



UNICA  
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI CAGLIARI

Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

**Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2022/23**

# Structural Stability and Limit Analysis of Structures (Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

> **Lezione 22**

Flutter

***Victor Eremeev***

victor.eremeev@unica.it



# VIDEO

[https://www.youtube.com/watch?v=qpJBvQXQC2M&ab\\_channel=AIRBOYD](https://www.youtube.com/watch?v=qpJBvQXQC2M&ab_channel=AIRBOYD)

[https://www.youtube.com/watch?v=egDWh7jnNic&ab\\_channel=UnderstandingAirplanes](https://www.youtube.com/watch?v=egDWh7jnNic&ab_channel=UnderstandingAirplanes)

[What is Flutter in an Aircraft? | Reasons for Flutter and How it is Prevented? - YouTube](https://www.youtube.com/watch?v=qpJBvQXQC2M&ab_channel=AIRBOYD)

<https://www.youtube.com/watch?v=qpJBvQXQC2M&authuser=0>

<https://www.youtube.com/watch?v=egDWh7jnNic&authuser=0>

# I sistemi aeroelastici piani

Si considera un modello aeroelastico a tre gradi di libertà, costituito da un cilindro rigido, vincolato da molle e smorzatori viscosi, libero di traslare nelle due direzioni trasversali all'asse,  $a_x$ ,  $a_y$ , e di ruotare intorno al proprio asse  $a_z$

modello

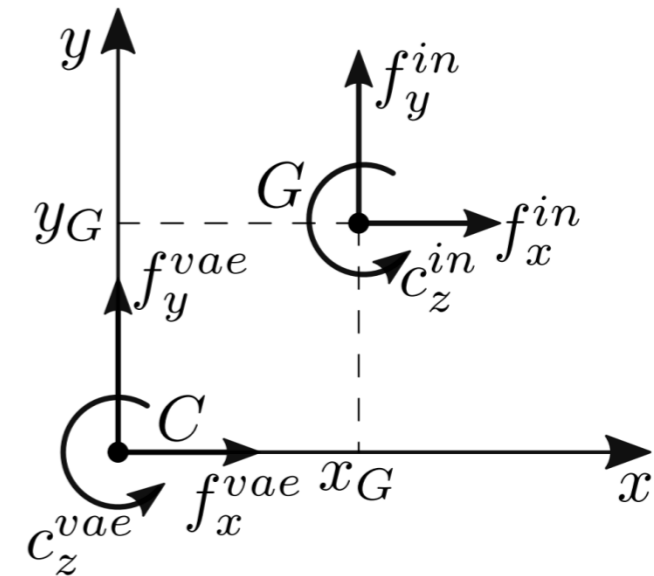
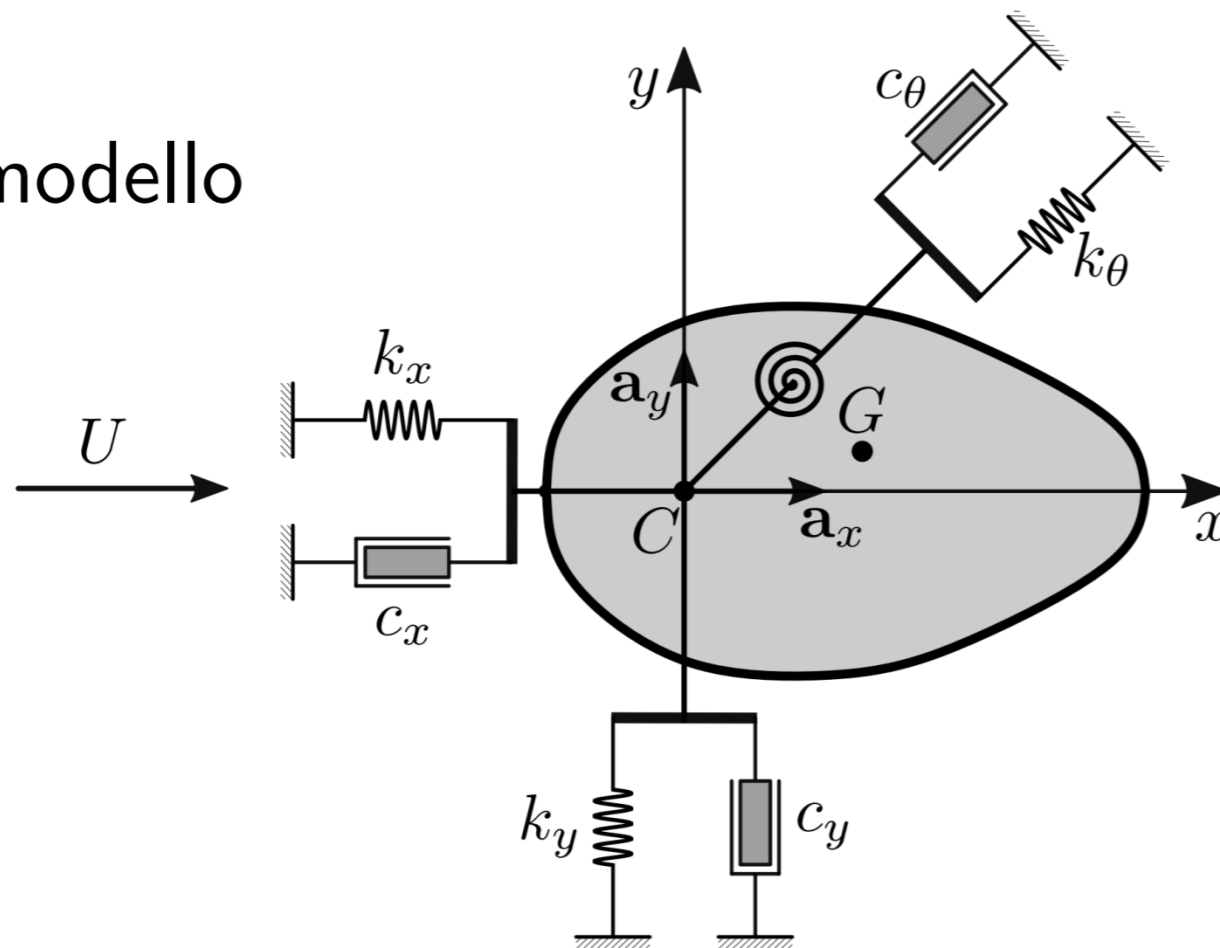


