



Structural Stability and Limit Analysis of Structures (Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

> **Lezione 21**

Aeroelastic instability
(Stabilità aeroelastica)

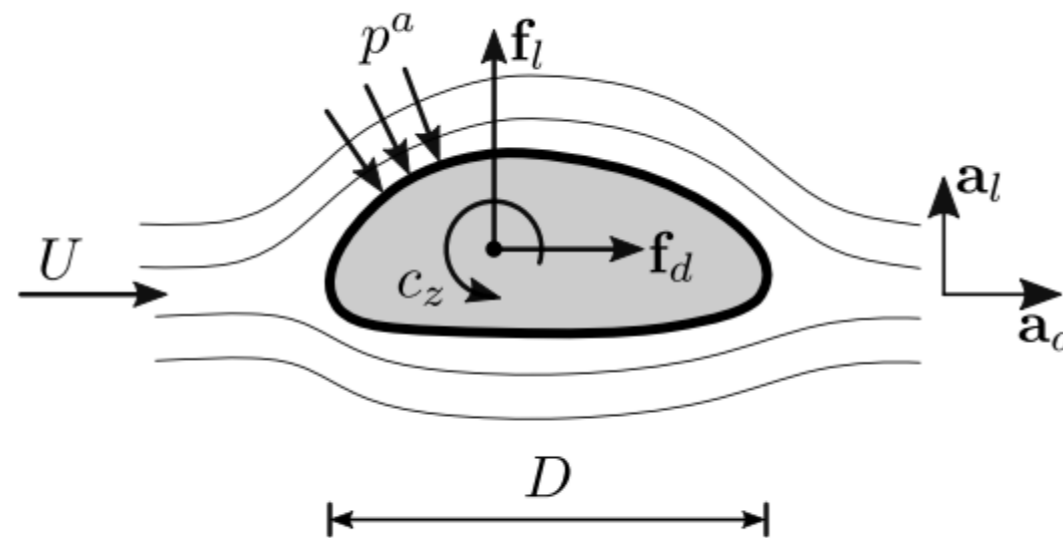
Victor Eremeev

victor.eremeev@unica.it

Le forze aerodinamiche

I corpi elastici investiti dal vento sono soggetti a pressioni superficiali, che possono causare perdita di stabilità. Per illustrare il fenomeno, si consideri dapprima un cilindro *rigido e fisso al suolo*, di asse \mathbf{a}_z , investito da un flusso laminare di velocità $\mathbf{U} = U \mathbf{a}_d$, ortogonale ad \mathbf{a}_z (**Figura a**). Se il cilindro è sufficientemente lungo, è possibile trascurare gli effetti di bordo ed assumere che il campo delle velocità del fluido sia piano, ortogonale ad \mathbf{a}_z . Se la sezione del cilindro ha curva di contorno priva di spigoli, con curvatura lentamente variabile, se cioè la sezione ha ‘forma aerodinamica’, i filetti fluidi restano attaccati al corpo, senza rompersi. In tal caso, dalle equazioni del moto dei fluidi, è possibile determinare il campo delle pressioni normali e tangenziali che agiscono sul corpo, e, per integrazione sul mantello del cilindro, la forza \mathbf{f}^a e la coppia risultante \mathbf{c}^a agenti su una lunghezza unitaria di cilindro. Queste sono dette *forze aerodinamiche*, ed hanno dimensioni fisiche $[\text{MT}^{-2}]$ e $[\text{MLT}^{-2}]$, rispettivamente. Proiettando le forze sulla base $(\mathbf{a}_d, \mathbf{a}_l, \mathbf{a}_z)$, con $\mathbf{a}_l := \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_d$ che completa la terna levogira, si ha:

$$\mathbf{f}^a := f_d \mathbf{a}_d + f_l \mathbf{a}_l, \quad \mathbf{c}^a := c_z \mathbf{a}_z$$

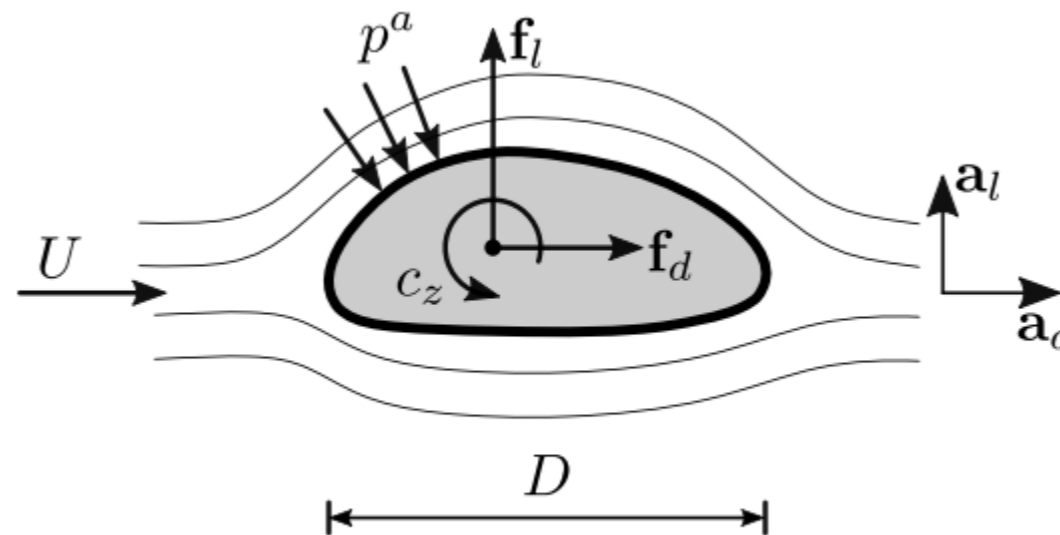


(a)

$$\mathbf{f}^a := f_d \mathbf{a}_d + f_l \mathbf{a}_l, \quad \mathbf{c}^a := c_z \mathbf{a}_z$$

Le componenti f_d, f_l, c_z sono rispettivamente dette:

- *forza di drag* (o di resistenza) f_d , agente nella direzione del flusso e positiva se concorde con questo;
- *forza di lift* (o di portanza) f_l , agente nella direzione ortogonale al flusso, positiva se concorde con $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_d$;
- *coppia aerodinamica* c_z , definita rispetto ad un centro predefinito, e positiva se concorde con \mathbf{a}_z .



