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i) = \phi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i).$$

Quindi la matrice di s rispetto a tali basi è la trasposta della matrice di ϕ rispetto alla base B. In modo del tutto simile si ottiene che la matrice di d rispetto a B, B^* è la matrice di ϕ rispetto a B.

Questo implica che il rango delle applicazioni s e d è uguale, poichè hanno come matrici associate due matrici che sono una la trasposta dell'altra, e inoltre tale rango è pari a quello della forma bilineare ϕ. Riassumendo si ha:

Proposizione 2.1.7. *Una forma bilineare ϕ è non degenere se e solo se una delle due condizioni equivalenti seguenti è verificata*

- $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \in V$ *implica* $\mathbf{w} = \mathbf{0}$*;*
- $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ *per ogni* $\mathbf{w} \in V$ *implica* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2.2 Forme quadratiche

Ad ogni forma bilineare simmetrica $\phi \in B^2(V)$ è possibile associare una funzione $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

La funzione Φ è detta *forma quadratica* associata a ϕ ed è una funzione omogenea di grado 2, ovvero $\Phi(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda^2 \Phi(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il nome "forma quadratica" è giustificato dal fatto che se B è una base di V, $M_B(\phi) = (a_{ij})$ la matrice (simmetrica) di ϕ rispetto a B e i $x_1, \dots, x_n$ sono le componenti del vettore $\mathbf{v}$ rispetto a B, allora $\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ è un polinomio omogeneo di secondo grado.

Inoltre, utilizzando il fatto che la matrice $M_B(\phi)$ è simmetrica, possiamo concludere che il polinomio dato dalla $\Phi(\mathbf{v})$ si può anche scrivere come segue

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2 a_{ij} x_i x_j,$$

dove $n = \dim(V)$.

Esempio 2.2.1. *La forma quadratica associata alla forma bilineare su* $\mathbb{R}^3$ *data da* $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3$ *è* $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$

Esempio 2.2.2. *La forma quadratica associata alla forma bilineare su* $\mathbb{R}^3$ *data da* $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1$ *è* $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2$*.*

Esempio 2.2.3. *La forma quadratica associata alla forma bilineare su* $\mathbb{R}^3$ *data da* $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 3x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$ *è* $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_2x_3$*.*

Nota la forma quadratica Φ associata ad una forma bilineare simmetrica ϕ, è possibile risalire alla ϕ nel modo seguente

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \phi(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= \Phi(\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{v}) + 2\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}),\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{v})),$$

che viene detta *forma polare* di ϕ. In particolare questo dimostra la seguente proposizione

Proposizione 2.2.4. *Data una forma quadratica* Φ *associata ad una forma bilineare simmetrica su* V*, esiste un'unica* $\phi \in S^2(V)$ *tale che* $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v})$*.*

Vediamo ora alcuni tipi particolari di forme quadratiche:

Definizione 2.2.5. *Una forma quadratica* Φ *su uno spazio vettoriale* V *è detta*

- semidefinita positiva *se* $\Phi(\mathbf{v}) \geq 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \in V$*;*
- definita positiva *se* $\Phi(\mathbf{v}) > 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \neq 0$*;*
- semidefinita negativa *se* $\Phi(\mathbf{v}) \leq 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \in V$*;*
- definita negativa *se* $\Phi(\mathbf{v}) < 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \neq 0$*;*
- indefinita *se non è semidefinita positiva o negativa.*

Diremo che una forma quadratica è *non degenere* se lo è la forma bilineare a cui essa è associata. Per le forme quadratiche definite positive si ha il risultato seguente:

Proposizione 2.2.6. *Una forma quadratica* Φ *definita (positiva o negativa) è non degenere.*

Dimostrazione. Se per assurdo Φ fosse degenere, esisterebbe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ per ogni $\mathbf{w} \in V$. Questo varrebbe in particolare per $\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Allora si avrebbe $\Phi(\mathbf{v}) = 0$ per $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, contro l'ipotesi che Φ sia definita. $\square$

Esempio 2.2.7. *Consideriamo i seguenti esempi di forme quadratiche su* $\mathbb{R}^3$*:*

- *le forme quadratiche* x_1^2, $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *sono semidefinite positive. In particolare la terza è anche definita positiva.*
- *le forme quadratiche* $-x_1^2$, $-x_1^2 - x_2^2$, $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ *sono semidefinite negative. In particolare la terza è anche definita negativa.*
- *le forme quadratiche* $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, $x_1^2 - x_2^2$, $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ *sono indefinite.*

Un esempio importante di forma quadratica definita positiva è dato dal prodotto scalare dei vettori liberi dello spazio. Ora è possibile generalizzare questa nozione ad uno spazio vettoriale qualunque:

Definizione 2.2.8. *Un* prodotto scalare *su uno spazio vettoriale V è una forma bilineare simmetrica definita positiva (i.e. la forma quadratica associata è definita positiva). Lo spazio V munito di un prodotto scalare è detto spazio vettoriale Euclideo.*

Di solito si usa indicare un prodotto scalare col simbolo $<,>$.