diagramma di corpo libero

Sezione di un cilindro rigido vincolato elasticamente:

## Il modello strutturale a tre gradi di libertà

Il cilindro è vincolato da molle elastiche lineari  $k_x, k_y, k_\theta$  e smorzatori viscosi lineari  $c_x, c_y, c_\theta$ , applicati in una particolare sezione, in un punto  $C$  detto *centro di torsione*, agenti rispettivamente secondo le direzioni  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  (organi estensionali) ed  $\mathbf{a}_z$  (organo torsionale). Si assumono quali parametri lagrangiani le traslazioni  $u_C, v_C$  del punto  $C$ , rispettivamente secondo le direzioni  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ , e la rotazione  $\theta$  del cilindro intorno ad  $\mathbf{a}_z$ . È pertanto  $\mathbf{q} := (u_C, v_C, \theta)^T$ . Le equazioni del moto del cilindro si scrivono:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_s\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_s\mathbf{q} = \mathbf{f}^a$$

dove  $\mathbf{M}$  è la matrice di massa,  $\mathbf{C}_s$  la matrice di smorzamento strutturale,  $\mathbf{K}_s$  la matrice di rigidità strutturale, aventi le seguenti espressioni:

$$\mathbf{M} = M \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_G \\ 0 & 1 & x_G \\ -y_G & x_G & r_C^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta \end{bmatrix}$$

In queste:  $M$  è la massa del cilindro;  $r_C^2$  è il quadrato del giratore polare d'inerzia di massa della sezione, calcolato rispetto al centro di torsione;  $(x_G, y_G)$  sono le coordinate del centro di massa  $G$ , misurate nel sistema  $(C, x, y)$ ; infine,  $\mathbf{f}^a := (F_x, F_y, C_m)^T$  è il vettore delle forze aeroelastiche, valutato più avanti.

