Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura
Magistrale Ingegneria Civile 2 anno **a.a. 2022/23**

Structural Stability and Limit Analysis of Structures

(Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

> Lezione 26

Collapse. Basic theorems
(Il meccanismo di collasso.
I teoremi fondamentali del calcolo a rottura)

Victor Eremeev

victor.eremeev@unica.it

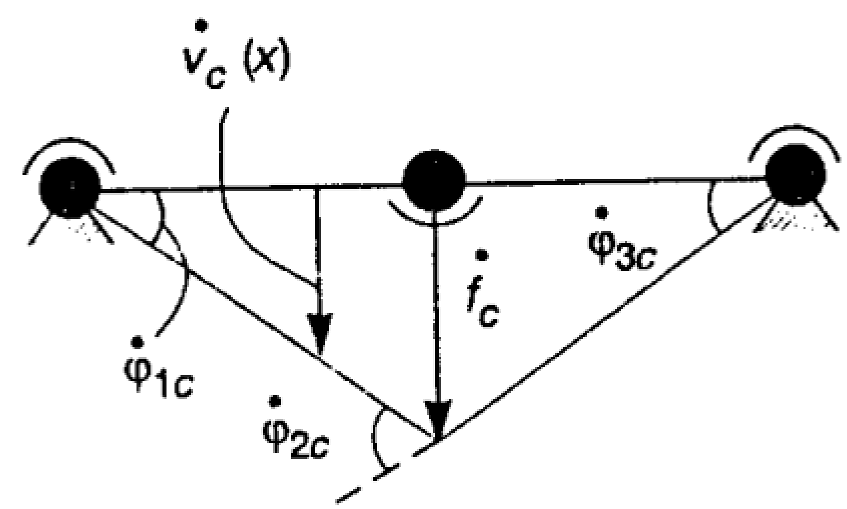
Il meccanismo di collasso

Il collasso plastico è associato alla formazione di un numero di cernieri sufficiente a trasformare la struttura in un meccanismo, che pur permettendo ancora di equilibrare i carichi applicati se questi si mantengono costanti, rende possibile un atto di moto rigido. Questo è caratterizzato da velocità trasversali $\dot{v}_c(x)$ e velocità di rotazione $\dot{\varphi}_{ck}(x)$.

Come un esempio

$$\dot{v}_c(x) = \begin{cases} 2\dfrac{x}{\ell}\dot{f}_c & 0 \leq x \leq \dfrac{\ell}{2} \\ 2\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)\dot{f}_c & \dfrac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_{1c} = \dot{\varphi}_{3c} = -\frac{2}{\ell}\dot{f}_c, \qquad \dot{\varphi}_{2c} = \frac{4}{\ell}\dot{f}_c$$



dove $\dot{f}_c = \dot{v}_c(l/2)$

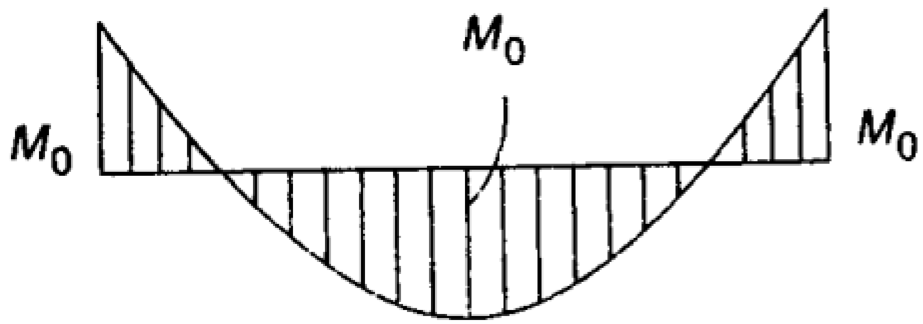
Nella situazione di collasso incipiente l'equilibrio ancora sussiste. I momenti flettenti Mc(x) a collasso sono quindi legati ai carichi base amplificati da moltiplicatore di collasso della struttura s

$$-M_c''(x) = sp_0$$

Oltre che da eventuali condizioni al contorno.