(a)

Le tre componenti di forza aerodinamica sono espresse come:

$$f_d = \frac{1}{2} \rho_a U^2 D C_d,$$

$$f_l = \frac{1}{2} \rho_a U^2 D C_l,$$

$$c_z = \frac{1}{2} \rho_a U^2 D^2 C_m$$

in cui: ρ_a è la densità dell'aria, D è una dimensione caratteristica della sezione, $\frac{1}{2} \rho_a U^2$ è la *pressione cinetica*, pari all'energia cinetica per unità di volume del fluido. Inoltre: C_d è il coefficiente di drag, C_l è il coefficiente di lift, C_m è il coefficiente di momento, tutti adimensionali e detti *coefficienti aerodinamici*. Questi dipendono dalla forma della sezione, e, naturalmente, dalla direzione in cui incide il vento.

I coefficienti aerodinamici possono essere determinati analiticamente solo in condizioni affatto particolari, ad esempio per profili alari idealizzati. In quasi tutti i casi è necessario procedere alla loro determinazione sperimentale in galleria del vento. Ciò è tanto più vero, quando si considerino cilindri a sezione *tozza*, aventi spigoli vivi e curvature fortemente variabili

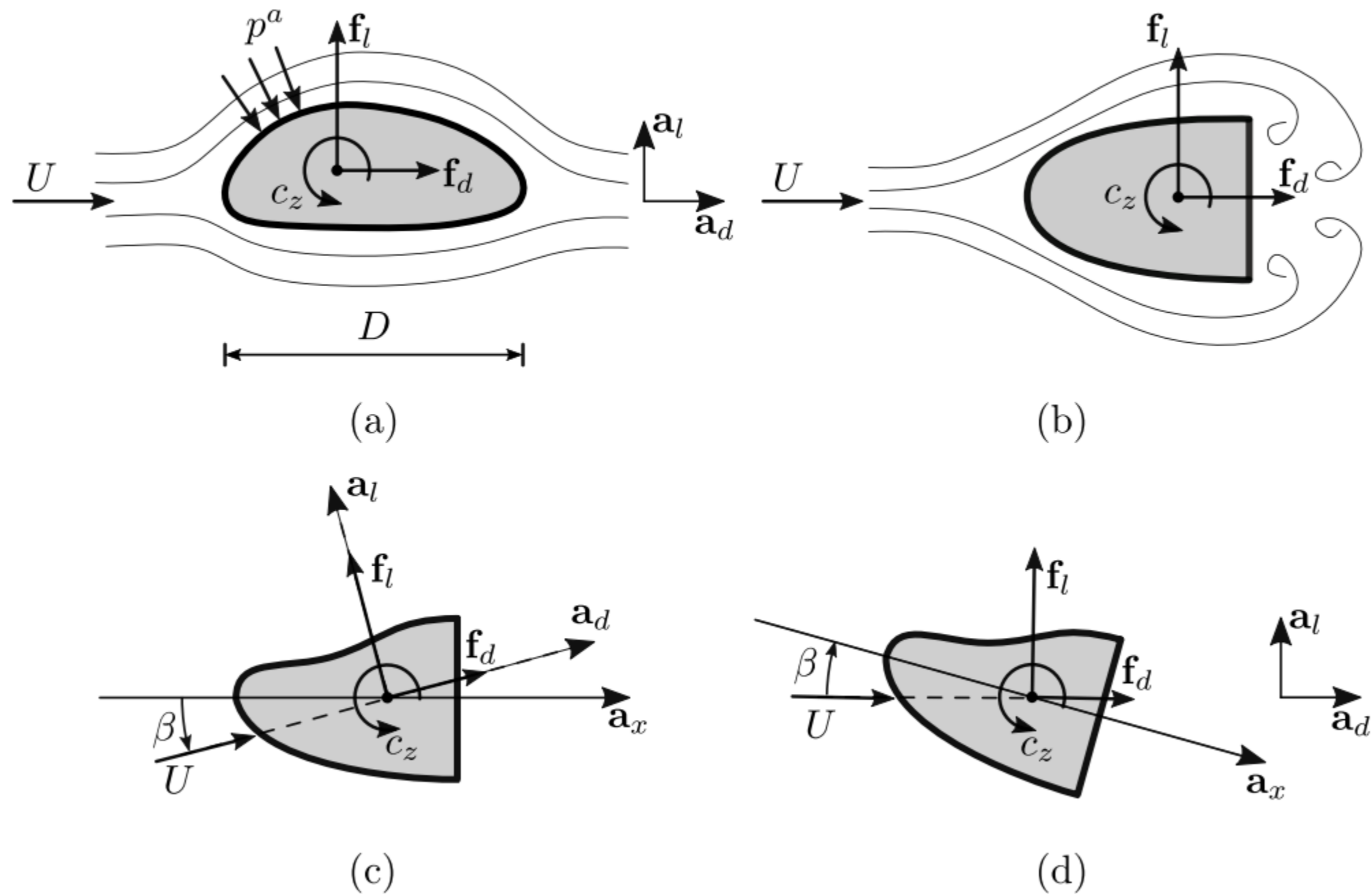
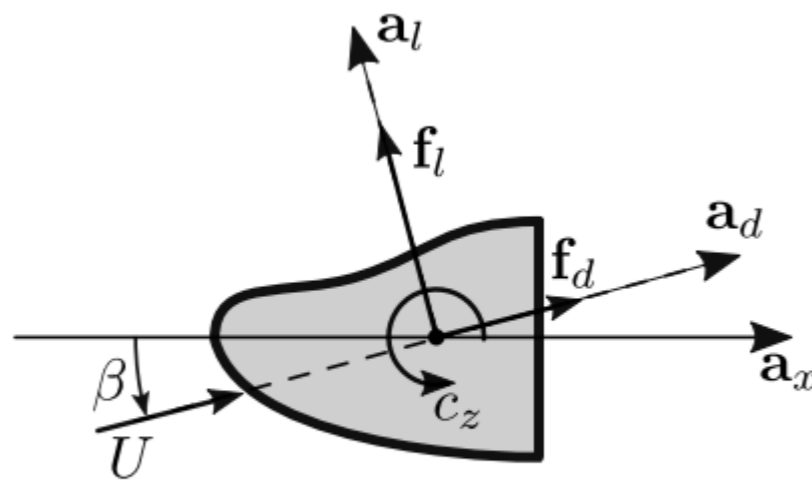


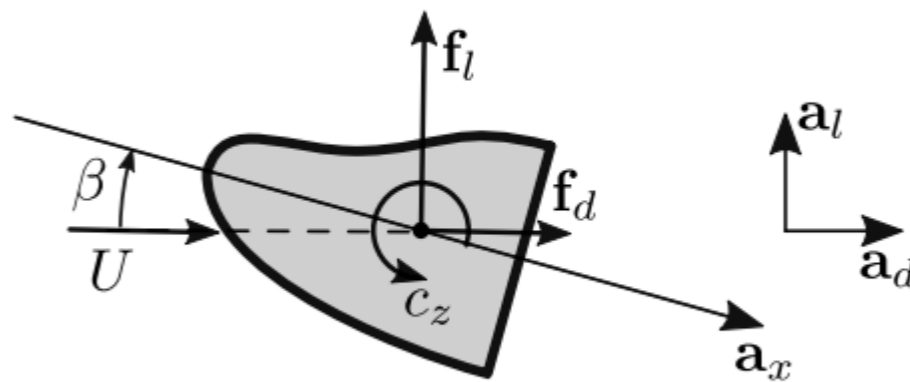
Figura Forze aerodinamiche su cilindro rigido fisso: (a) sezione aerodinamica, (b) sezione tozza, (c) sezione soggetta a vento ruotato di un angolo di attacco $\beta > 0$ (antiorario), (d) sezione ruotata di un angolo $-\beta$, soggetta a vento orizzontale.