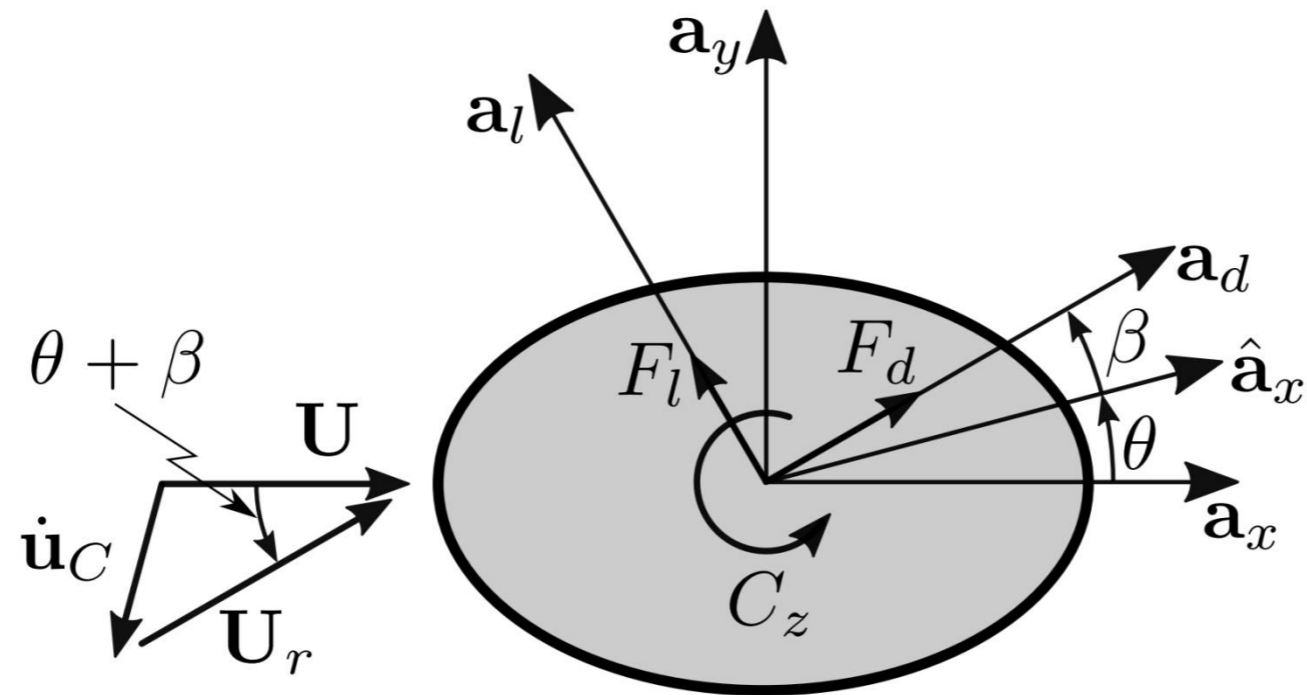
# Le forze aeroelastiche

1. *Aeroelasticità stazionaria.* Le forze aeroelastiche sono dette *stazionarie* quando le velocità di traslazione  $\dot{\mathbf{u}}_C = \dot{u}_C \mathbf{a}_x + \dot{v}_C \mathbf{a}_y$  e di rotazione  $\dot{\theta} \mathbf{a}_z$  sono così piccole da poter essere trascurate; l'interazione fluido-struttura è dunque tutta espressa dalla rotazione  $\theta$ , che, modificando l'esposizione del corpo al vento, modifica l'azione aeroelastica. Si tratta di un'approssimazione di basso livello, raramente adottata nelle applicazioni.
2. *Aeroelasticità quasi-stazionaria.* Le forze aeroelastiche sono dette *quasi-stazionarie* quando, oltre alla rotazione  $\theta$ , si tenga conto anche della velocità del cilindro

Questa seconda approssimazione appare maggiormente significativa. Sono tuttavia possibili due varianti, in cui: (I) si tenga conto solo di  $\dot{\mathbf{u}}_C$  e non di  $\dot{\theta} \mathbf{a}_z$ , oppure, (II) si considerino entrambi i contributi. In questo testo, ci si riferirà alla prima come la *teoria quasi-stazionaria di primo livello*, ed alla seconda come la *teoria quasi-stazionaria di secondo livello*.

## La teoria quasi-stazionaria di primo livello

$$\mathbf{U}_r := \mathbf{U} - \dot{\mathbf{u}}_C = (U - \dot{u}_C) \mathbf{a}_x - \dot{v}_C \mathbf{a}_y$$

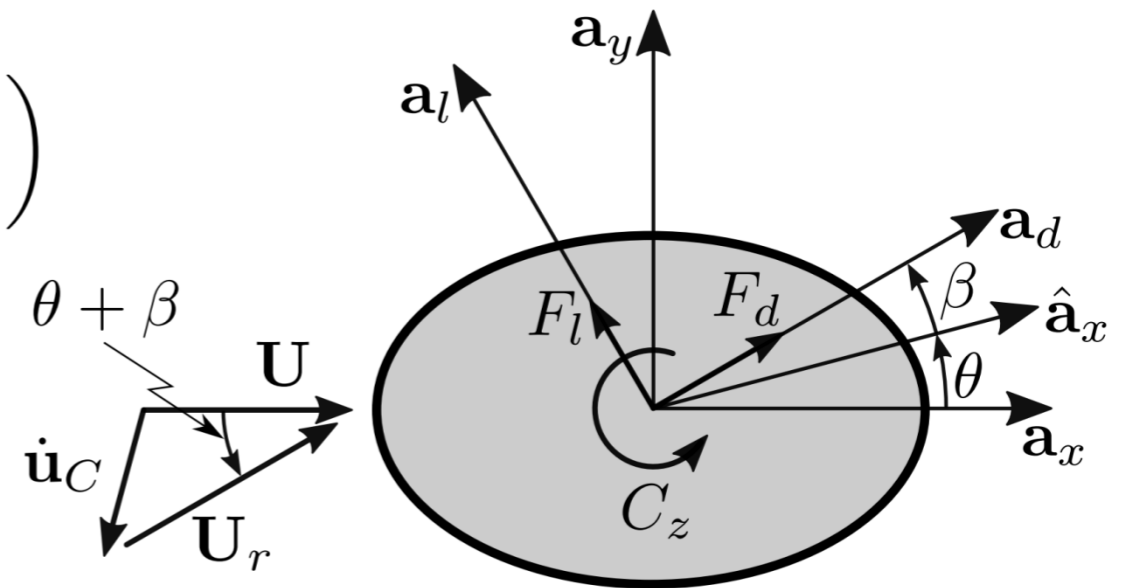


Forze aeroelastiche sul cilindro a tre gradi di libertà.

$$\tan(\beta + \theta) = \frac{\mathbf{U}_r \cdot \mathbf{a}_y}{\mathbf{U}_r \cdot \mathbf{a}_x} = -\frac{\dot{v}_C}{U - \dot{u}_C}$$

l'angolo di attacco è:

$$\beta = -\theta - \arctan\left(\frac{\dot{v}_C}{U - \dot{u}_C}\right)$$



La forza aeroelastica è  $\mathbf{F} = F_d \mathbf{a}_d + F_l \mathbf{a}_l$ ,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho_a U_r D \ell (\mathbf{U}_r C_d(\beta) + \mathbf{a}_z \times \mathbf{U}_r C_l(\beta))$$