2.2.1 Forma canonica di una forma quadratica

Abbiamo già osservato che una forma quadratica, in componenti rispetto ad una base, non è un polinomio omogeneo di secondo grado. Poiché la matrice della forma quadratica dipende dalla base scelta, è naturale chiedersi se è possibile trovare una base rispetto alla quale la forma quadratica abbia un'espressione più semplice, cioè un polinomio in cui appaiono solamente termini quadratici.

Definizione 2.2.9. *Si dice che una forma quadratica Φ su uno spazio vettoriale V di dimensione n è in* forma canonica *se è espressa nel modo seguente*

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2,$$

dove le $x_1, \ldots, x_n$ sono le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto ad una certa base e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

In modo equivalente si può dire che Φ è in forma canonica se esiste una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ tale che la forma bilineare ϕ a cui è associata Φ verifica

$$\phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$$

per ogni $i \neq j$. La matrice di ϕ rispetto a tale base è dunque una matrice diagonale.

Il teorema seguente afferma che una forma quadratica si può scrivere sempre in forma canonica:

Teorema 2.2.10. *Sia Φ una forma quadratica su V. Allora esiste una base rispetto alla quale Φ si scrive in forma canonica.*

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema per induzione sulla dimensione n di V. Per $n = 1$ la proprietà è ovvia. Supponiamo vera la proprietà per uno spazio vettoriale di dimensione $n - 1$ e dimostriamola per $\dim(V) = n$. Siano $\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ e $A = (a_{ij})$ la matrice di Φ rispetto alla base che si sta considerando. Distinguiamo due casi:

Caso 1 Nell'espressione di Φ almeno uno dei termini a_{ii} è non nullo. Supponiamo che sia a_{11} e consideriamo la forma quadratica

$$\Phi'(\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v}) - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 = \Phi(\mathbf{v}) - \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right)^2.$$

Nella forma quadratica $\Phi'(\mathbf{v})$ scompaiono tutti i termini dove appare x_1, quindi dipende solo da $x_2, \ldots, x_n$. In questo modo abbiamo scritto $\Phi(\mathbf{v}) = \Phi'(\mathbf{v}) + \frac{1}{a_{11}}(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)^2$.

A questo punto possiamo fare un cambiamento di variabile e porre

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \ , \ y_i = x_i \quad \forall i \geq 2,$$

ottenendo in questo modo $\Phi(y_1, \ldots, y_n) = \Phi'(y_2, \ldots, y_n) + \frac{1}{a_{11}}y_1^2$. Ora è possibile applicare l'ipotesi induttiva alla forma quadratica $\Phi'(y_2, \ldots, y_n)$ che dipende da $n - 1$ variabili.

Perché questa operazione abbia senso bisogna assicurarsi che il cambiamento di variabili effettuato derivi effettivamente da un cambiamento di base, cioè che $(y_1, \ldots, y_n)$ siano le componenti rispetto ad una nuova base del vettore di componenti $(x_1, \ldots, x_n)$ rispetto alla base attuale. Per renderci conto di questo osserviamo che si ha

$$Y = CX,$$

dove Y è la matrice colonna di entrate $(y_1, \ldots, y_n)$, X quella di entrate $(x_1, \ldots, x_n)$ e C è la matrice seguente:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi Y rappresenta le componenti del vettore rispetto alla nuova base in funzione delle componenti X rispetto alla vecchia, mentre la matrice C è la matrice di passaggio dalla vecchia base alla nuova. La matrice di Φ rispetto alla nuova base sarà allora $(C^t)^{-1}AC^{-1}$.

Il cambiamento di base che si è effettuato (che ha come matrice di passaggio C^{-1}) è il seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{1}{a_{11}}\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_i &= e_i - \frac{a_{1i}}{a_{11}}\mathbf{e}_1 \text{ per } i \geq 2. \end{aligned}$$

Caso 2 Tutti gli a_{ii} sono nulli, ma almeno uno degli a_{ij}, con $i \neq j$, è non nullo. Se anche tutti gli a_{ij} sono nulli allora Φ è la forma quadratica nulla e quindi è già in forma canonica.

Supponiamo che non sia nullo il coefficiente a_{12} e operiamo il seguente cambiamento di variabile:

$$x_1 = z_1 + z_2 \ \ , x_2 = z_1 - z_2 \ \ , x_i = z_i \ \forall i \geq 3.$$

La forma quadratica diventa allora

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 - z_2^2 + \sum_{ij} b_{ij} z_i z_j,$$

per certi scalari b_{ij}. Inoltre z_1^2 e z_2^2 appaiono effettivamente nell'espressione di $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ e quindi ci si può ricondurre al Caso 1.