L'angolo di attacco

Come si è detto, i coefficienti C_h ($h = d, l, m$) dipendono dalla direzione incidente del vento. Denotato con β l'angolo formato da \mathbf{a}_d con una prefissata direzione materiale \mathbf{a}_x della sezione, positivo se \mathbf{a}_x si sovrappone ad \mathbf{a}_d ruotando in *verso antiorario* di un angolo minore di π (Fig. 11.1-c), ha interesse determinare le leggi $C_h(\beta)$. L'angolo β prende il nome di **angolo di attacco**. Le leggi possono essere determinate in galleria del vento, più facilmente mantenendo fissa la direzione del flusso, e ruotando il cilindro intorno al proprio asse, di un angolo β in verso orario



(c)



(d)

coefficienti aerodinamici

C_d è il coefficiente di drag C_l è il coefficiente di lift C_m è il coefficiente di momento

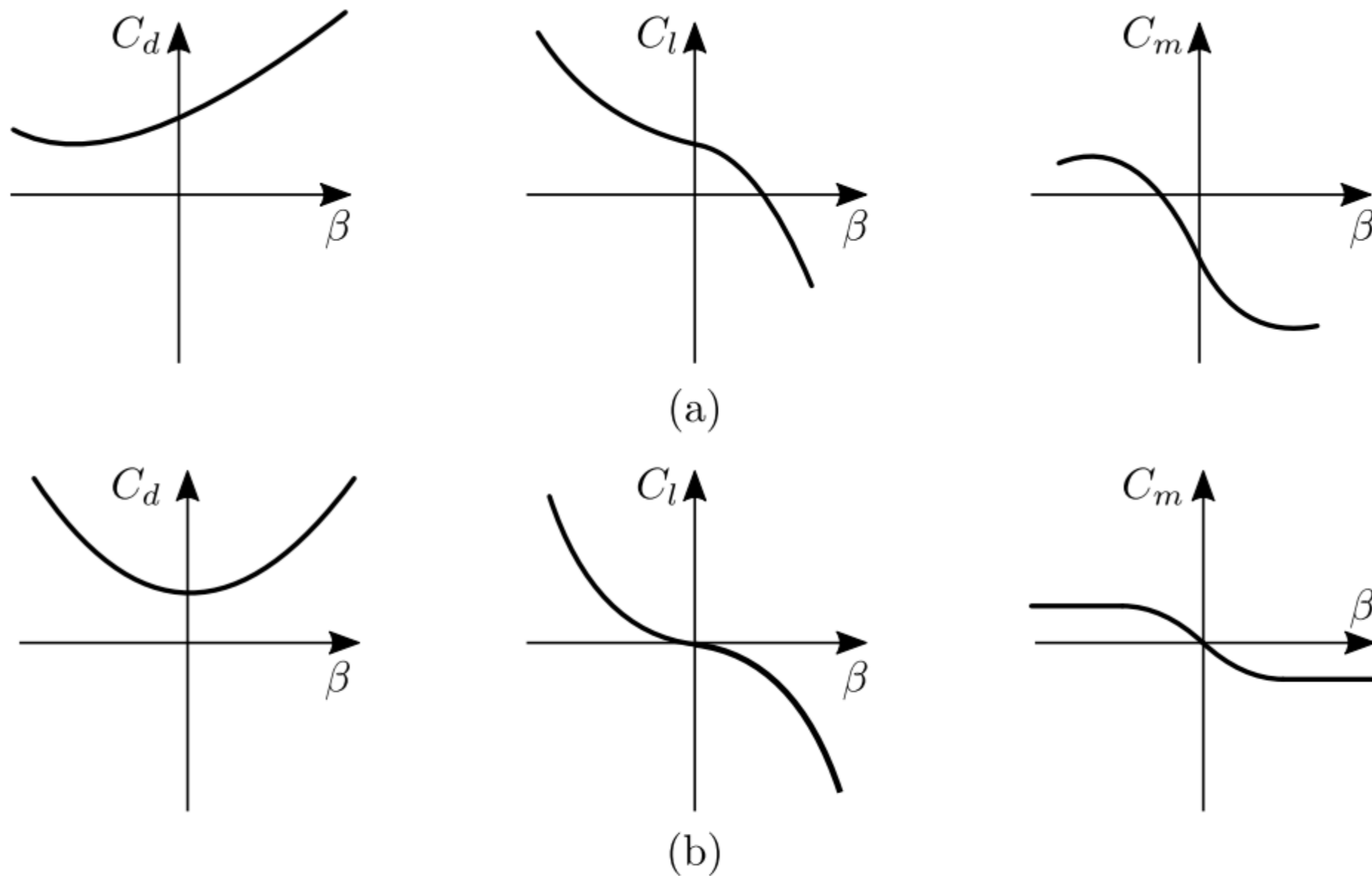


Figura Andamento qualitativo dei coefficienti aerodinamici in funzione dell'angolo di attacco: (a) sezione generica, (b) sezione simmetrica rispetto all'asse $\beta = 0$.

Si osserva che è $C_d > 0$ per ogni β , in quanto il mezzo (l'aria) si oppone sempre alla penetrazione del corpo'. Gli altri due coefficienti, invece, possono essere positivi o negativi. In particolare, se il vento è orizzontale, una forza di portanza positiva indica che l'azione aerodinamica è verso l'alto, come accade per i profili dei velivoli, dove il peso è equilibrato da questa forza. Se invece la portanza è negativa (anche detta *deportanza*), l'azione aerodinamica è verso il basso, talvolta sfruttata in ambito sportivo automobilistico per aumentare l'aderenza degli pneumatici con il suolo.