Infatti

$$M_c(x) = M_0\left(-1 + 8\,\frac{x}{\ell} - 8\,\frac{x^2}{\ell^2}\right)$$



che risulta

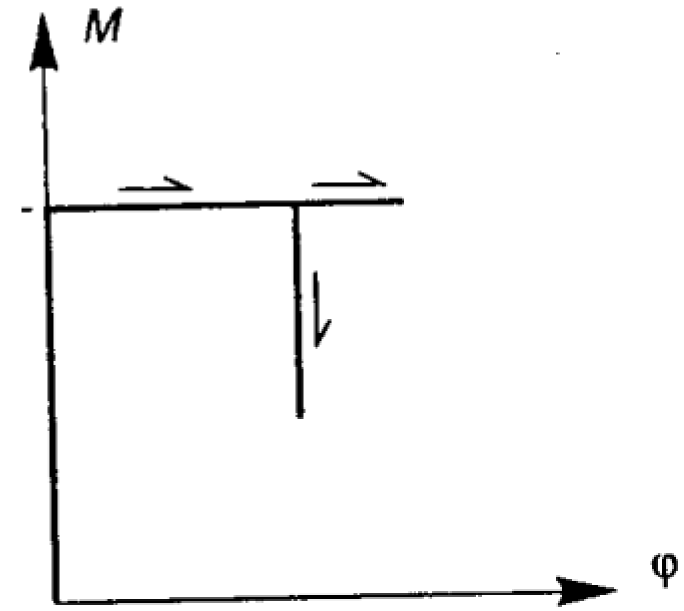
$$-M_c''(x) = 16\,\frac{M_0}{\ell^2} = sp_0$$

L'atto di moto concesso dal meccanismo può essere riguardato come virtuale e riferito alla stessa configurazione. Il principio delle velocità virtuali stabilisce allora

$$s\int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k M_c(x_k)\,\dot{\varphi}_{kc}$$

dove l'integrale si intende esteso a tutta la struttura. Il legame

$$M_c(x_k) = M_{0k} = \begin{cases} M_0 & \text{se } \dot{\varphi}_{kc} > 0 \\ -M_0 & \text{se } \dot{\varphi}_{kc} < 0 \end{cases}$$



Quindi

$$s\int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k M_{0k}\,\dot{\varphi}_{kc}$$

Oppure

$$s = \frac{\sum_k M_{0k}\dot{\varphi}_{kc}}{\int p_0 \dot{v}_c dx}$$

Questa relazione consente il calcola di s una volata noto il meccanismo di collasso.

In particolare, per

$$\dot{v}_c(x) = \begin{cases} 2\dfrac{x}{\ell}\dot{f}_c & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\ell}{2} \\ 2\left(1 - \dfrac{x}{\ell}\right)\dot{f}_c & \dfrac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant \ell \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_{1c} = \dot{\varphi}_{3c} = -\frac{2}{\ell}\dot{f}_c, \qquad \dot{\varphi}_{2c} = \frac{4}{\ell}\dot{f}_c$$

risulta

$$\int_0^\ell p_0 \dot{v}_c dx = p_0 \frac{\ell}{2}\dot{f}_c, \qquad \sum_k M_{0k}\dot{\varphi}_{kc} = 8\frac{M_0}{\ell}\dot{f}_c$$

Ricordano che è $p_0 = M_0/\ell^2$, si ottiene s=16.

Osservazione:

1. La sommaria $\sum_k M_{0k}\dot{\varphi}_{kc}$ è certamente positiva. Infatti

$$D_c = \sum_k M_{0k}\dot{\varphi}_{kc} = \sum_k M_0 |\dot{\varphi}_{kc}| > 0$$

D_c è nota come potenza dissipata nell'atto di moto relativo al meccanismo di collasso.

2. Dal momento che il moltiplicatore dei carichi cresce da zero, s è puro positivo. Dalle

$$s\int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k M_{0k}\dot{\varphi}_{kc} \quad \text{e} \quad D_c = \sum_k M_{0k}\dot{\varphi}_{kc} = \sum_k M_0 |\dot{\varphi}_{kc}| > 0$$

Consegue che il verso dell'atto di moto relativo al meccanismo di collasso comporta valore positio per la potenza esterna dei carichi base:

$$\int p_0 \dot{v}_c dx > 0$$

I teoremi fondamentali del calcolo a rottura.

I moltiplicatori staticamente ammisibili e cinematicamente sufficiente

I moltiplicatori staticamente ammissibili e cinematicamente sufficiente

Si indichino con Ψ i moltiplicatori per cui sia possibile trovare momenti flettenti $M_\psi(x)$ in equilibrio con i carichi base impflicati da Ψ e ovunque rispettosi dei limiti di resistenza della sezione

$$-M_\psi''(x) = \psi p_0$$ + Condizioni al contorno di equilibrio

$$-M_0(x) \leqslant M_\psi(x) \leqslant M_0(x) \quad \forall x$$ (Condizione di confomitá)

Tali moltiplicatori sono detti staticamente ammissibile

I moltiplicatori staticamente ammissibili e cinematicamente sufficiente

Si consideri un qualunque cinematismo ottenuto introducendo nella struttura un opportuno numero j=1,2,...J di cerniere plastiche, che consenta un atto di moto rigido ($\dot{v}_{\beta}(x)$,$\dot{\varphi}_{j\,\beta}$) di verso tale che la potenza dei carichi base sia positiva

$$\int p_0 \dot{v}_{\beta} dx > 0$$

A ognuno di tali cinematismi si associ un moltiplicatore β attraverso di condizione

$$\beta \int p_0 \dot{v}_\beta dx = \sum_j M_{0j} \dot{\varphi}_{i\beta} = D_\beta > 0$$

dove M_{0j} è il momento limite nella j-sima cerniera plastica, di segno concorde con il verso di rotazione della cerniera plastica.