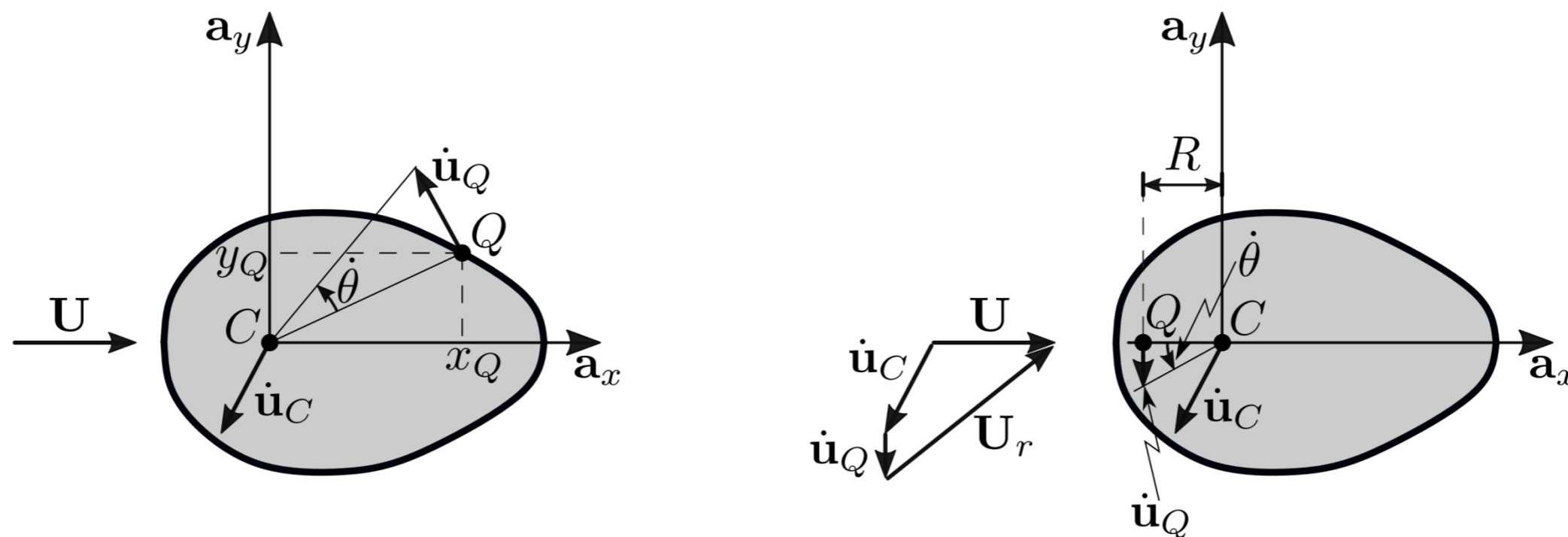
Le forze vanno poi proiettate sulla base  $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y)$ ; insieme alla coppia, si scrivono

$$F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_x = \frac{1}{2} \rho_a U_r D \ell [C_d(\beta) (U - \dot{u}_C) + C_l(\beta) \dot{u}_C]$$

$$F_y = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_y = \frac{1}{2} \rho_a U_r D \ell [-C_d(\beta) \dot{u}_C + C_l(\beta) (U - \dot{u}_C)]$$

$$C_z = \frac{1}{2} \rho_a U_r^2 D^2 \ell C_m(\beta)$$

# La teoria quasi-stazionaria di secondo livello: la congettura del raggio medio



$$\mathbf{U}_r := \mathbf{U} - (\dot{\mathbf{u}}_C + \dot{\mathbf{u}}_Q) = \left( U - \dot{u}_C + y_Q \dot{\theta} \right) \mathbf{a}_x - \left( \dot{v} + x_Q \dot{\theta} \right) \mathbf{a}_y$$

