



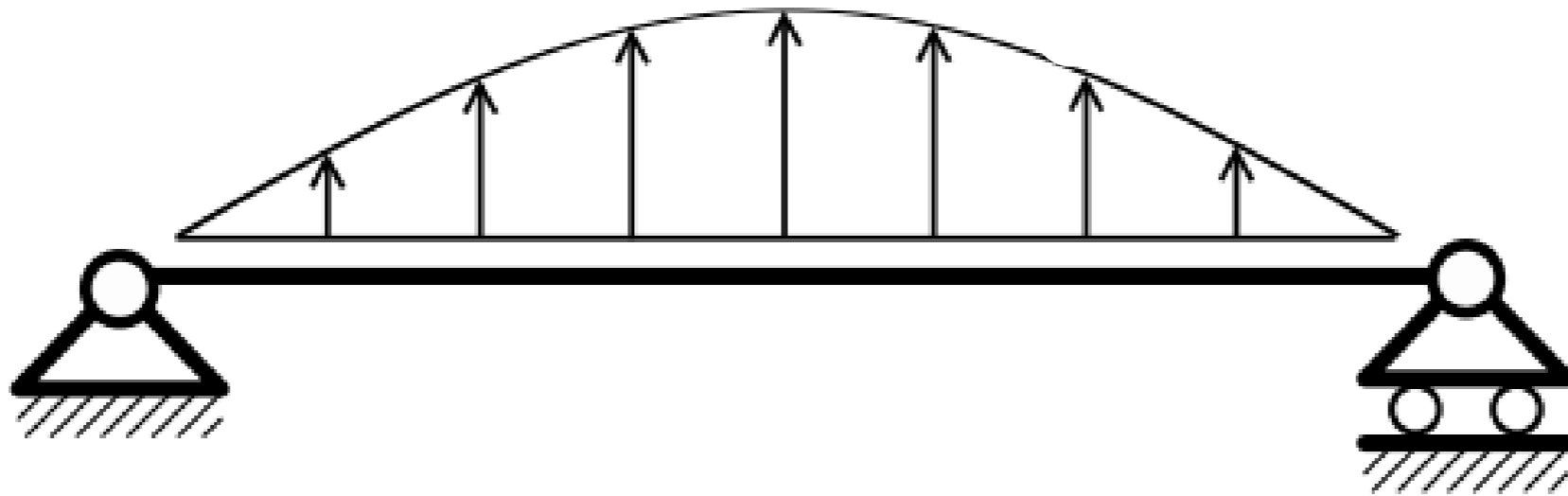
Structural Stability and Limit Analysis of Structures (Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

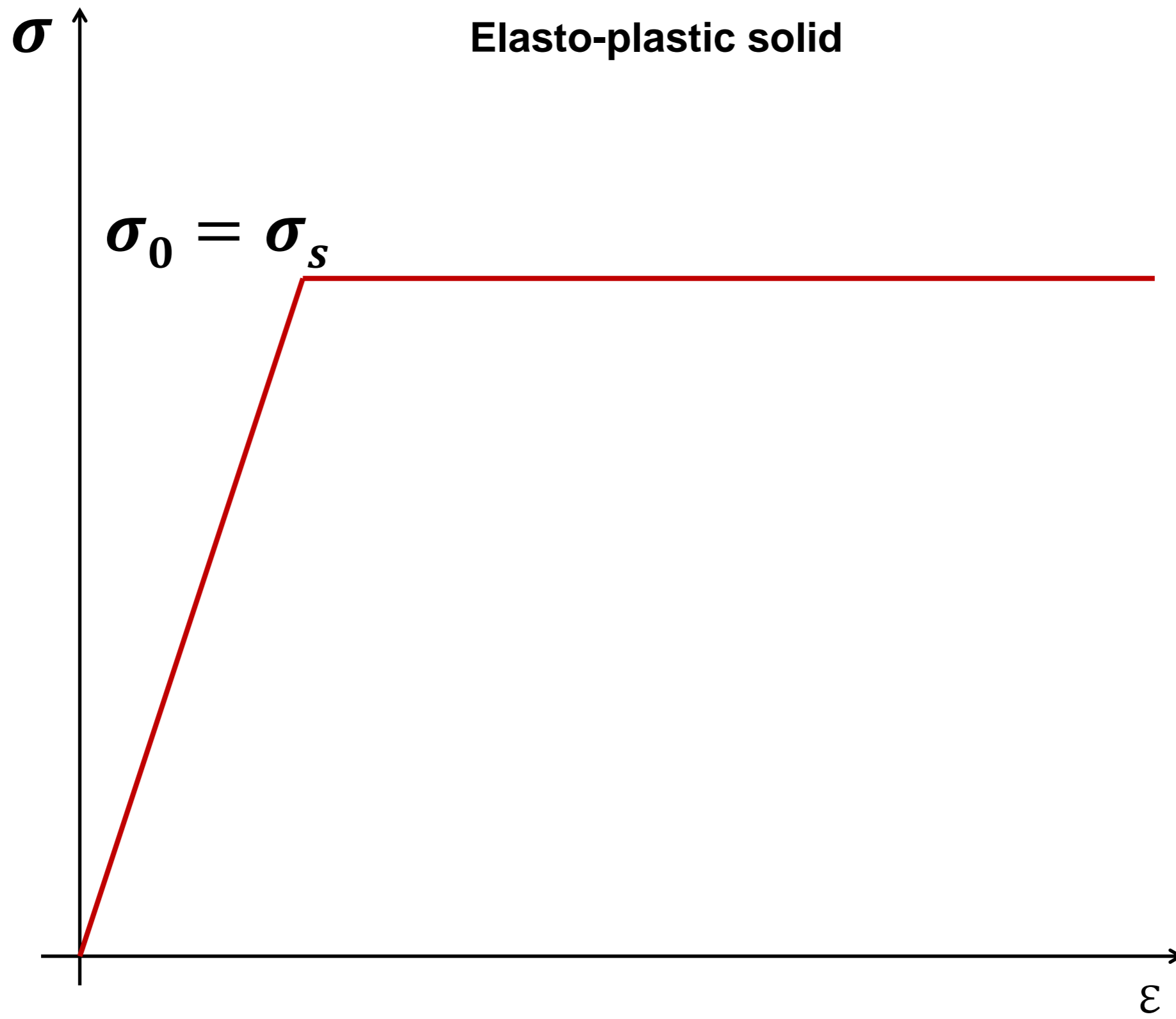
> **Lezione 25**

Limit analysis. Plastic collapse of a bent beam
(Calcolo a rottura. Il collasso plastico di trave inflesse)