I moltiplicatori β sono associati a cinematismi che hanno le stesse caratteristiche dell'effettivo meccanismo di collasso, ma non coincidono necessariamente con esso.

Tali moltiplicatori sono detti cinematicamente sufficiente

Teorema statico. Il moltiplicatore di collasso è il massimo dei moltiplicatore staticamente ammisibili.

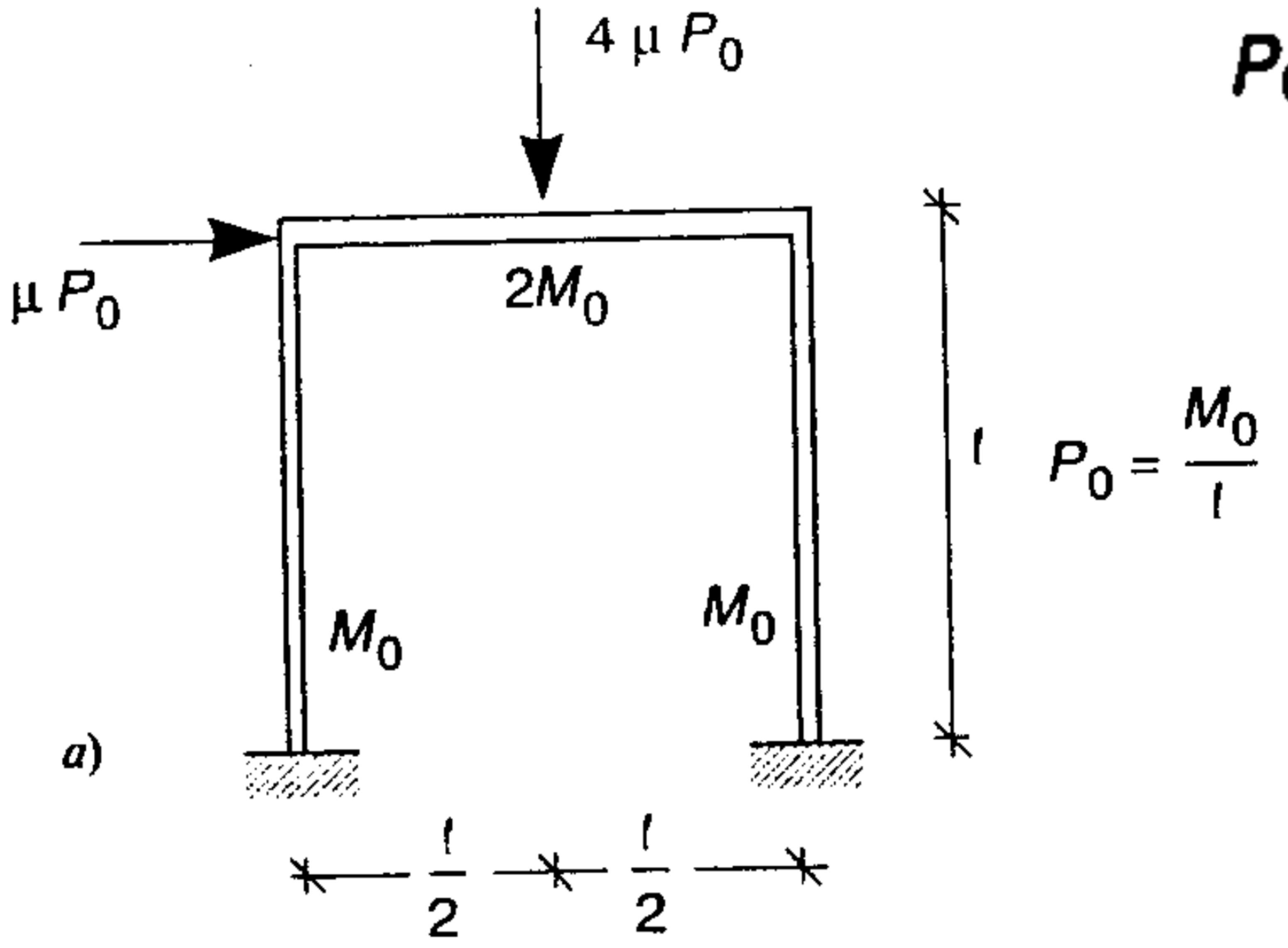
$$s = \max\{\psi\}$$

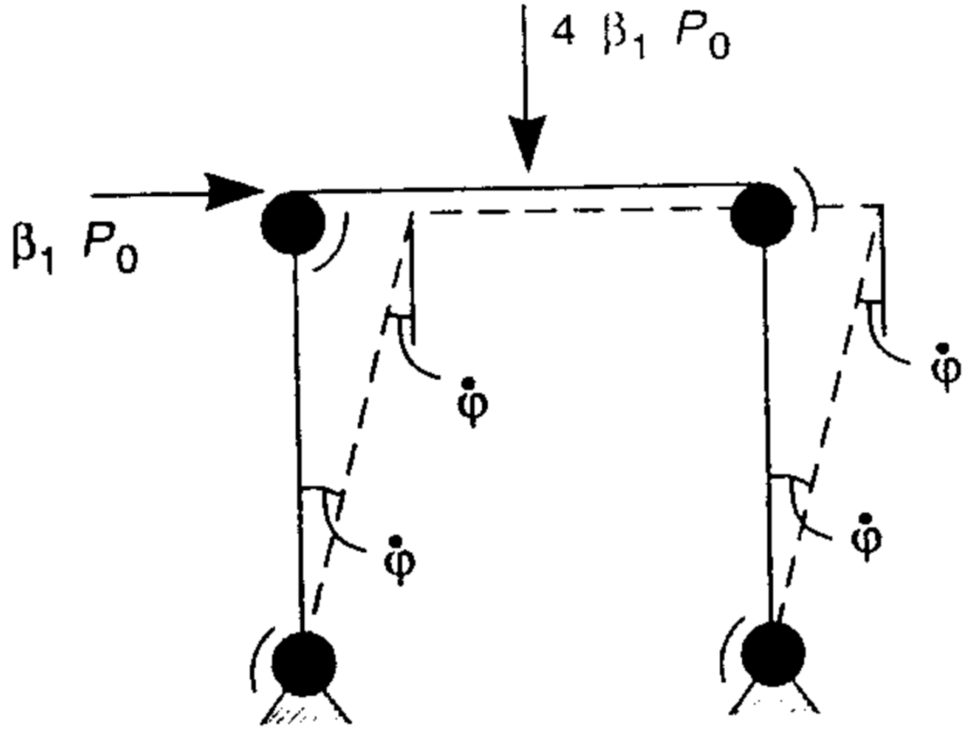
Teorema cinematico. Il moltiplicatore di collasso è il minimo dei moltiplicatore cinematicamente sufficiente.

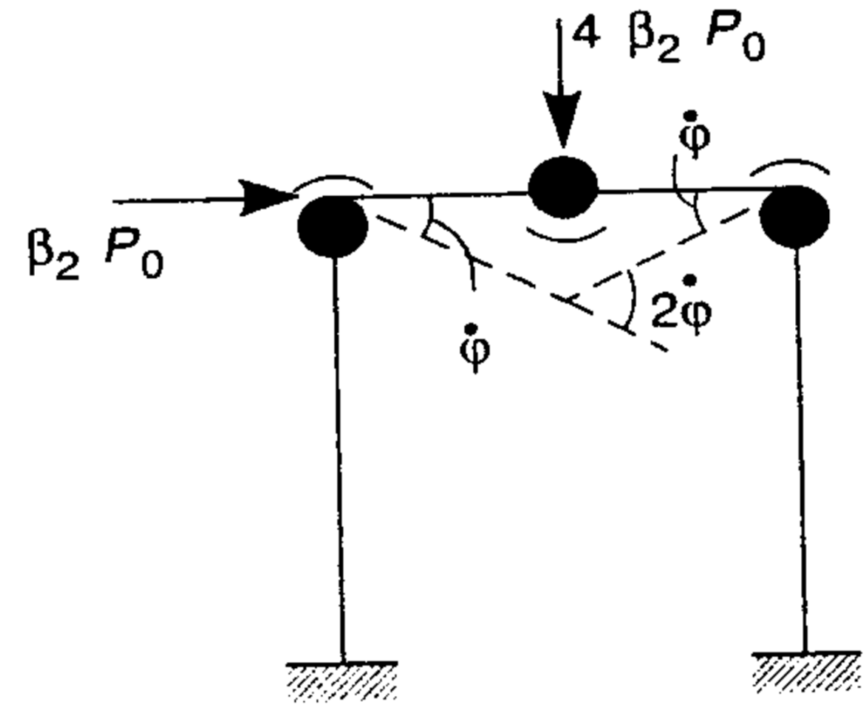
$$s = \min\{\beta\}$$

Esempio 1.