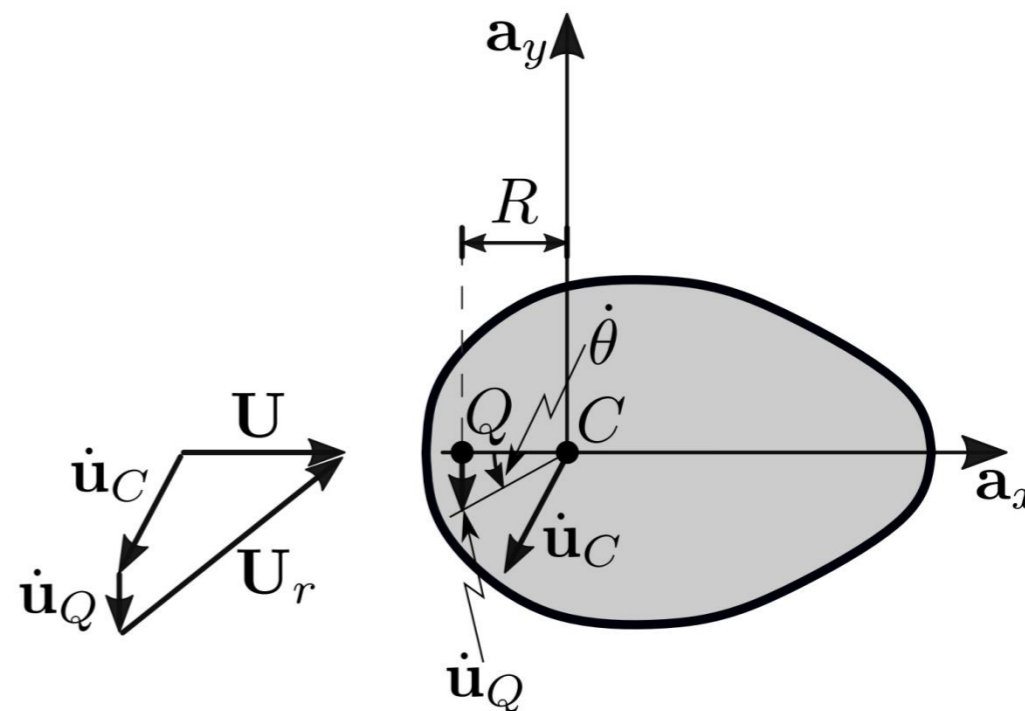
l'angolo di attacco

$$\beta = -\theta - \arctan \left( \frac{\dot{v}_C + x_Q \dot{\theta}}{U - \dot{u}_C + y_Q \dot{\theta}} \right)$$

La scelta del punto  $Q$ , come si è detto, è arbitraria. Se si fa riferimento ad una sezione compatta, il cui centro di torsione sia vicino al baricentro, è stato proposto in letteratura di assumere  $Q \in \mathbf{a}_x$ , ad una distanza dal centro  $x_Q = -R$  (sopravento rispetto a  $C$ ), con  $R$  raggio medio, della sezione . Con questa scelta, le precedenti si scrivono:

$$\mathbf{U}_r = (U - \dot{u}_C) \mathbf{a}_x - (\dot{v}_C - R\dot{\theta}) \mathbf{a}_y$$

$$\beta = -\theta - \arctan \left( \frac{\dot{v}_C - R\dot{\theta}}{U - \dot{u}_C} \right)$$



## Le forze aeroelastiche linearizzate

$$|\dot{\mathbf{u}}_C| \ll U \text{ e } R\dot{\theta} \ll U$$

$$U_r = \sqrt{(U - \dot{u}_C)^2 + (\dot{v}_C - R\dot{\theta})^2} = U - \dot{u}_C + \dots$$

$$\beta = -\theta - \frac{\dot{v}_C}{U} + \frac{R\dot{\theta}}{U} + \dots$$

ed i coefficienti aerodinamici  $C_h(\beta)$  sono:

$$C_h(\alpha) = C_{h_0} + C'_{h_0}\beta + \dots \quad h = d, l, m$$



$$\mathbf{f}^a = \mathbf{f}_0^a - \mathbf{C}_a \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_a \mathbf{q}$$

dove  $\mathbf{f}_0^a := \frac{1}{2} \rho_a U^2 D \ell ( C_{d_0} \quad C_{l_0} \quad C_{m_0} D )^T$  sono le forze agenti sul cilindro fisso

$$\mathbf{C}_a := \frac{1}{2} \rho_a U D \ell \begin{bmatrix} 2C_{d_0} & -C_{l_0} + C'_{d_0} & -C'_{d_0} R \\ 2C_{l_0} & C_{d_0} + C'_{l_0} & -C'_{l_0} R \\ 2C_{m_0} D & C'_{m_0} D & -C'_{m_0} D R \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_a := \frac{1}{2} \rho_a U^2 D \ell \begin{bmatrix} 0 & 0 & C'_{d_0} \\ 0 & 0 & C'_{l_0} \\ 0 & 0 & C'_{m_0} D \end{bmatrix}$$

## L'analisi lineare di stabilità

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_s + U\mathbf{B})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_s + U^2\mathbf{H})\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}_a =: U\mathbf{B}, \quad \mathbf{K}_a =: U^2\mathbf{H}$$

Per esteso, si ha:

$$M \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_G \\ 0 & 1 & x_G \\ -y_G & x_G & r_C^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_C \\ \ddot{v}_C \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_x + Ub_{11} & Ub_{12} & Ub_{13} \\ Ub_{21} & c_y + Ub_{22} & Ub_{23} \\ Ub_{31} & Ub_{32} & c_\theta + Ub_{33} \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{v}_C \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & U^2 h_{13} \\ 0 & k_y & U^2 h_{23} \\ 0 & 0 & k_\theta + U^2 h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ v_C \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



dove:

$$b_{11} := \rho_a D \ell C_{d_0},$$

$$b_{12} := \frac{1}{2} \rho_a D \ell (-C_{l_0} + C'_{d_0}),$$

$$b_{13} := -\frac{1}{2} \rho_a D \ell C'_{d_0} R,$$

$$h_{13} := \frac{1}{2} \rho_a D \ell C'_{d_0},$$

$$b_{21} := \rho_a D \ell C_{l_0},$$

$$b_{22} := \frac{1}{2} \rho_a D \ell (C_{d_0} + C'_{l_0}),$$

$$b_{23} := -\frac{1}{2} \rho_a D \ell C'_{l_0} R,$$

$$h_{23} := \frac{1}{2} \rho_a D \ell C'_{l_0}$$

$$b_{31} := \rho_a D^2 \ell C_{m_0},$$

$$b_{32} := \frac{1}{2} \rho_a D^2 \ell C'_{m_0},$$

$$b_{33} := -\frac{1}{2} \rho_a D^2 \ell C'_{m_0} R,$$

$$h_{33} := \frac{1}{2} \rho_a D^2 \ell C'_{m_0}$$

## Le sezioni simmetriche rispetto al flusso

$$C_{l_0} = C_{m_0} = C'_{d_0} = 0$$

$$M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_G \\ 0 & x_G & r_C^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_C \\ \ddot{v}_C \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_x + Ub_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_y + Ub_{22} & Ub_{23} \\ 0 & Ub_{32} & c_\theta + Ub_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{v}_C \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & U^2 h_{23} \\ 0 & 0 & k_\theta + U^2 h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ v_C \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il moto  $u_C(t)$  nella direzione di simmetria  $a_x$ , è dunque disaccoppiato da quello roto-traslazionale,  $v_C(t), \theta(t)$ .