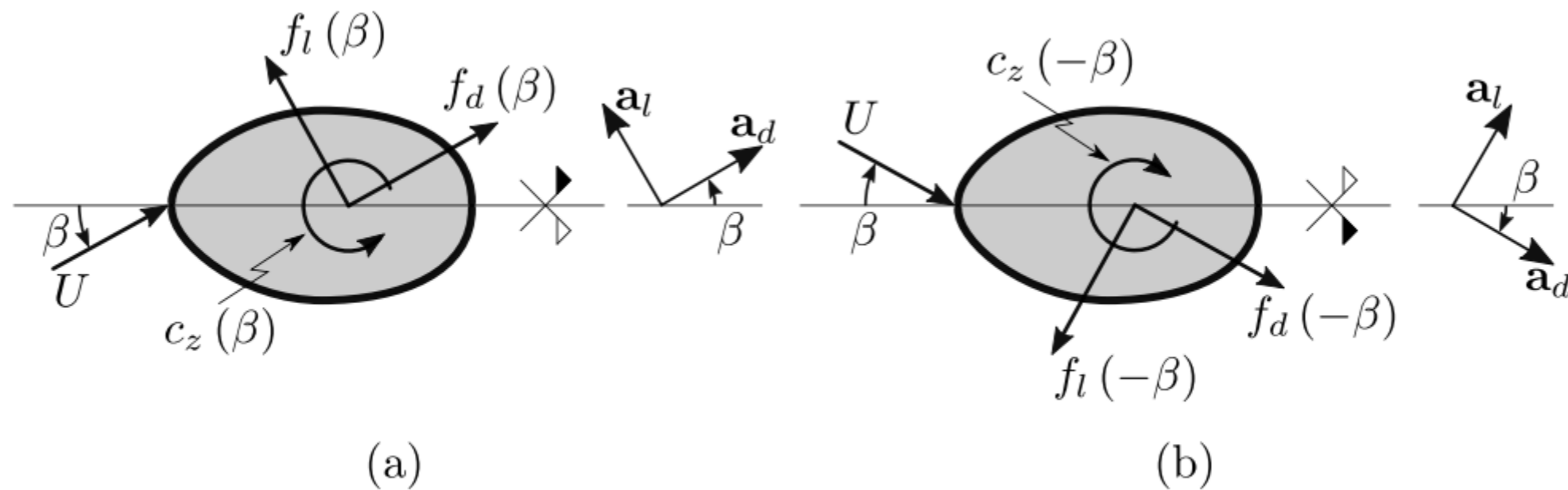


Figura Forze aerodinamiche su sezione simmetrica: (a) condizione generica, (b) ribaltamento intorno all'asse di simmetria.

$C_d(\beta)$ è una funzione simmetrica, e che $C_l(\beta)$, $C_m(\beta)$ sono funzioni antisimmetriche

La teoria quasi-stazionaria

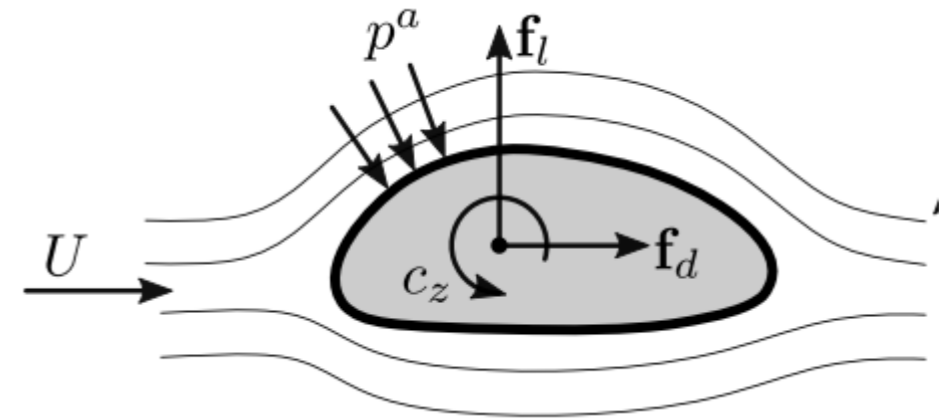
Il problema della determinazione delle forze aerodinamiche risulta molto più complesso quando, sotto l'azione del vento, il cilindro non resta fermo ma vibra, a causa di un'elasticità diffusa, oppure, più semplicemente, concentrata nei vincoli a terra. Accade infatti che l'oscillazione del corpo modifica il flusso; conseguentemente le forze, non più stazionarie, variano nel tempo in funzione della risposta dinamica del corpo, e per questo vengono dette *forze aeroelastiche*. La determinazione delle forze non-stazionarie è problema assai complesso, e non del tutto risolto; si darà un breve cenno su un metodo approssimato, molto impiegato nelle applicazioni. Qui ci si limita ad illustrare una teoria estremamente semplice (e rozza), detta *quasi-stazionaria*, che permette di utilizzare i risultati già descritti nell'analisi sperimentale in galleria del vento.

La teoria quasi-stazionaria si basa sulla seguente congettura: se il corpo si muove lentamente rispetto alle particelle materiali del fluido che lo investe, le forze aeroelastiche all'istante t sono circa le stesse che si misurerebbero in galleria del vento *sul corpo fisso*, sotto un flusso incidente con un angolo di attacco $\beta(t)$ costante, congelato al tempo t . Questo prende il nome di *angolo istantaneo di attacco* $\beta(t)$. Si osservi che, in realtà, l'angolo di attacco si sta modificando nel tempo, a causa della vibrazione del corpo, per cui si sta ignorando la dinamica del fenomeno. In accordo a tale congettura, le forze aeroelastiche sono ancora espresse dalle equazioni , salvo: (a) sostituire la velocità assoluta del flusso, U , con la velocità relativa al corpo all'istante t , $U_r(t)$, e, (b) sostituire β con $\beta(t)$, ovvero:

$$f_d = \frac{1}{2} \rho_a U_r^2(t) D C_d(\beta(t)),$$

$$f_l = \frac{1}{2} \rho_a U_r^2(t) D C_l(\beta(t)),$$

$$c_z = \frac{1}{2} \rho_a U_r^2(t) D^2 C_m(\beta(t))$$

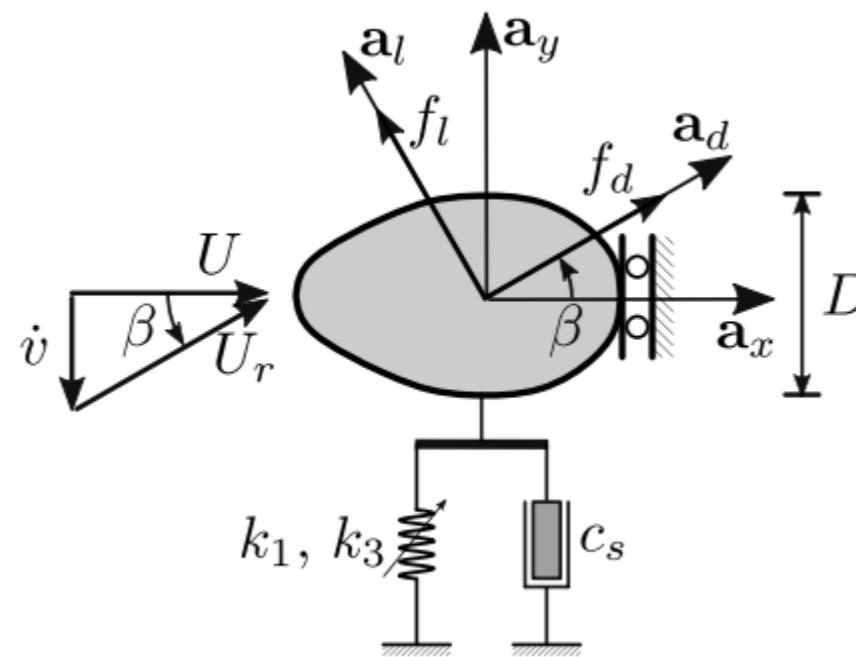


I limiti di applicabilità della teoria quasi-stazionaria

Ci si chiede quando la teoria quasi-stazionaria sia applicabile. Poiché il moto del corpo deve essere lento rispetto a quello del fluido, in modo tale che il corpo appaia ‘quasi fermo’ sulla scala dei tempi in cui si sviluppa il moto del fluido, il periodo naturale della struttura, $T_s = \frac{1}{\nu_s}$, con ν_s la sua frequenza, deve essere grande rispetto al tempo di percorrenza $T_p := \frac{D}{U}$ che una particella fluida, che si muove con velocità U , impiega ad attraversare il corpo di larghezza D . Deve cioè essere $\frac{T_s}{T_p} \gg 1$, ovvero $U_{rid} := \frac{U}{\nu_s D} \gg 1$. La grandezza adimensionale U_{rid} è detta *velocità ridotta*, e deve essere sufficientemente grande perché la teoria quasi-stazionaria sia applicabile. Regole empiriche, dettate in ambito tecnico, indicano come $20 \div 30$ il suo valore minimo. Sfortunatamente accade che, in ingegneria civile, le sezioni trasversali (ad esempio dei ponti) siano molto larghe, per cui la teoria in questione è di dubbia applicazione. La velocità del vento, in questi casi, deve essere molto grande, e la struttura estremamente flessibile (ad esempio un ponte molto lungo) per poter soddisfare le ipotesi della teoria. Le torri e le antenne, invece, ricadono usualmente in tali limiti.

Il galoppo dei sistemi ad un grado di libertà

Si analizza un sistema aeroelastico ad un grado di libertà, la cui perdita di stabilità si manifesta attraverso un fenomeno detto, nella letteratura tecnica, di *galoppo*¹. Il nome è suggerito dalle grandi oscillazioni verticali che, sotto l'azione di vento orizzontale, si osservano nei cavi di trasmissione dell'energia elettrica, in cui le concrezioni di ghiaccio abbiano modificato l'iniziale forma circolare della sezione, facendo dunque nascere forze di portanza.



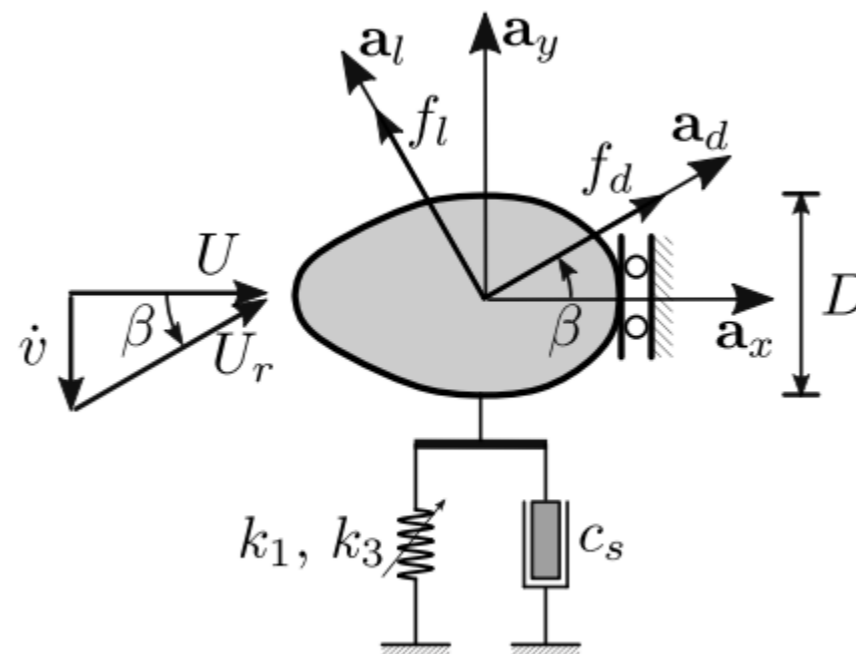
Sistema ad un grado di libertà, soggetto a vento.

Il modello

Si considera un cilindro rigido, di lunghezza ℓ , vincolato in modo da poter solo traslare verticalmente, a cui è applicato un organo visco-elastico, soggetto a vento stazionario orizzontale, di velocità U (**Figura**). L'equazione del moto del corpo si scrive:

$$M\ddot{v} = F_y^{el}(v) + F_y^v(\dot{v}) + F_y^a(\dot{v}; U)$$

dove $v(t)$ è lo spostamento verticale del cilindro ed il punto indica derivazione rispetto al tempo t ; M è la massa del corpo; F_y^{el} è la forza elastica esercitata dal vincolo, dipendente dallo spostamento; F_y^v è la forza viscosa, dipendente dalla velocità strutturale; $F_y^a(\dot{v}; U)$ è la componente verticale della forza aeroelastica, che dipende, oltre che dalla velocità del flusso U , anche dalla velocità strutturale, come si vedrà immediatamente.