$$P_0 = \frac{M_0}{\ell}$$

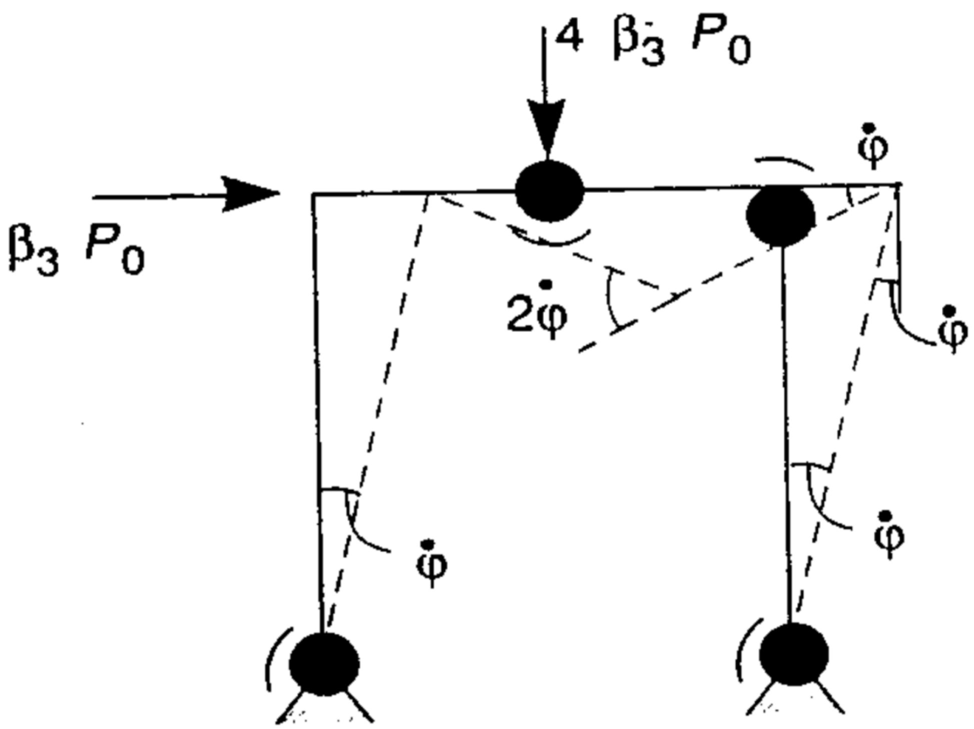






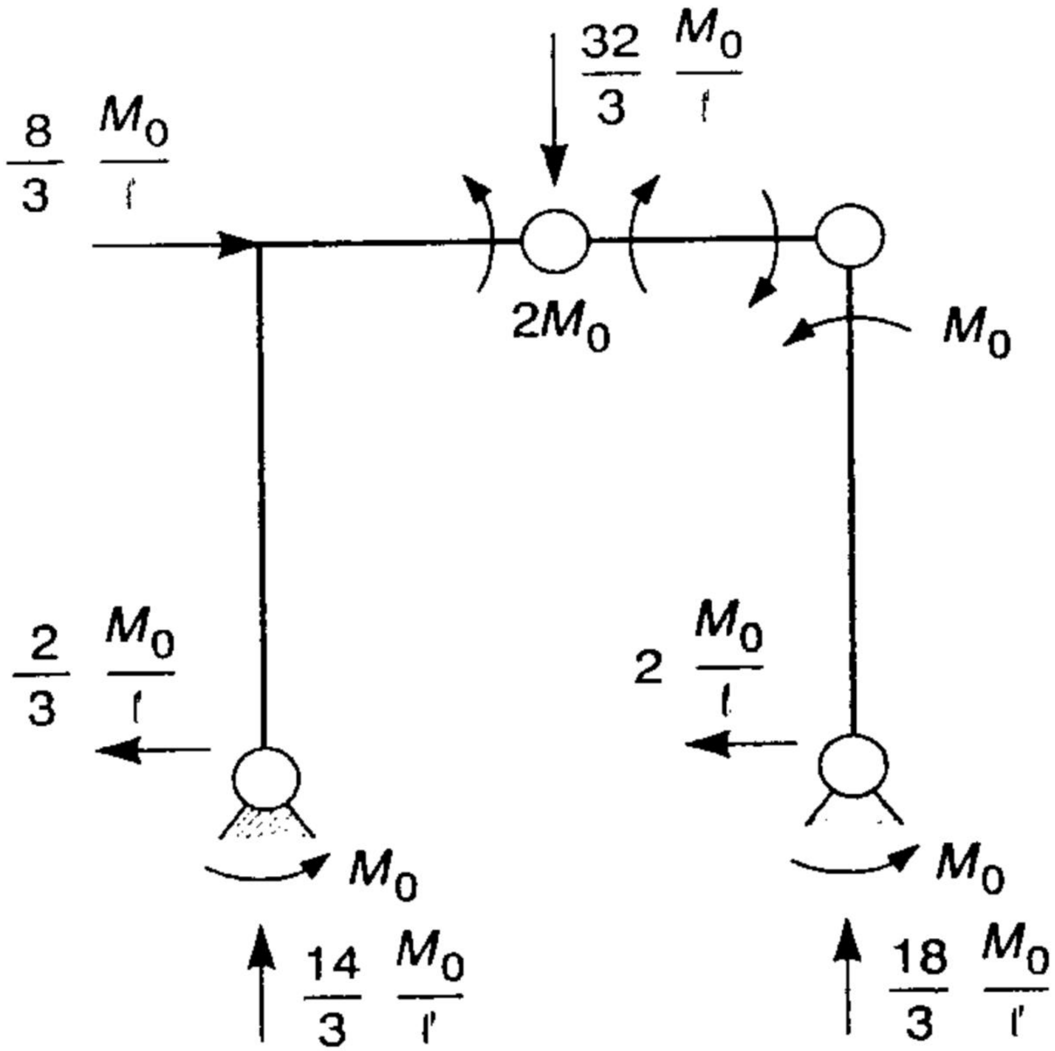
$$\beta_1 P_0 \ell \dot{\varphi} = 4M_0\dot{\varphi}$$