Anche per questo tipo di operazione dobbiamo accertarci che si tratti di un cambiamento di base. In effetti, dette X e Z le matrici colonna di entrate $(x_1, \dots, x_n)$ e $(z_1, \dots, z_n)$ rispettivamente, si ha

$$X = PZ,$$

dove la matrice P è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi P rappresenta le componenti della nuova base rispetto alla vecchia. Il cambiamento di base che si è effettuato è il seguente:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \ \ , \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \ \ \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i \quad \forall i \geq 3.$$

Se in n passi si hanno n cambiamenti di base dati dalle matrici $A_1, \cdots, A_n$, la matrice del cambiamento di base finale sarà data da $A_1 A_2 \cdot A_n$. □

La forma canonica di una forma quadratica può essere migliorato ottenendo il seguente teorema:

Teorema 2.2.11 (Teorema di Sylvester)**.** *Sia Φ una forma quadratica su uno spazio vettoriale V di dimensione n e ϕ la forma bilineare simmetrica associata. Sia p il rango di Φ. Allora esiste un numero $s \leq p$ univocamente determinato da Φ e una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ tale che*

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= 0 \quad \textit{per } \ i \neq j \ \ , \\ \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) &= 1 \quad \textit{per } i \leq s \\ \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) &= -1 \ \ \textit{per } s+1 \leq i \leq p \\ \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) &= 0 \quad \textit{per } i \geq p+1. \end{aligned}$$

La forma quadratica rispetto a tale base ha la seguente espressione:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{p} x_i^2.$$

I numeri s e $p - s$ sono detti rispettivamente *indice di positività* e *indice di negatività* di Φ e la coppia $(s, p - s)$ è detta *segnatura.*

Dimostrazione. L'esistenza di una tale forma canonica, si ottiene a partire da una forma canonica di Φ, la cui esistenza è assicurata dal Teorema 2.2.10. Supponiamo che Φ sia scritta nel modo seguente:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i x_i^2,$$

dove p è il rango di Φ e dove possiamo supporre che i primi s coefficienti siano positivi e a partire dal $(s+1)$-esimo e fino al p-esimo negativi. Per ottenere questo, basta infatti operare un semplice cambiamento di variabile (e quindi di base).

A questo punto possiamo fare il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{array}{rcl} y_i & = & \sqrt{a_i} x_i \;\; i \leq s \;\; , \\ y_i & = & \sqrt{-a_i} x_i \;\; s+1 \leq i \leq p, \\ y_i & = & x_i \;\; p+1 \leq i \leq n, \end{array}$$

che porta Φ nella forma voluta.

Dobbiamo ora dimostrare l'unicità di s, quella di p essendo ovvia poichè pari al rango di ϕ. Supponiamo per assurdo che esista $t \neq s$ tale che si abbia rispetto a due basi:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{p} x_i^2 = \sum_{i=1}^{t} y_i^2 - \sum_{i=s+1}^{p} y_i^2,$$

dove le x_i e le y_i sono le componenti di v rispetto alle basi $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ed $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ rispettivamente. Possiamo supporre $s > t$ (la dimostrazione è identica per $s < t$) e considerare i seguenti sottospazi:

$$V_1 = L(\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_s), \quad V_2 = L(\mathbf{e}'_{t+1}, \ldots \mathbf{e}'_n).$$

Poichè si ha $\dim(V_1) + \dim(V_2) = s + n - t > n = \dim(V)$, deve esistere un vettore non nullo $\mathbf{u} \in V_1 \cap V_2$. Allora avremo $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{s} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=t+1}^{n} y_i \mathbf{e}'_i$ e quindi

$$\Phi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 \geq 0, \quad \Phi(\mathbf{u}) = -\sum_{i=t+1}^{n} y_i^2 \leq 0,$$

che implica $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e quindi una contraddizione. $\square$

Una conseguenza immediata è il seguente

Corollario 2.2.12. *Se Φ è definita positiva (risp. negativa), allora ha segnatura $(n, 0)$ (risp. $(0, n)$).*

Concludiamo con alcuni esempi, con i quali vogliamo mostrare come trovare la forma canonica di una forma quadratica / forma bilineare attraverso il *metodo del completamento del quadrato.*

Esempio 2.2.13. *Scrivere in forma canonica la forma quadratica*

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 - x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_3x_4.$$

Cominciamo focalizzandoci su tutti i termini che coinvolgono x_1, precisamente $x_1^2 - 2x_1x_2$. Il metodo consiste nell'aggiungere e sottrarre quel termine mancante al fine di ottenere un quadrato di binomio. In questo caso tale termine è proprio $\frac{1}{3}x_2^2$. Scriviamo dunque