Si assume che la molla sia nonlineare, a comportamento simmetrico, di legame costitutivo:

$$F_y^{el} = - (k_1 v + k_3 v^3)$$

in cui $k_1 > 0$ è il coefficiente di rigidità lineare, e $k_3 \geq 0$ è il coefficiente di rigidità cubico. La molla è detta 'hardening' se $k_3 > 0$ (se cioè la forza nonlineare elastica è in modulo maggiore di quella lineare) e 'softening' se $k_3 < 0$. Lo smorzatore viscoso è invece assunto lineare, di costante (strutturale) c_s , per cui:

$$F_y^v = -c_s \dot{v}$$

L'equazione del moto è dunque:

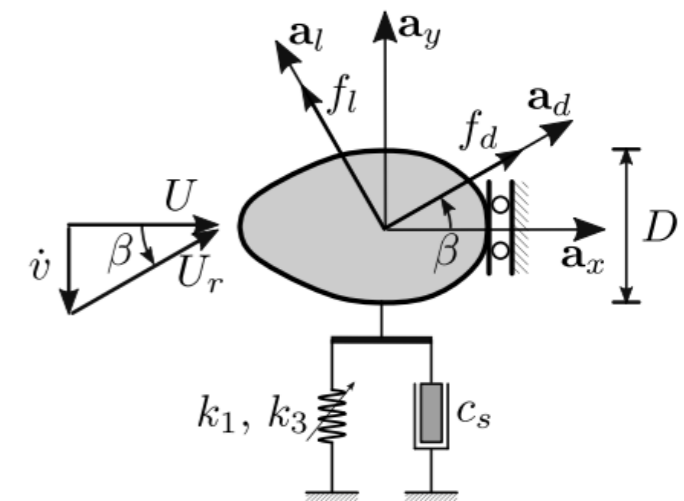
$$\ddot{v} + 2\xi_s \omega_s \dot{v} + \omega_s^2 v + \kappa_s v^3 = \frac{1}{M} F_y^a (\dot{v}; U)$$

in cui $\omega_s := \sqrt{\frac{k_1}{M}}$ è la frequenza circolare della struttura non smorzata, $\xi_s := \frac{c_s}{2\omega_s M}$ è il fattore di smorzamento strutturale, e $\kappa_s := \frac{k_3}{M}$ è un coefficiente di nonlinearità strutturale.

La forza aeroelastica

Per determinare la forza aeroelastica secondo la teoria quasi-stazionaria, occorre determinare il *flusso relativo al corpo* e l'angolo istantaneo di attacco $\beta(t)$, che questo forma al tempo t con la direzione materiale \mathbf{a}_x . Poiché il corpo è in movimento con velocità $\dot{v}\mathbf{a}_y$, esso 'vede' il vento $U\mathbf{a}_x$ non già secondo la direzione orizzontale, ma secondo una direzione \mathbf{a}_d , che segue dalla relazione $U\mathbf{a}_x = U_r\mathbf{a}_d + \dot{v}\mathbf{a}_y$, che esprime la velocità assoluta come somma di quelle relativa e di trascinamento. Posto $\mathbf{a}_d = \cos \beta \mathbf{a}_x + \sin \beta \mathbf{a}_y$, la precedente relazione si scrive $(U - U_r \cos \beta) \mathbf{a}_x - (U_r \sin \beta + \dot{v}) \mathbf{a}_y = 0$, da cui:

$$U_r = \frac{U}{\cos \beta}, \quad \tan \beta = -\frac{\dot{v}}{U}$$



componente verticale di forza

$$F_y^a = f_d \ell \sin \beta + f_l \ell \cos \beta = \frac{1}{2} \rho_a U^2 D \ell C_y(\beta)$$

in cui si è posto:

$$C_y(\beta) := \frac{1}{\cos^2 \beta} [C_d(\beta) \sin \beta + C_l(\beta) \cos \beta]$$

L'analisi lineare di stabilità

Si esegue dapprima un'analisi lineare, sufficiente a determinare l'innescò del fenomeno d'instabilità. Sotto l'ipotesi che la velocità strutturale \dot{v} sia piccola rispetto alla velocità del vento U , dalla

$$\tan \beta = -\frac{\dot{v}}{U} \quad \text{segue che anche l'angolo di attacco}$$

β è piccolo, cosicché, sviluppando in serie le funzioni trigonometriche, può porsi:

$$\beta = -\frac{\dot{v}}{U} + \dots$$

insieme a: $C_y(\beta) = C_l(\beta) + C_d(\beta)\beta$. Espressi anche i coefficienti aerodinamici come sviluppo in serie di punto iniziale $\beta = 0$, si ha:

$$C_h(\beta) = C_{h_0} + C'_{h_0}\beta + \dots, \quad h = d, l$$

dove l'apice indica derivazione rispetto a β ed il sottopedice 0 denota valutazione in $\beta = 0$. Così, C'_{h_0} è la pendenza nell'origine della curva $C_h(\beta)$. In definitiva, linearizzando in β e tenuto conto

$$C_y(\beta) = C_{l_0} - (C_{d_0} + C'_{l_0}) \frac{\dot{v}}{U}$$

L'equazione del moto

$$\ddot{v} + 2\xi_s \omega_s \dot{v} + \omega_s^2 v + \kappa_s v^3 = \frac{1}{M} F_y^a(\dot{v}; U)$$

ignorando tutte le nonlinearità, elastiche ed aeroelastiche, si scrive:

$$\ddot{v} + 2\xi_s \omega_s \dot{v} + \omega_s^2 v = \frac{1}{2} \frac{\rho_a U^2 D \ell}{M} \left[C_{l_0} - (C_{d_0} + C'_{l_0}) \frac{\dot{v}}{U} \right]$$

Si osserva a secondo membro la presenza di una forza statica (indipendente da \dot{v}) ed una forza tempo-variabile (proporzionale a \dot{v}). La prima coincide con quella che si eserciterebbe sul corpo in quiete, e *non* concorre alla stabilità del sistema, ma modifica solo la posizione di equilibrio ; per questo verrà ignorata da qui in avanti. La seconda, invece, essendo proporzionale a \dot{v} , è *formalmente* una forza viscosa, e come tale può essere inglobata in quella di smorzamento strutturale. L'equazione del moto si riscrive dunque:

$$\ddot{v} + 2\omega_s (\xi_s + U\zeta_1) \dot{v} + \omega_s^2 v = 0$$

in cui si è posto:

$$\zeta_1 := \frac{\rho_a D \ell}{4\omega_s M} (C_{d_0} + C'_{l_0})$$

$$\ddot{v} + 2\omega_s (\xi_s + U\zeta_1) \dot{v} + \omega_s^2 v = 0$$

$$\zeta_1 := \frac{\rho_a D \ell}{4\omega_s M} (C_{d_0} + C'_{l_0})$$

Il prodotto $\xi_a := U\zeta_1$ è il *fattore di smorzamento aerodinamico*. Questo contiene due contributi: il coefficiente di drag $C_{d_0} > 0$, che misura la resistenza del mezzo quando il corpo è in quiete, e $C'_{l_0} \gtrless 0$, che misura la pendenza di $C_l(\beta)$ nell'origine. Si possono verificare due casi:

- $C_{d_0} + C'_{l_0} \geq 0$ (cioè (i) $C'_{l_0} \geq 0$, oppure, (ii) $C'_{l_0} < 0$, ma $|C'_{l_0}| \leq C_{d_0}$); in questo caso è $\zeta_1 \geq 0$, cioè lo *smorzamento aerodinamico è stabilizzante* (o neutro), e si somma a quello strutturale; la sezione del cilindro è detta *aerodinamicamente stabile*;
- $C_{d_0} + C'_{l_0} < 0$ (cioè $C'_{l_0} < 0$, ed inoltre $|C'_{l_0}| > C_{d_0}$); in questo caso, lo *smorzamento aerodinamico è instabilizzante*, in quanto si sottrae a quello strutturale; la sezione è detta *aerodinamicamente instabile*.

velocità critica

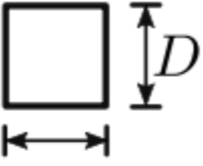
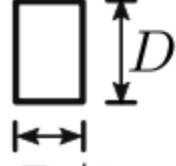
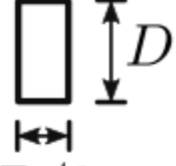
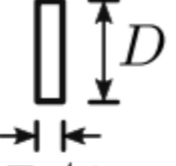
Dalla precedente discussione si evince quanto segue. Affinché possa verificarsi instabilità dell'equilibrio aeroelastico, è necessario che la derivata del coefficiente di lift calcolata in $\beta = 0$ sia: (a) negativa e (b) sufficientemente grande in modulo. Dal momento che lo smorzamento aerodinamico è proporzionale ad U , per le sezioni instabili esiste una velocità critica U_c tale che lo smorzamento totale $\xi_t := \xi_s + U\zeta_1$ si annulla; questa è $U_c := -\frac{\xi_s}{\zeta_1}$, ovvero:

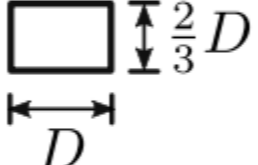
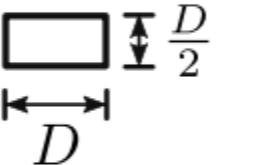
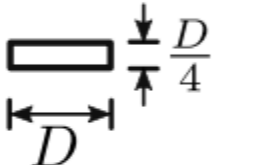
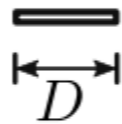
$$U_c = \frac{4\omega_s M}{\rho_a D \ell} \frac{\xi_s}{|C_{d_0} + C'_{l_0}|}, \quad \text{se } C_{d_0} + C'_{l_0} < 0 \quad (11.17)$$

e prende il nome di *velocità critica di galoppo*, o di Den Hartog. Quando $U = U_c$ il sistema possiede una coppia di autovalori puramente immaginari $\lambda = \pm i\omega_s$, con ω_s la frequenza naturale dell'oscillatore, che è in procinto di attraversare l'asse immaginario. Si verifica dunque una biforcazione dinamica, o di *Hopf*.

Quando $U < U_c$ l'equilibrio è asintoticamente stabile, quando $U > U_c$ l'equilibrio è instabile.

Valori numerici del coefficiente aerodinamico di galoppo

			
$C'_{y_0} = -3.0$	$C'_{y_0} = 0$	$C'_{y_0} = 0.5$	$C'_{y_0} = 0.15$

			
$C'_{y_0} = -1.3$	$C'_{y_0} = -2.8$	$C'_{y_0} = 10$	$C'_{y_0} = 6.3$



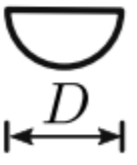
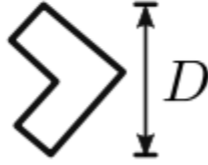
			
$C'_{y_0} = 6.3$	$C'_{y_0} = 0.1$	$C'_{y_0} = 0.5$	$C'_{y_0} = -0.66$

Tabella Valori di $C'_{y_0} := C_{d_0} + C'_{l_0}$ per diverse sezioni di un cilindro lungo, soggetto a flusso laminare, incidente secondo la direzione orizzontale in figura; valori negativi indicano sezioni aerodinamicamente instabili.