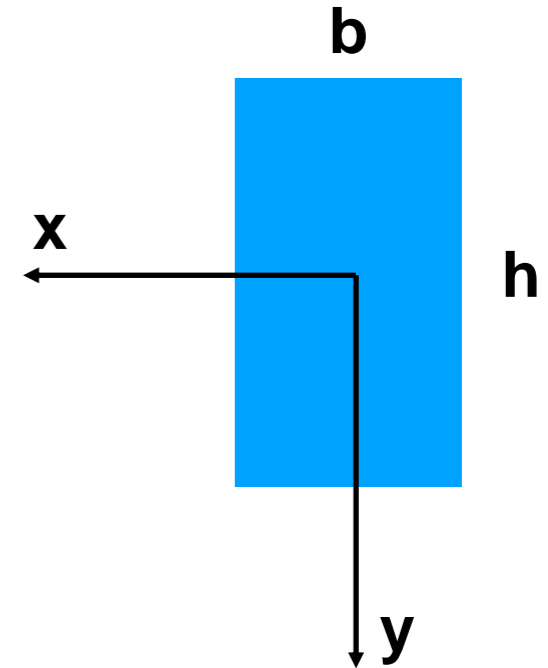
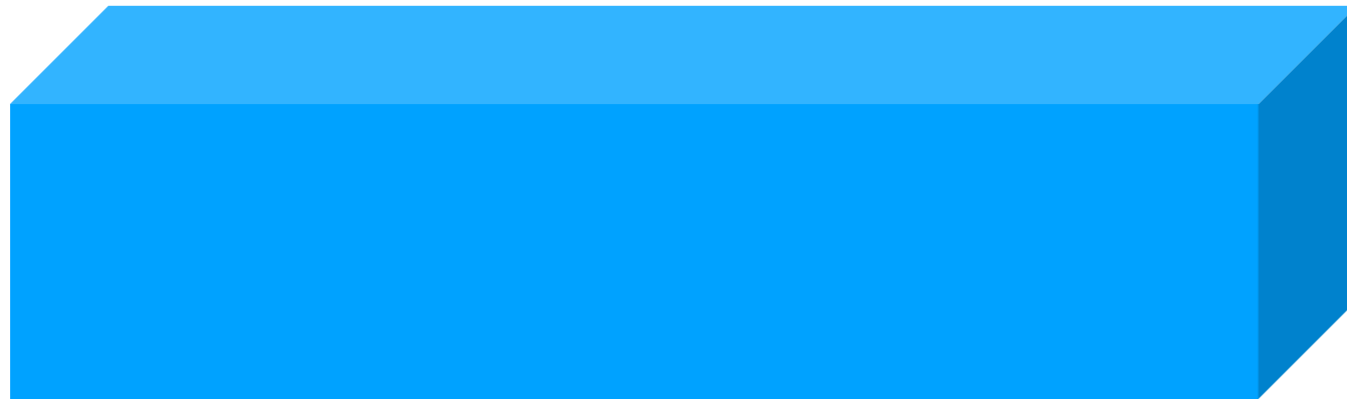
Victor Eremeev