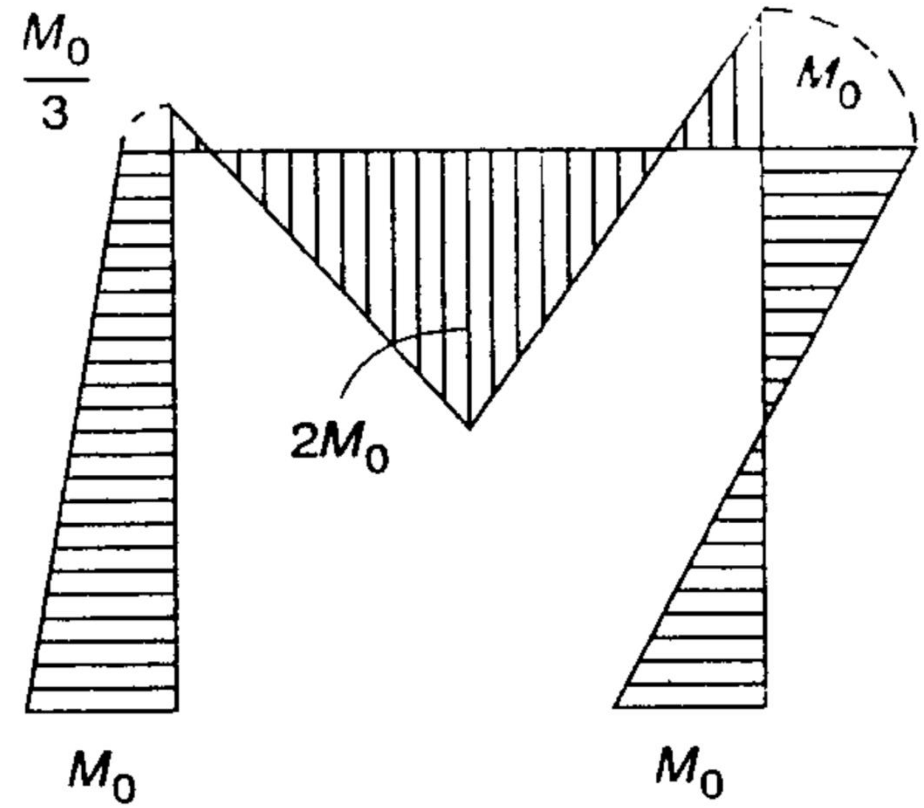
$$\beta_2 4P_0 \frac{\ell}{2}\dot{\varphi} = M_0\dot{\varphi} + (2M_0)(2\dot{\varphi}) + M_0\dot{\varphi}$$