# Le biforcazioni dinamiche

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u} \exp(\lambda t)$$

$$[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda (\mathbf{C}_s + U \mathbf{B}) + (\mathbf{K}_s + U^2 \mathbf{H})] \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\lambda_c = \pm i \omega_c$$

$$[-\omega_c^2 \mathbf{M} + i \omega_c (\mathbf{C}_s + U_c \mathbf{B}) + (\mathbf{K}_s + U_c^2 \mathbf{H})] \mathbf{u}_c = \mathbf{0}$$

# I moti unidirezionali: il galoppo e la divergenza rotazionali

## Il moto parallelo al flusso

Se è  $v_C = \theta = 0$ , il cilindro può muoversi solo parallelamente al flusso, nella direzione  $a_x$ . L'equazione del moto è:

$$M\ddot{u}_C + (c_x + Ub_{11})\dot{u}_C + k_x u_C = 0$$

in cui  $b_{11} := \rho_a D \ell C_{d_0}$ . Poiché  $C_{d_0} > 0$ , l'effetto del vento è stabilizzante. Non si verifica dunque alcuna biforcazione aeroelastica. Le oscillazioni conseguenti ad una perturbazione iniziale decadono in ampiezza nel tempo con legge esponenziale.

# I moti unidirezionali: il galoppo e la divergenza rotazionali

## Il galoppo trasversale al flusso

Se è  $u_C = \theta = 0$ , il cilindro può muoversi solo trasversalmente al vento.

$$M\ddot{v}_C + (c_y + Ub_{22})\dot{v}_C + k_y v_C = 0$$

in cui  $b_{22} := \frac{1}{2}\rho_a D\ell (C_{d_0} + C'_{l_0})$ . La condizione di biforcazione (galoppo) si verifica quando  $U = U_c := -\frac{b_{22}}{c_y}$ , dettata dal criterio di Den Hartog. La biforcazione, come si osservò, ha luogo solo se  $b_{22} < 0$ .

$$\underline{U_c := -\frac{b_{22}}{c_y}}$$



## Il galoppo e la divergenza torsionali

Se è  $u_C = v_C = 0$ , se cioè il cilindro può solo ruotare intorno al proprio asse, l'equazione del moto si scrive:

$$Mr_C^2 \ddot{\theta} + (c_\theta + Ub_{33}) \dot{\theta} + (k_\theta + U^2 h_{33}) \theta = 0$$

in cui  $b_{33} := -\frac{1}{2} \rho_a D^2 R \ell C'_{m_0}$  e  $h_{33} := \frac{1}{2} \rho_a D^2 \ell C'_{m_0}$ . Si considerano due casi.

- Il raggio medio  $R$  è preso uguale a zero (teoria quasi-stazionaria di primo livello). Poiché l'azione aeroelastica non altera lo smorzamento strutturale, non può manifestarsi alcuna biforcazione dinamica. Al contrario, poiché il flusso modifica la rigidità strutturale, se le forze aeroelastiche sono di tipo instabilizzante, può verificarsi una biforcazione statica, detta di *divergenza rotazionale* (o torsionale ).

$$U_c = \sqrt{\frac{2k_\theta}{\rho_a D^2 \ell |C'_{m_0}|}}, \quad C'_{m_0} < 0$$

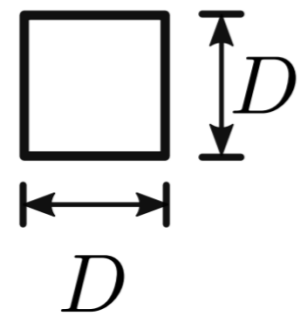
Se invece è  $C'_{m_0} > 0$ , l'azione aeroelastica *statica* è stabilizzante.

- Il raggio medio  $R$  è preso diverso da zero (teoria quasi-stazionaria di secondo livello). Poiché le forze aeroelastiche modificano lo smorzamento strutturale, si verifica instabilità dinamica all'annullarsi dello smorzamento torsionale totale, in modo formalmente analogo a quanto accade nel galoppo trasversale. Il fenomeno è detto di *galoppo rotazionale* (o torsionale), e si verifica alla velocità critica  $U_c := -\frac{c_\theta}{b_{33}}$ , ovvero:

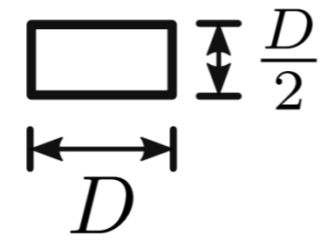
$$U_c := \frac{4\xi_\theta \sqrt{k_\theta M r_C^2}}{\rho_a D^2 R l C'_{m_0}}, \quad C'_{m_0} > 0$$

Se invece è  $C'_{m_0} < 0$ , l'azione aeroelastica *dinamica* è stabilizzante.