victor.eremeev@unica.it





La trave elaso-plastica



$$\sigma = E\varepsilon = E\chi y$$

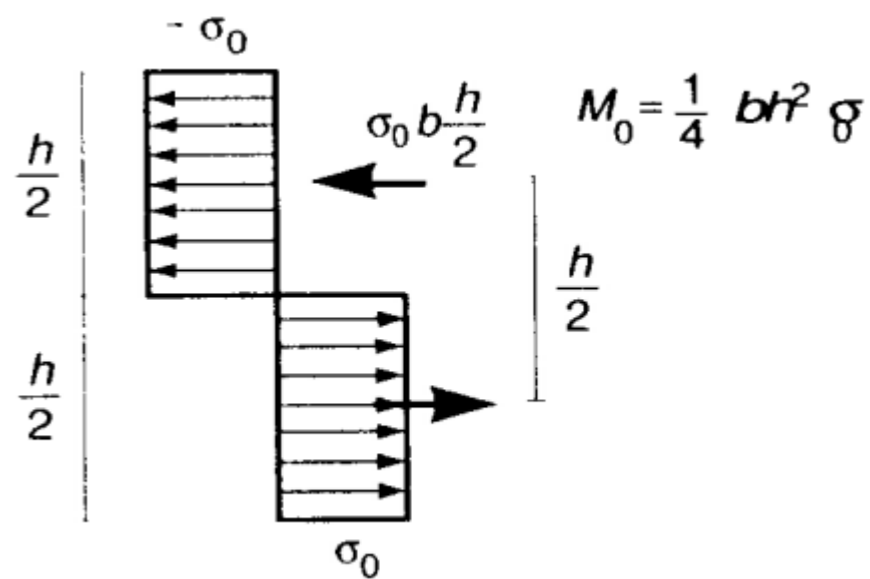
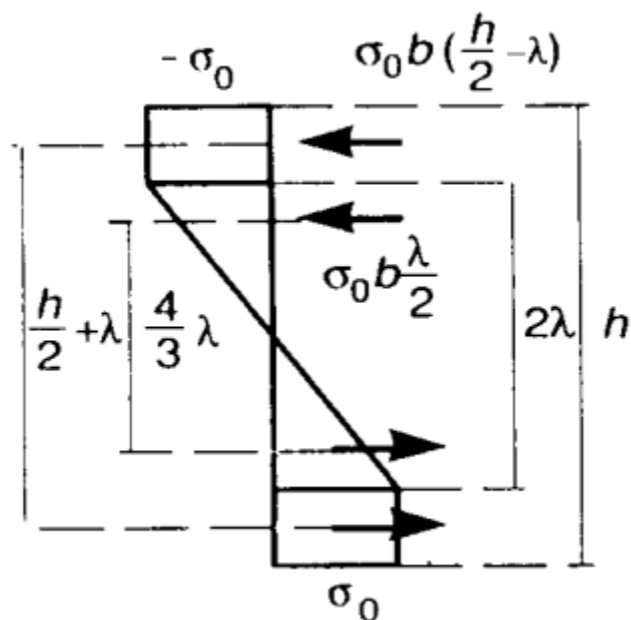
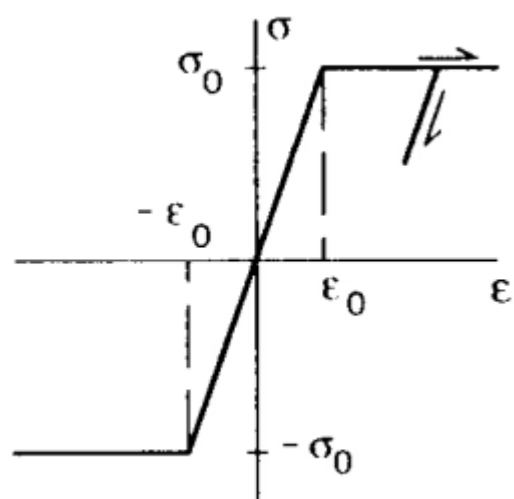
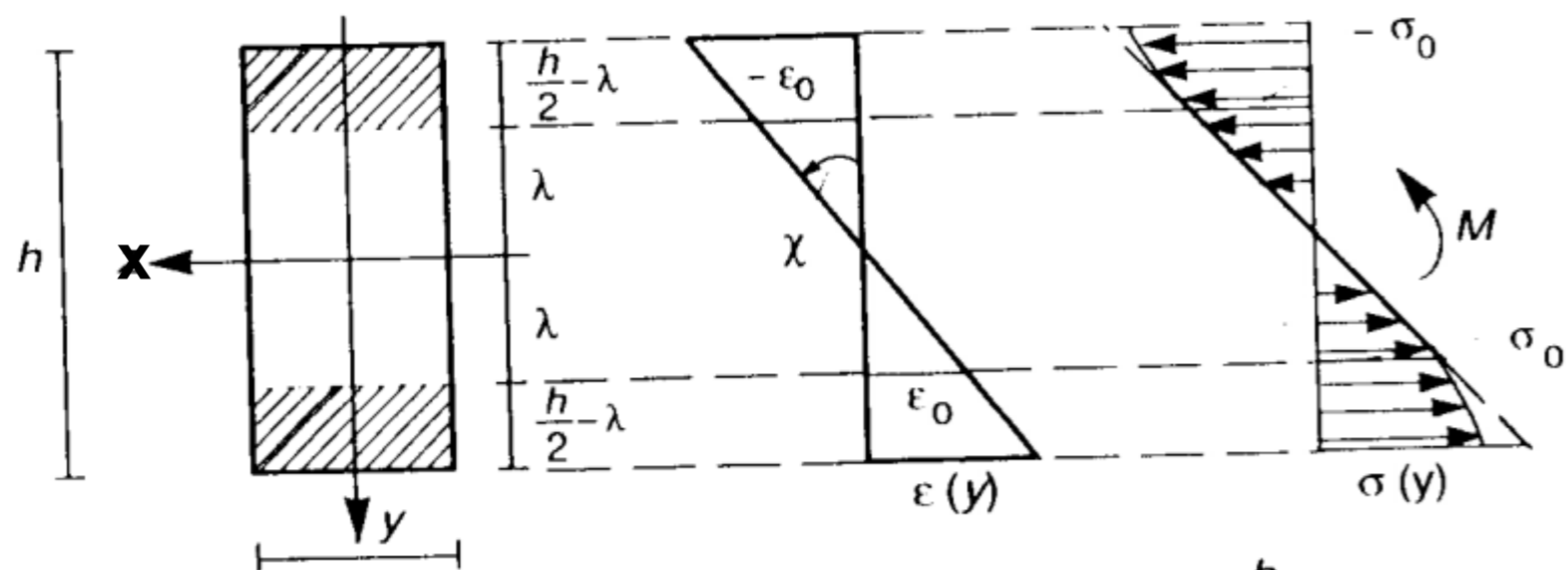
Bending momenté $M = EI\chi$ where χ is the curvature

Moment M_e and χ_e at elastic limit

$$M_e = \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0 \quad \chi_e = \frac{M_e}{EI} = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E}$$

$$M = \int_A y \sigma dA$$

$$M = M_e \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right] \quad (\chi \geq \chi_e)$$



$$M_0 = \lim_{\chi \rightarrow \infty} M(\chi) = \frac{3}{2} M_e = \frac{1}{4} b h^2 \sigma_0$$