$\beta_1 = 4.0$ $\beta_2 = 3.0$ $\beta_3 = \dfrac{8}{3} = 2.667$

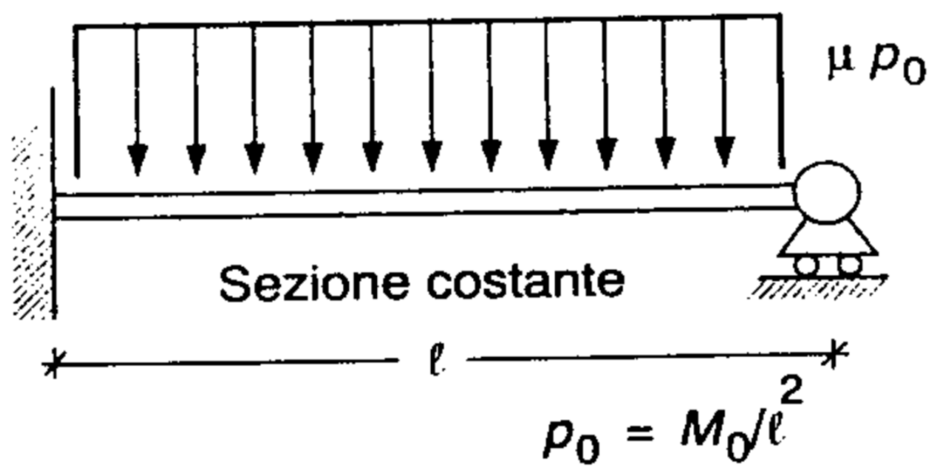
$$\beta_3\left(P_0\ell\dot{\varphi} + 4P_0\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\right) = M_0\dot{\varphi} + (2M_0)(2\dot{\varphi}) + M_0(2\dot{\varphi}) + M_0\dot{\varphi}$$



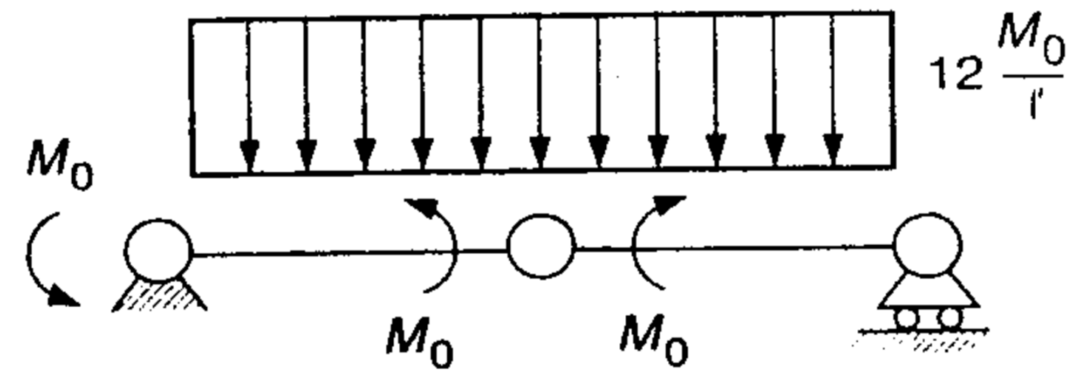


$$s = \beta_3 = 2.667 \quad \left(P_L = \frac{8M_0}{3\ell}\right)$$

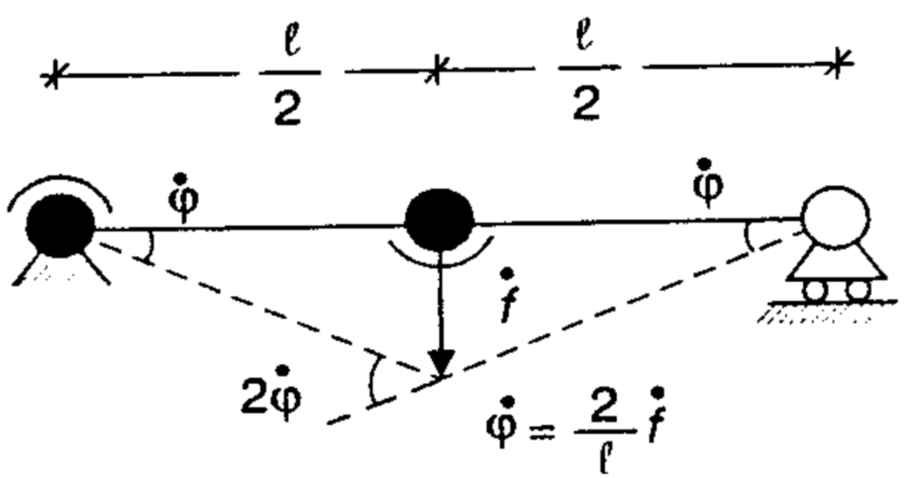
Esempio 2.