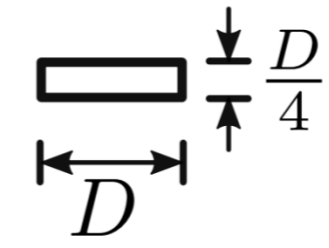
# Valori numerici dei coefficienti di momento



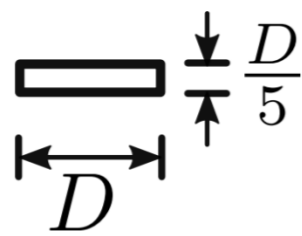
$$C'_{m_0} = 0.18$$



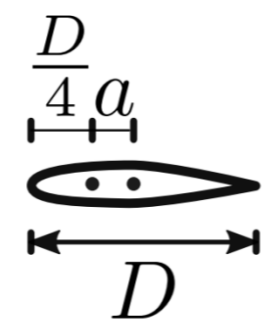
$$C'_{m_0} = 0.16$$



$$C'_{m_0} = 1.125$$



$$C'_{m_0} = 1.04$$



$$C'_{m_0} = -\frac{2\pi a}{D}$$

**Tabella** Valori di  $C'_{m_0}$  per diverse sezioni di un cilindro lungo, soggetto a flusso incidente secondo l'orizzontale in figura; valori positivi indicano sezioni dinamicamente instabili (soggette a galoppo); valori negativi denotano sezioni staticamente instabili (soggette a divergenza).

# Il galoppo traslazionale a due gradi di libertà

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_C \\ \ddot{v}_C \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_x \omega_x + U \frac{b_{11}}{M} & U \frac{b_{12}}{M} \\ U \frac{b_{21}}{M} & 2\xi_y \omega_y + U \frac{b_{22}}{M} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{v}_C \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x^2 & 0 \\ 0 & \omega_y^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ v_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottenute introducendo le seguenti frequenze naturali e fattori di smorzamento:

$$\omega_x := \sqrt{\frac{k_x}{M}}, \quad \omega_y := \sqrt{\frac{k_y}{M}}, \quad \xi_x := \frac{c_x}{2M\omega_x}, \quad \xi_y := \frac{c_y}{2M\omega_y}$$

## La soluzione esatta

Posto  $(u_C, v_C) = (\hat{u}_C, \hat{v}_C) \exp(\lambda t)$ , si perviene al problema agli autovalori:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + (2\xi_s \omega_x + U \frac{b_{11}}{M}) \lambda + \omega_x^2 & \lambda U \frac{b_{12}}{M} \\ \lambda U \frac{b_{21}}{M} & \lambda^2 + (2\xi_s \omega_y + U \frac{b_{22}}{M}) \lambda + \omega_y^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_C \\ \hat{v}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica si scrive:

$$\lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4 = 0$$

dove i coefficienti  $p_i = p_i(U)$  sono polinomi così definiti:

$$p_1 := 2\xi_s (\omega_x + \omega_y) + U \left( \frac{b_{11}}{M} + \frac{b_{22}}{M} \right)$$

$$p_2 := \omega_x^2 + \omega_y^2 + \left( 2\xi_s \omega_x + U \frac{b_{11}}{M} \right) \left( 2\xi_s \omega_y + U \frac{b_{22}}{M} \right) - U^2 \frac{b_{12}}{M} \frac{b_{21}}{M}$$

$$p_3 := 2\xi_s (\omega_x \omega_y^2 + \omega_y \omega_x^2) + U \left( \frac{b_{11}}{M} \omega_y^2 + \frac{b_{22}}{M} \omega_x^2 \right)$$

$$p_4 := \omega_x^2 \omega_y^2$$

Nello stato critico è  $\lambda = i\omega_c$  e  $U = U_c$ . L'equazione caratteristica si spezza in due equazioni reali, che, in forma esplicita, si scrivono:

$$\omega_c^4 - (\omega_x^2 + \omega_y^2 + f(U_c)) \omega_c^2 + \omega_x^2 \omega_y^2 = 0$$

$$\omega_c \left[ (\omega_y^2 - \omega_c^2) \left( 2\xi_s \omega_x + U_c \frac{b_{11}}{M} \right) + (\omega_x^2 - \omega_c^2) \left( 2\xi_s \omega_y + U_c \frac{b_{22}}{M} \right) \right] = 0$$

dove:

$$f(U_c) := \left( 2\xi_s \omega_x + U_c \frac{b_{11}}{M} \right) \left( 2\xi_s \omega_y + U_c \frac{b_{22}}{M} \right) - U_c^2 \frac{b_{12}}{M} \frac{b_{21}}{M}$$

La coppia di radici reali  $U_c, \omega_c$  con più piccola  $U_c$ , determina lo stato critico.