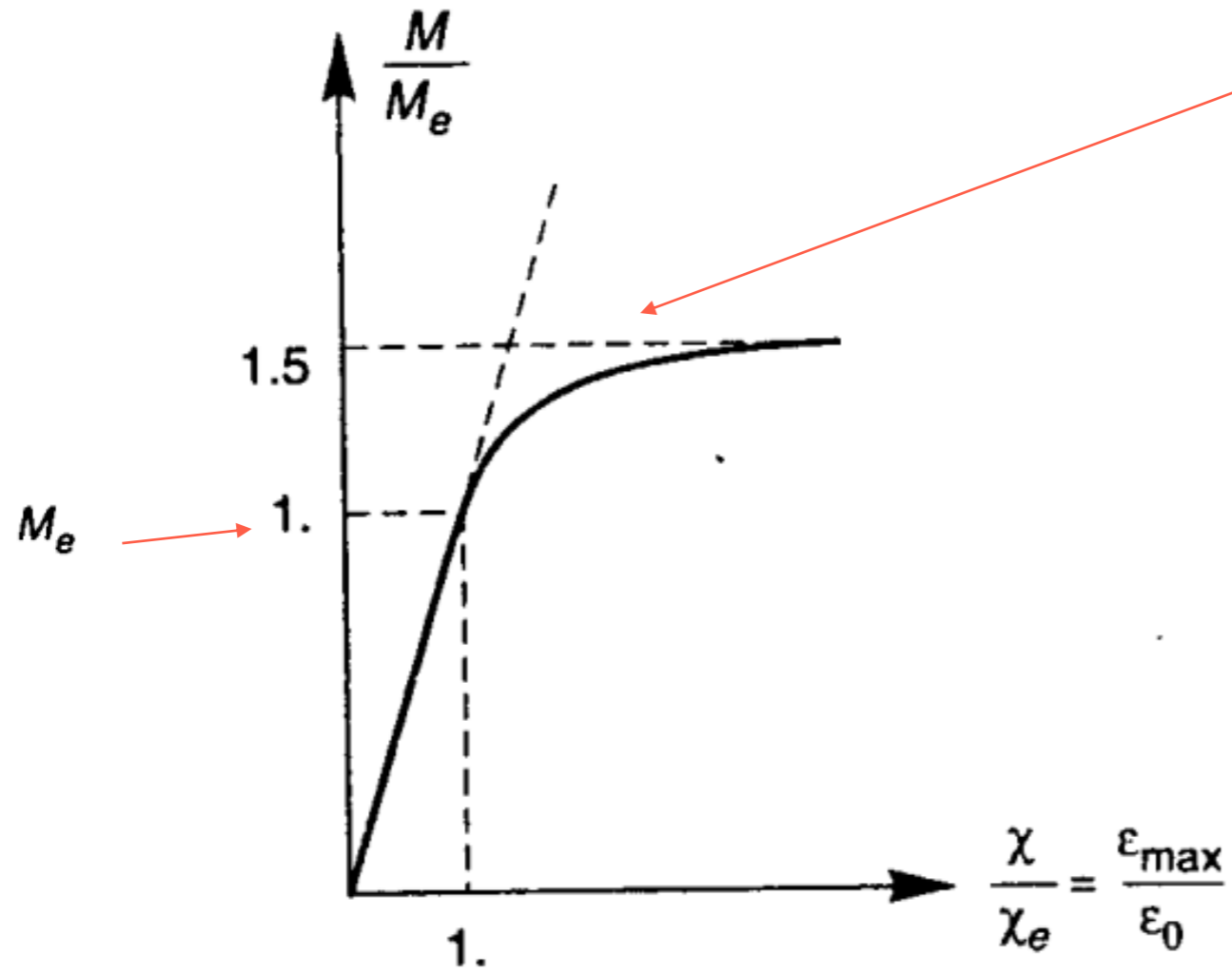
Moment limit

Hypothesis of a plastic hinge

For a rectangular cross-section as $b \times h$ the constitutive relations of elasto-plastic material result in

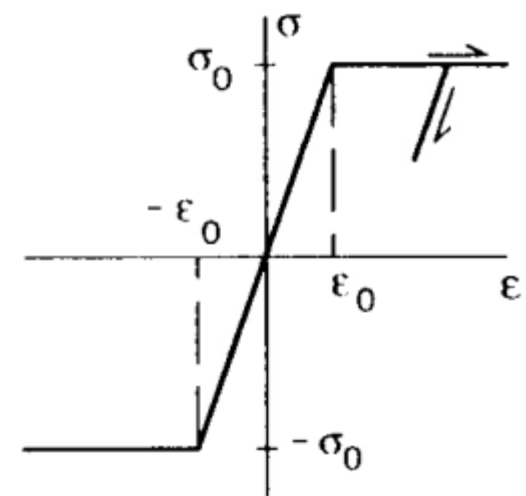
$$M(\chi) = \begin{cases} EI \chi & \text{se } \chi \leq \chi_e \\ M_e \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right] & \text{se } \chi \geq \chi_e \end{cases}$$

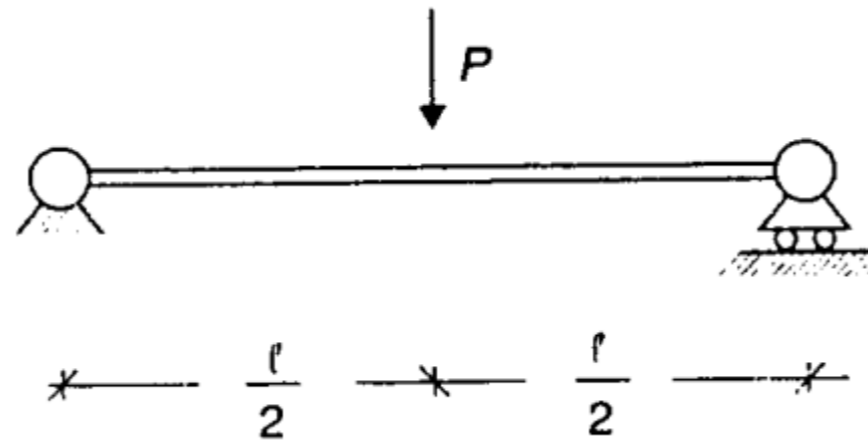
$$M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_0 \quad \chi_e = \frac{M_e}{EI} = \frac{2}{h} \epsilon_0$$