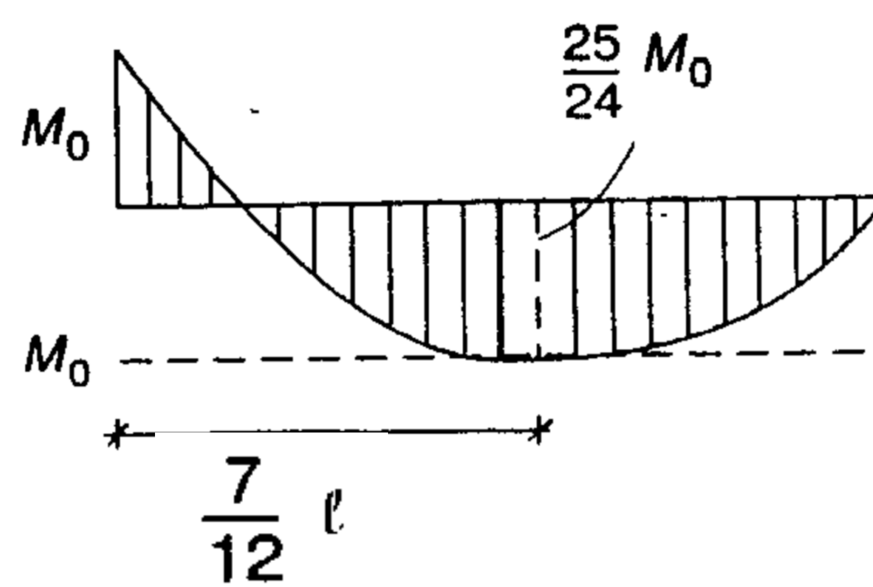
μ p_0
Sezione costante
ℓ
$p_0 = M_0/\ell^2$



$12 \frac{M_0}{\ell}$
M_0
M_0
M_0

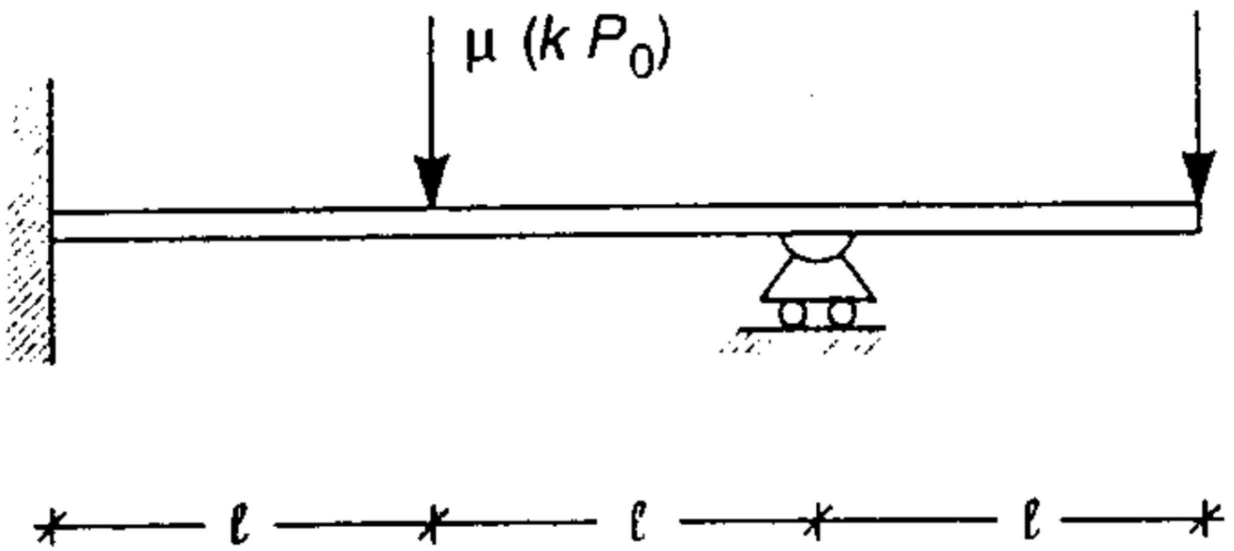


$\frac{\ell}{2}$
$\frac{\ell}{2}$
$\dot{\varphi}$
$\dot{\varphi}$
$\dot{f}$
$2\dot{\varphi}$
$\dot{\varphi} = \frac{2}{\ell} \dot{f}$



$\frac{25}{24} M_0$
M_0
M_0
$\frac{7}{12} \ell$

Esempio 3.



$$P_0 = \frac{M_0}{\ell}\,;\; k \geq 1$$

Esempio 4.