# Il flutter ed il galoppo roto-traslazionali

Se il cilindro, soggetto a vento nella direzione  $a_x$ , può ruotare e traslare nelle direzione trasversale al flusso, ma non può traslare nella direzione parallela al flusso, il sistema possiede due gradi di libertà,  $v_C(t)$ ,  $\theta(t)$ , e le equazioni del moto si riducono:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_G \\ \frac{x_G}{r_C^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{v}_C \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_y\omega_y + U\frac{b_{22}}{M} & U\frac{b_{23}}{M} \\ U\frac{b_{32}}{Mr_C^2} & 2\xi_\theta\omega_\theta + U\frac{b_{33}}{Mr_C^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y^2 & U^2\frac{h_{23}}{M} \\ 0 & \omega_\theta^2 + U^2\frac{h_{33}}{Mr_C^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove si è posto:

$$\omega_y := \sqrt{\frac{k_y}{M}}, \quad \omega_\theta := \sqrt{\frac{k_\theta}{Mr_C^2}}, \quad \xi_y := \frac{c_y}{2M\omega_y}, \quad \xi_\theta := \frac{c_\theta}{2Mr_C^2\omega_\theta}$$



## L'aeroelasticità stazionaria

$$\begin{bmatrix} 1 & x_G \\ \frac{x_G}{r_C^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{v}_C \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y^2 & U^2 \frac{h_{23}}{M} \\ 0 & \omega_\theta^2 + U^2 \frac{h_{33}}{Mr_C^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posta la soluzione quale  $(v_C, \theta) = (\hat{v}_C, \hat{\theta}) \exp(\lambda t)$ , dalle equazioni del moto si trae il problema algebrico agli autovalori:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + \omega_y^2 & \lambda^2 x_G + U^2 \frac{h_{23}}{M} \\ \lambda^2 \frac{x_G}{r_C^2} & \lambda^2 + \omega_\theta^2 + U^2 \frac{h_{33}}{Mr_C^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_C \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui equazione caratteristica è:

$$p_0 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_4 = 0$$

dove:

$$p_0 := 1 - \frac{x_G^2}{r_C^2}$$

$$p_2 := \omega_y^2 + \omega_\theta^2 + \frac{U^2}{Mr_C^2} (h_{33} - x_G h_{23})$$

$$p_4 := \omega_y^2 \left( \omega_\theta^2 + U^2 \frac{h_{33}}{Mr_C^2} \right)$$

Quando è  $U = 0$ , poiché matrici di massa e rigidezza elastica sono definite positive, si hanno quattro radici immaginarie pure, a coppie complesse coniugate, per cui il sistema è marginalmente stabile. Al crescere di  $U$ , le radici si avvicinano a due a due, collidono e si separano, due a sinistra (autovalori stabili) e due a destra (autovalori instabili). All'atto della coalescenza degli autovalori si verifica dunque una biforcazione di Hopf circolatoria (flutter). La corrispondente velocità del vento  $U_c$  soddisfa la condizione di annullamento del discriminante dell'equazione caratteristica,  $\Delta := p_2^2 - 4p_0p_4 = 0$ , ovvero:

$$\left[ \omega_y^2 + \omega_\theta^2 + \frac{U_c^2}{Mr_C^2} (h_{33} - x_G h_{23}) \right]^2 - 4\omega_y^2 \left( 1 - \frac{x_G^2}{r_C^2} \right) \left( \omega_\theta^2 + U_c^2 \frac{h_{33}}{Mr_C^2} \right) = 0 \quad (11.113)$$

Questa è un'equazione biquadratica in  $U_c$ , che può essere risolta in forma chiusa.

**Il caso**  $C'_{m_0} = 0$

$$U_c^0 = \sqrt{\frac{Mr_C}{x_G h_{23}} \left[ r_C (\omega_y^2 + \omega_\theta^2) - 2\omega_y \omega_\theta \sqrt{r_C^2 - x_G^2} \right]}, \quad x_G \neq 0$$

## L'aeroelasticità quasi-stazionaria

Il problema agli autovalori associato diviene:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda \left( 2\xi_y \omega_y + U \frac{b_{22}}{M} \right) + \omega_y^2 & \lambda^2 x_G + \lambda U \frac{b_{23}}{M} + U^2 \frac{h_{23}}{M} \\ \lambda^2 \frac{x_G}{r_C^2} + \lambda U \frac{b_{32}}{M r_C^2} & \lambda^2 + \lambda \left( 2\xi_\theta \omega_\theta + U \frac{b_{33}}{M r_C^2} \right) + \omega_\theta^2 + U^2 \frac{h_{33}}{M r_C^2} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_C \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Annullando il determinante della matrice dei coefficienti, si ottiene l'equazione caratteristica, del tipo:

$$p_0 \lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4 = 0$$

La presenza delle potenze dispari di  $\lambda$  modifica il meccanismo di biforcazione. Quando è  $U = 0$ , a causa dello smorzamento strutturale, gli autovalori sono due coppie di complessi coniugati con parte reale negativa; il sistema, cioè, è asintoticamente stabile. Al crescere di  $U$ , può accadere che una coppia attraversi l'asse immaginario, dando luogo ad una *biforcazione di Hopf* generica .



Per determinare la velocità critica alla quale si verifica la biforcazione, si pone  $\lambda = i\omega_c$ ,  $U = U_c$  nell'equazione caratteristica, si separano le parti reale ed immaginaria, e si ottiene:

$$p_0\omega_c^4 - p_2\omega_c^2 + p_4 = 0$$

$$\omega_c (p_3 - p_1\omega_c^2) = 0$$

da cui, eliminando dalla seconda  $\omega_c^2 = \frac{p_3}{p_1}$ , si ricava dalla prima un'equazione polinomiale in  $U_c$ :

$$p_0p_3^2 - p_1p_2p_3 + p_1^2p_4 = 0$$



# Esempio