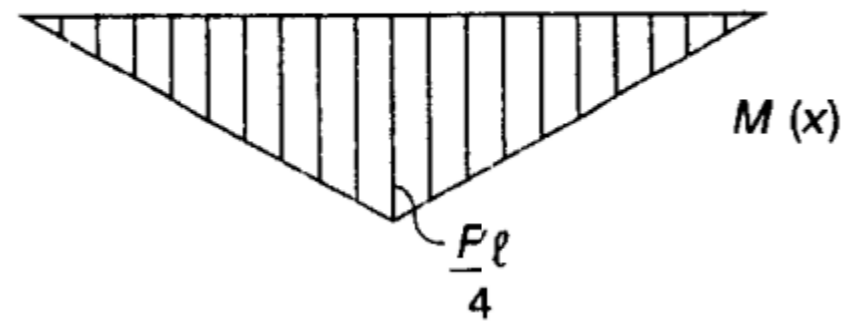
Il momento limite

$$M_0 = \frac{3}{2} M_e = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$$



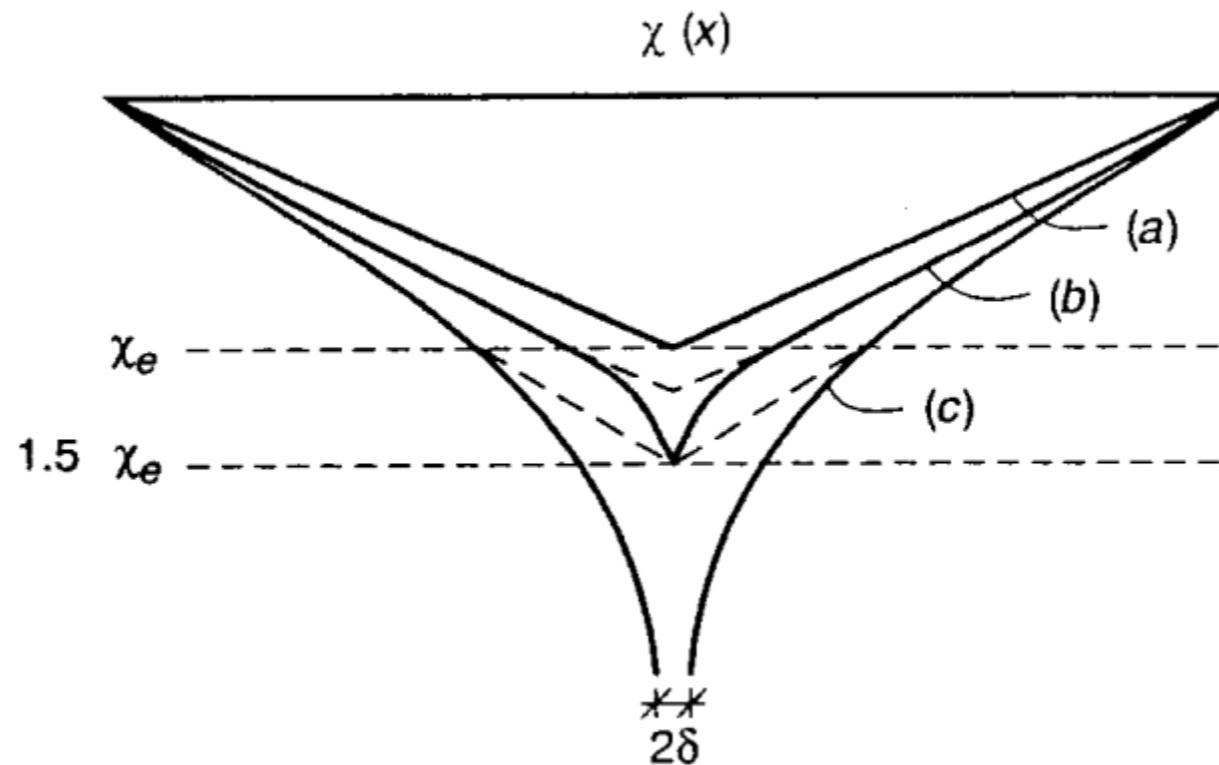


La trave è isostatica. Indipendentemente dal legame costitutivo, il suo diagramma dei momenti è quindi quello illustrato in Figura  che presenta il valore massimo $M_{\max} = Pl/4$ in mezzaria.



Si possono distinguere le due fasi seguenti.

- 1: $P \leq \frac{4M_e}{\ell} = \frac{8M_0}{3\ell}$. In tal caso è $M_{\max} \leq M_e$ e tutte le sezioni si trovano in campo elastico. In tal caso si ottiene allora $\chi(x) = \frac{M(x)}{EI}$ e la curvatura presenta un andamento triangolare simile a quello dei momenti (diagramma (a) in Figura 10.1).



- 2: $\frac{8M_0}{3\ell} < P < \frac{4M_0}{\ell}$. In un tratto attorno alla mezzaria della trave risulta adesso $M(x) > M_e$; in esso le curvature si discostano dall'andamento triangolare di una quantità pari alla differenza in ascisse tra la curva $M - \chi$, a tratto pieno, e la retta $M = EI\chi$ tratteggiata (diagramma (b) in Figura 10.1). Per $P \rightarrow 4M_0/\ell$ la curvatura nella sezione di mezzaria diviene sempre più grande e teoricamente illimitata (diagramma (c)). Il valore $P_L = 4M_0/\ell$ rappresenta il carico di collasso della trave: il momento massimo ha infatti raggiunto il valore limite e non può ulteriormente aumentare, come l'equilibrio richiederebbe per carichi più elevati.

$\frac{\chi}{\chi_e} = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_0}$	1.	2.	3.	5.	10.
$\frac{M}{M_0}$.667	.917	.963	.987	.997
$\frac{\chi}{M/EI}$	1.000	1.455	2.077	3.378	6.689

L'ampiezza dell'intervallo in cui le curvature si discostano dall'andamento triangolare elastico è anche notevole. Tuttavia il tratto in cui si riscontrano scostamenti significativi è drasticamente più limitato: curvature più che doppie rispetto a M/EI richiedono $M > 0.96 M_0$. La quantità

$$\varphi = \int_{l/2 - \delta}^{l/2 + \delta} \chi dx$$

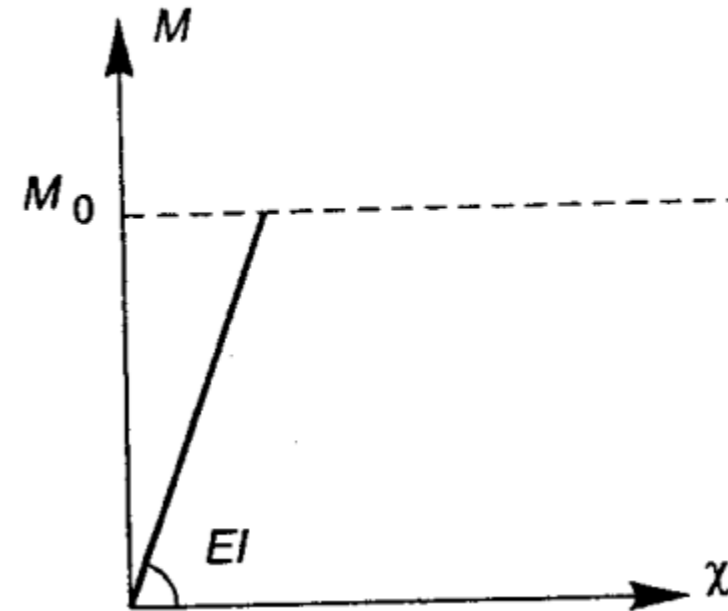
può essere interpretata come una rotazione relativa tra due tratti di trave che si mantengono elastici: per $M = M_0$, il mutuo incastro tra i due tratti viene sostituito da una cerniera.



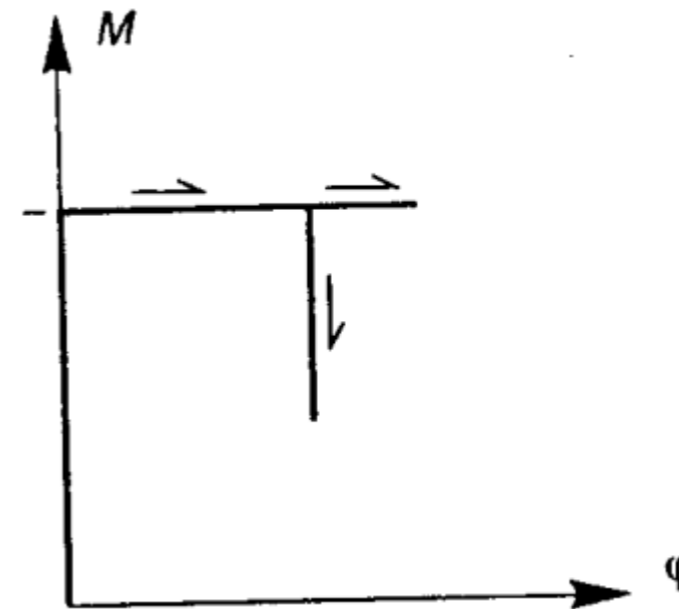
Il modello di cerniera plastica

Questa osservazione è alla base dell'idealizzazione del comportamento flessionale nota come *cerniera plastica*