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left(3x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{1}{3}x_2^2\right) - \frac{1}{3}x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_3x_4 \\ &= \left(\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2\right)^2 - \frac{1}{3}x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_3x_4.\end{aligned}$$

Passiamo ora a x_2. Notiamo che è presente solamente un termine al quadrato, precisamente $-\frac{1}{3}x_2^2$, che è gi à nella forma a cui aspiriamo a giungere. Passiamo dunque a x_3, per il quale vi è il termine misto $4x_3x_4$ che vorremmo far andare via completando il quadrato. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left(\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2\right)^2 - \frac{1}{3}x_2^2 - (x_3^2 - 4x_3x_4) + 2x_4^2 \\ &= \left(\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2\right)^2 - \frac{1}{3}x_2^2 - (x_3^2 - 4x_3x_4 + 4x_4^2) + 4x_4^2 + 2x_4^2 \\ &= \left(\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2\right)^2 - \frac{1}{3}x_2^2 - (x_3 - 2x_4)^2 + 6x_4^2 \\ &= \left(\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_2\right)^2 - (x_3 - 2x_4)^2 + \left(\sqrt{6}x_4\right)^2.\end{aligned}$$

A questo poniamo:

$$x_1' = \sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2, \quad x_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}x_2, \quad x_3' = x_3 - 2x_4, \quad x_4' = \sqrt{6}x_4. \tag{2.4}$$

Nelle nuove variabili (che corrispondono ad una nuova base, come vedremo), la forma quadratica si riscrive in forma canonica

$$\Phi(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = {x'}_1^2 - {x'}_2^2 - {x'}_3^2 + {x'}_4^2. \tag{2.5}$$

Se ne deduce che la segnatura è $(2, 2)$. *La forma quadratica è non degenere e indefinita (per esempio* $\Phi(1, 0, 0, 0) = 1 > 0$ *e* $\Phi(0, 1, 0, 0) = -1 < 0$*).*

Completiamo l'esempio mostrando come sia possibile determinare esplicitamente la base $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$ *rispetto alla quale la nostra forma quadratica assume l'espressione* (2.5). *Intanto è bene esprimere il cambio di variabili* (2.4) *in forma matriciale:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Possiamo riguardare tale uguaglianza come l'espressione delle componenti (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)*, rispetto alla base* B'*, del vettore* $\mathbf{v} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3 + x'_4\mathbf{e}'_4$ *in funzione delle componenti* (x_1, x_2, x_3, x_4) *dello stesso vettore rispetto alla base canonica* $B_c = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ *di* $\mathbb{R}^4$. *Di conseguenza*

$$M_{B_cB'} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix},$$

da cui

$$M_{B'B_c} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Allora, per definizione di matrice di passaggio, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, 0, 0\right) \\
\mathbf{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right) \\
\mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}'_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{e}'_4 = \left(0, 0, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\
\mathbf{e}'_4 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{e}'_4 = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).
\end{aligned}$$

Esempio 2.2.14. *Scrivere in forma canonica la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ data da $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.*

Si noti che, a differenza dell'esempio precedente, in questo caso non vi è alcun termine quadratico, il che a priori renderebbe impossibile applicare il metodo del completamento del quadrato. Tuttavia, come vedremo, è possibile ricondursi al caso. Partiamo dal primo termine x_1x_2. Poniamo

$$x_1 = x'_1 + x'_2, \quad x_2 = x'_1 - x'_2, \quad x_3 = x'_3. \tag{2.6}$$

Nelle nuove variabili si ha

$$\begin{aligned}
\Phi(x'_1, x'_2, x'_3) &= (x'_1 + x'_2)(x'_1 - x'_2) - (x'_1 + x'_2)x'_3 - (x'_1 - x'_2)x'_3 \\
&= x'^2_1 - x'^2_2 - 2x'_1x'_3.
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo continuare come nell'esempio precedente:

$$\begin{aligned}
\Phi(x'_1, x'_2, x'_3) &= x'^2_1 - x'^2_2 - 2x'_1x'_3 \\
&= (x'^2_1 - 2x'_1x'_3 + x'^2_3) - x'^2_3 - x'^2_2 \\
&= \left(x'_1 - x'_3\right)^2 - x'^2_2 - x'^2_3.
\end{aligned}$$

Ma da (2.6) *si ottiene*

$$x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad x'_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \quad x'_3 = x_3$$

da cui

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - 2x_3^2.$$

Infine poniamo

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3$$

e in questi nuove variabili possiamo scrivere Φ *in forma canonica*

$$\Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2.$$

In particolare vediamo che Φ *ha segnatura* $(1, 2)$.