Il legame momento-curvatura oppure



Il legame momento rotazione



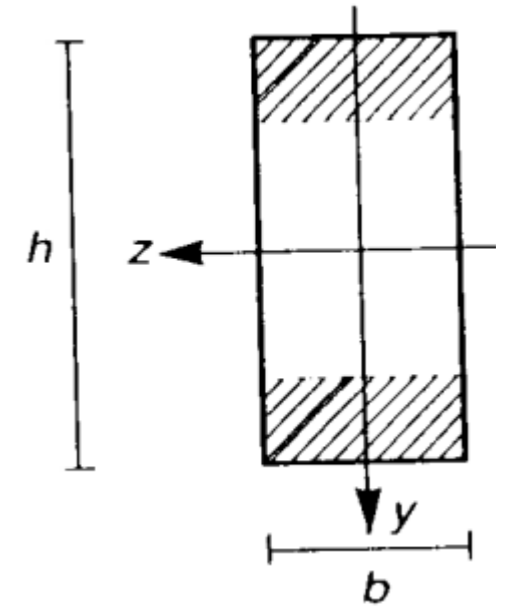
Il modello di cerniera plastica

Rispetto a una cerniera strutturale, la cerniera plastica presenta due differenze. Pur consentendo rotazioni relativi tra i due tratti che congiunge, essa trasmette un momento flettente *costante*, pari a $\pm M_0$; essa è inoltre una cerniera *unidirezionale*, che può ruotare solo nel verso di plasticizzazione, vale a dire compatibilmente con il segno del momento flettente.

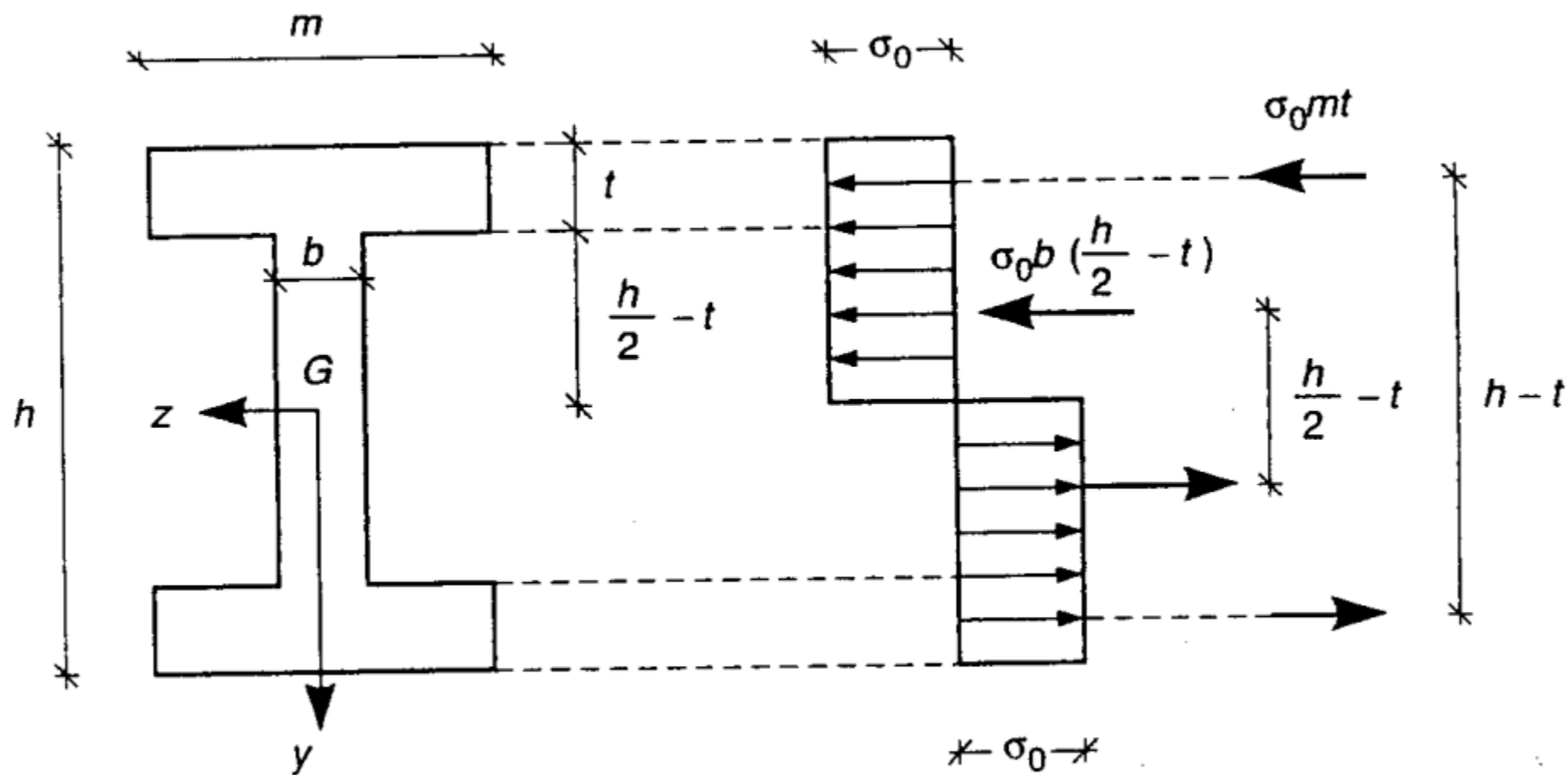
Il modello a cerniera plastica descrive il comportamento flessionale della sezione in termini della sola *rigidità elastica* EI e del suo *momento limite* M_0 , senza necessario definire la curva momento-curvatura. Questa non è solamente una semplificazione...

Il momento limite

$$M_0 = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$$



$$M_0 = \sigma_0 m t (h - t) + \sigma_0 b \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 = \sigma_0 \left[m t (h - t) + b \left(\frac{h^2}{4} - h t + t^2 \right) \right]$$



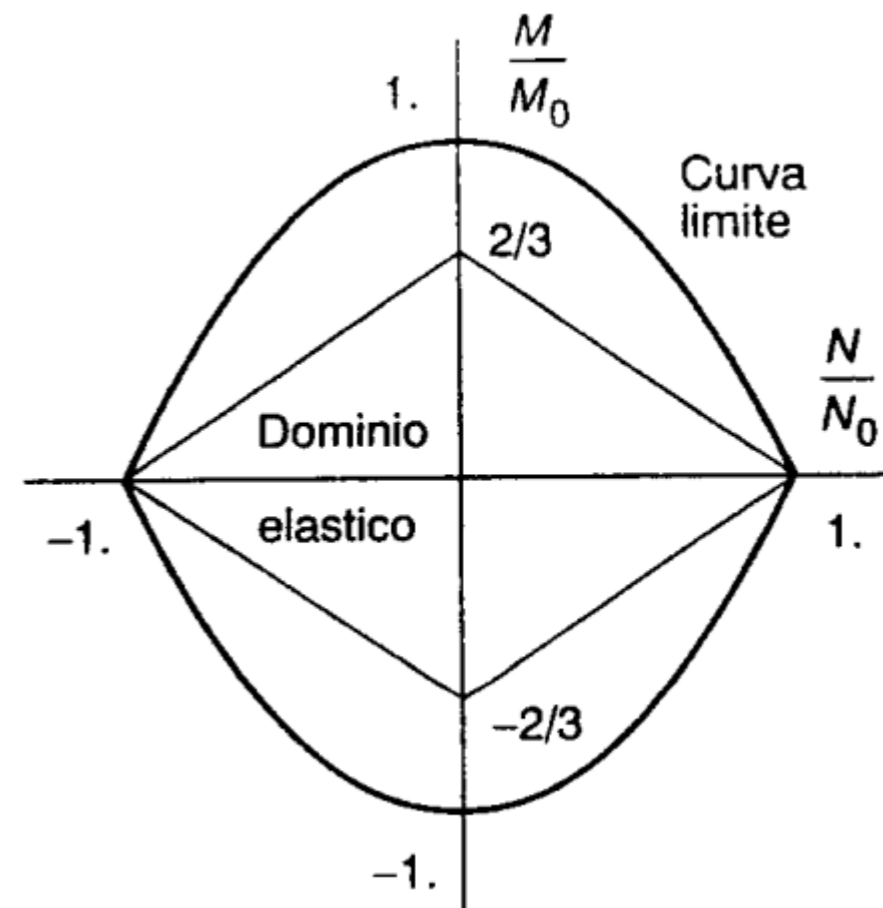
Sollecitazione composta

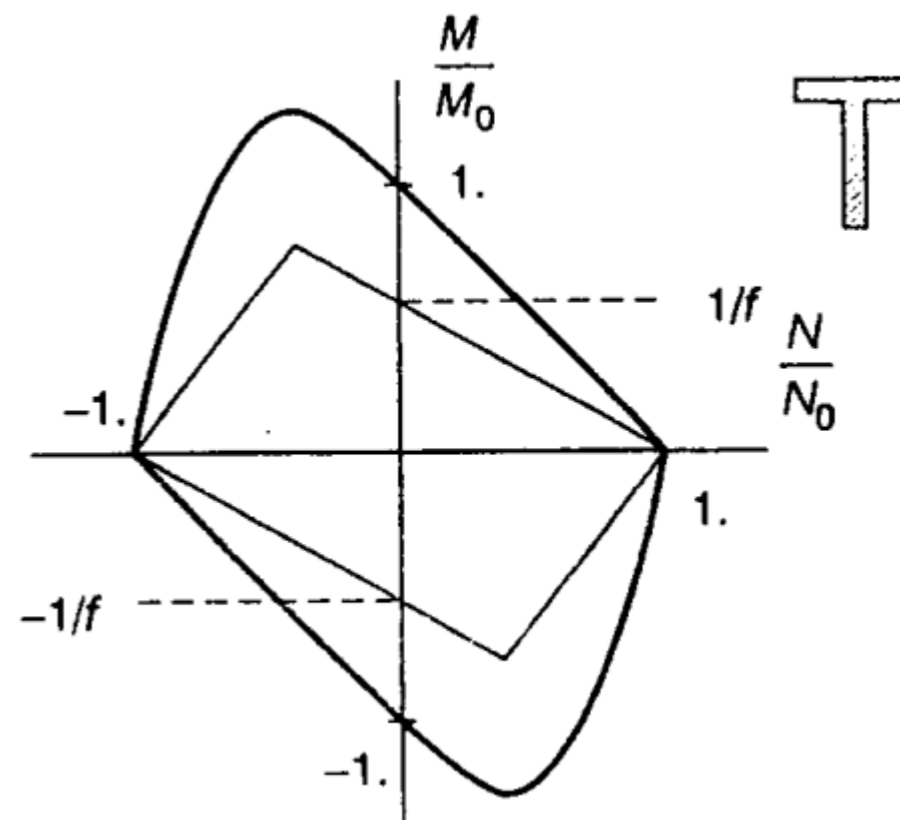
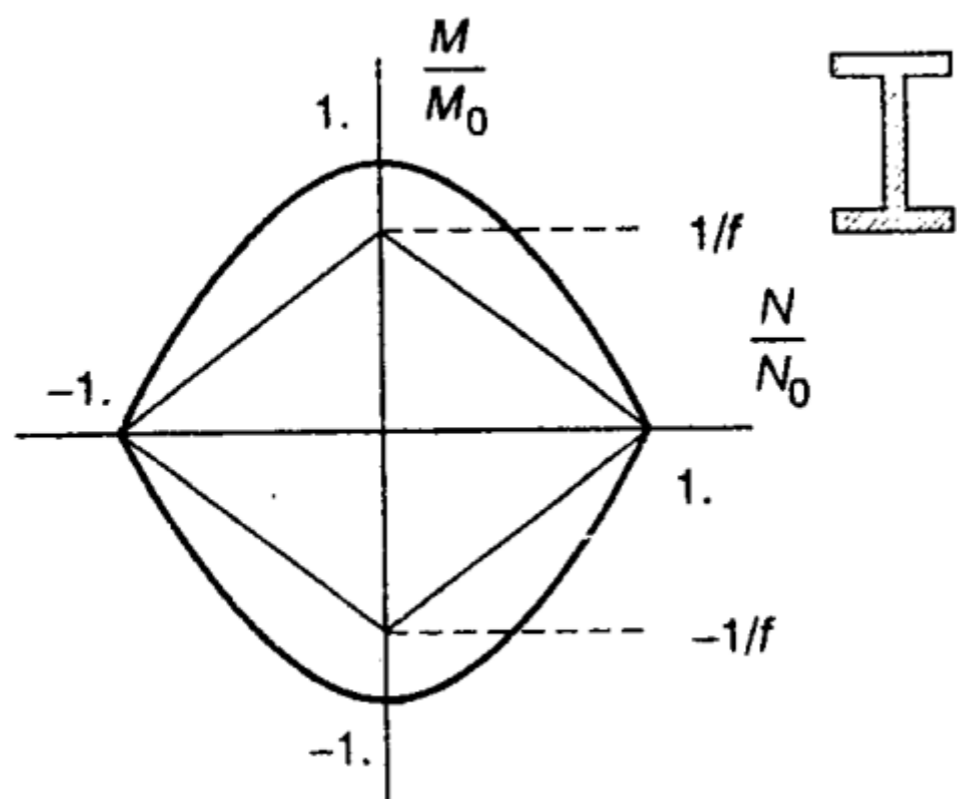
$$\pm \frac{N}{N_e} \pm \frac{M}{M_e} \leq 1$$

$$N_0 = N_e = bh\sigma_0 \quad M_0 = \frac{1}{4} bh^2 \sigma_0$$

$$M = M_0 \left[1 - \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 \right]$$

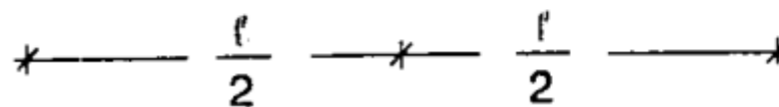
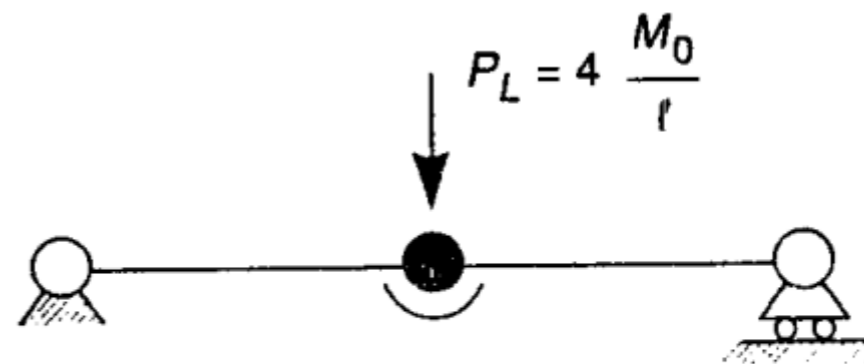
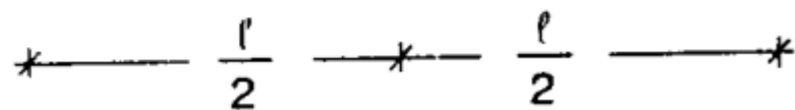
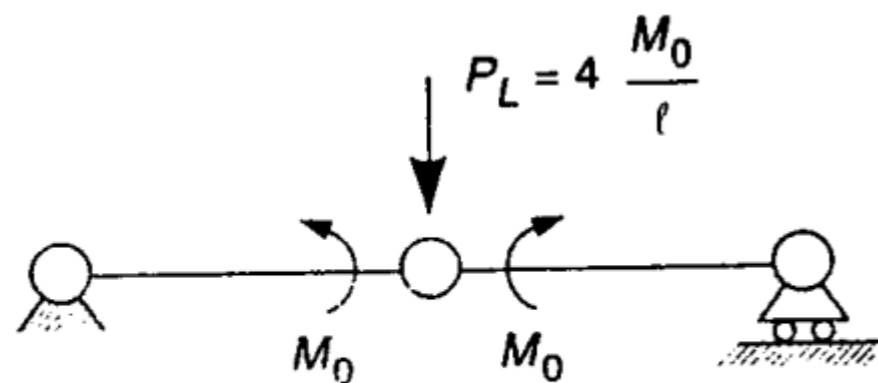
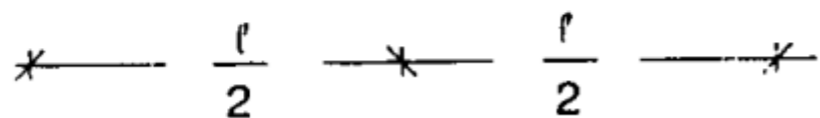
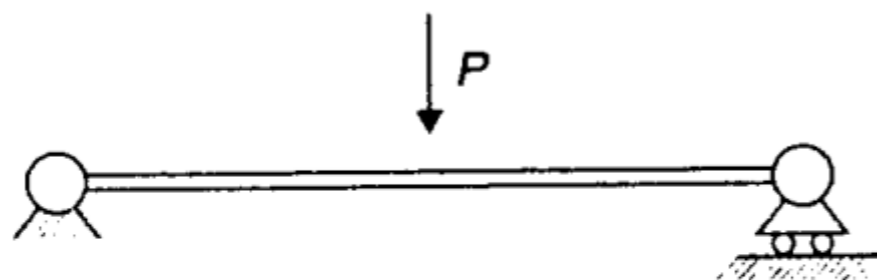
$$\pm \frac{M}{M_0} + \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 = 1$$



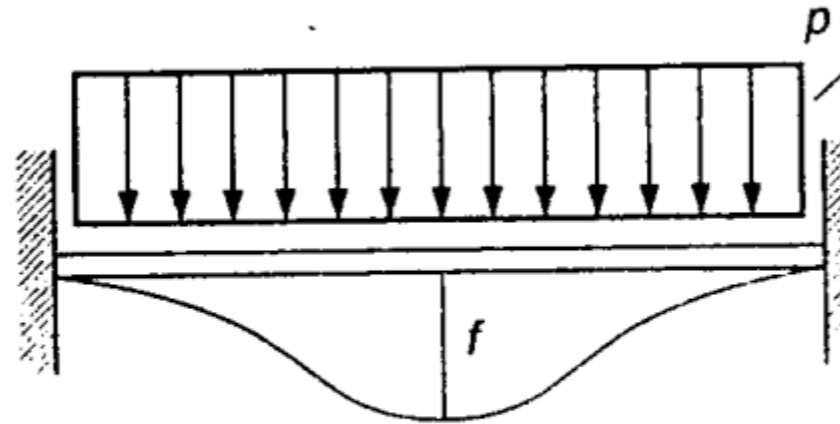


Esempio 1

$EI = \text{cost}$, $M_0 = \text{cost}$



Esempio 2



$$EI = \text{cost}, M_0 = \text{cost}$$