L'influenza della orientazione della sezione rispetto al flusso

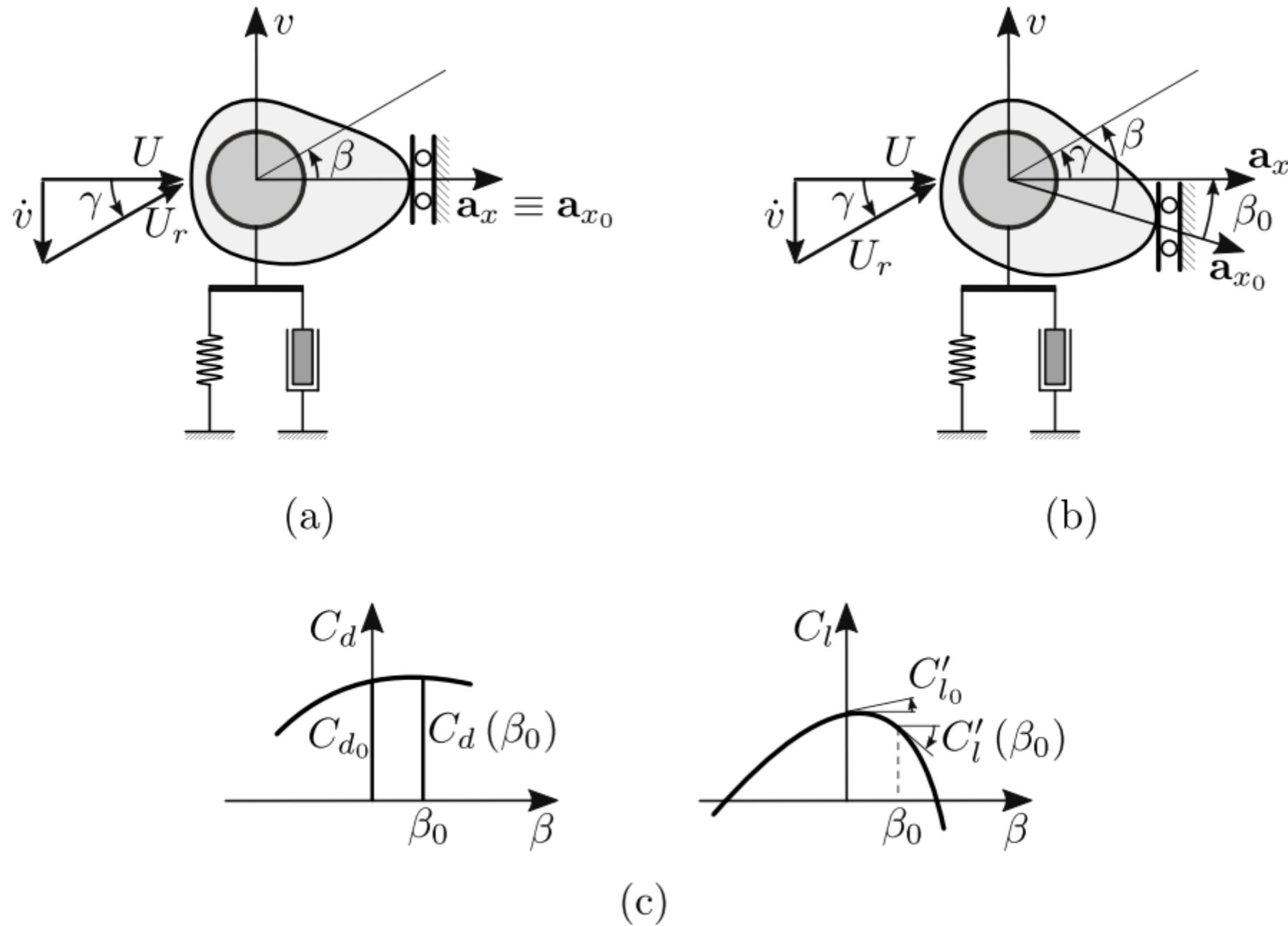


Figura Orientazione della sezione rispetto al flusso orizzontale: (a) asse materiale \mathbf{a}_{x_0} allineato con \mathbf{a}_x ; (b) asse materiale \mathbf{a}_{x_0} deviato di un angolo (orario) $-\beta_0$ da \mathbf{a}_x ; (c) coefficienti aerodinamici valutati in β_0 (relativi all'orientazione $-\beta_0$ della sezione).



L'analisi nonlineare: il ciclo limite

L'analisi lineare fornisce il valore critico U_c al quale la posizione di equilibrio perde di stabilità. Essa predice oscillazioni esponenzialmente divergenti nella regione instabile, senza tuttavia dare informazioni circa l'esistenza di cicli limite (supercritici o sottocritici) che ne limitino l'ampiezza, e come questi cicli dipendano da U . Per analizzare il problema, occorre effettuare un'analisi nonlineare, che porti in conto sia le nonlinearità strutturali, sia le nonlinearità aeroelastiche.

Pertanto:

$$\beta = -\frac{\dot{v}}{U} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{v}}{U} \right)^3 + \dots,$$

$$C_h(\beta) = C_{h_0} + C'_{h_0}\beta + \frac{1}{2}C''_{h_0}\beta^2 + \frac{1}{6}C'''_{h_0}\beta^3 + \dots, \quad h = d, l$$

fino ai termini cubici

$$C_y(\beta) = C_{l_0} - \left(\frac{\dot{v}}{U} \right) (C_{d_0} + C'_{l_0}) + \left(\frac{\dot{v}}{U} \right)^2 \left(\frac{1}{2}C_{l_0} + C'_{d_0} + \frac{1}{2}C''_{l_0} \right) - \left(\frac{\dot{v}}{U} \right)^3 \left(\frac{1}{2}C_{d_0} + \frac{1}{6}C'_{l_0} + \frac{1}{2}C''_{d_0} + \frac{1}{6}C'''_{l_0} \right)$$

Conseguentemente, la forza aeroelastica verticale si scrive:

$$F_y = \frac{1}{2} \rho_a U^2 D \ell \left[A_0 - A_1 \frac{\dot{v}}{U} + A_2 \left(\frac{\dot{v}}{U} \right)^2 - A_3 \left(\frac{\dot{v}}{U} \right)^3 + \dots \right]$$

dove

$$\begin{aligned} A_0 &:= C_{l_0}, & A_1 &:= C_{d_0} + C'_{l_0}, \\ A_2 &:= \frac{1}{2} C_{l_0} + C'_{d_0} + \frac{1}{2} C''_{l_0}, & A_3 &:= \frac{1}{2} C_{d_0} + \frac{1}{6} C'_{l_0} + \frac{1}{2} C''_{d_0} + \frac{1}{6} C'''_{l_0} \end{aligned}$$

I coefficienti adimensionali A_i sono pure detti *coefficienti aerodinamici*, e sono direttamente disponibili in letteratura per varie forme di sezione.

Nel caso di sezioni simmetriche, essendo, come si è detto, $C_d(\beta)$ simmetrica e $C_l(\beta)$ antisimmetrica, è $C'_{d_0} = C'''_{d_0} = \dots = 0$, $C_{l_0} = C''_{l_0} = \dots = 0$, da cui $A_0 = A_2 = \dots = 0$, coerentemente con il fatto che F_y deve essere una funzione dispari di $\frac{\dot{v}}{U}$; è dunque:

$$F_y = -\frac{1}{2} \rho_a U^2 D \ell \left[A_1 \frac{\dot{v}}{U} + A_3 \left(\frac{\dot{v}}{U} \right)^3 + \dots \right]$$

L'equazione del moto nonlineare

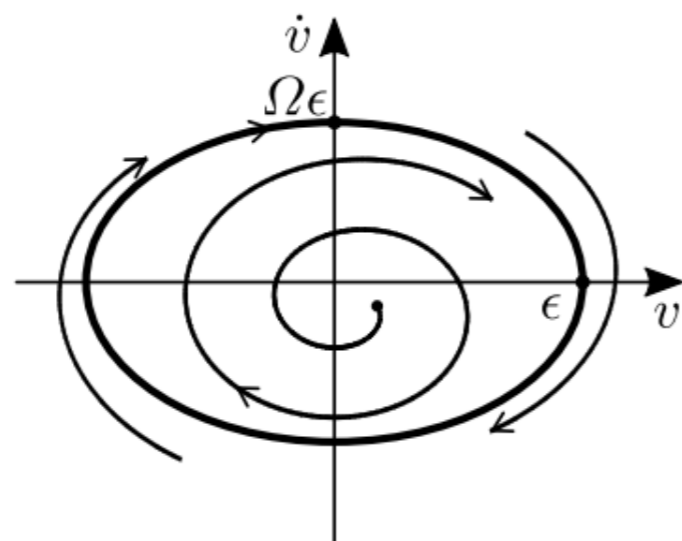
$$\ddot{v} + 2\omega_s (\xi_s + U\zeta_1) \dot{v} + \omega_s^2 v + \kappa_s v^3 + \frac{1}{U} \zeta_3 \dot{v}^3 = 0$$

detta *equazione di Rayleigh-Duffing*

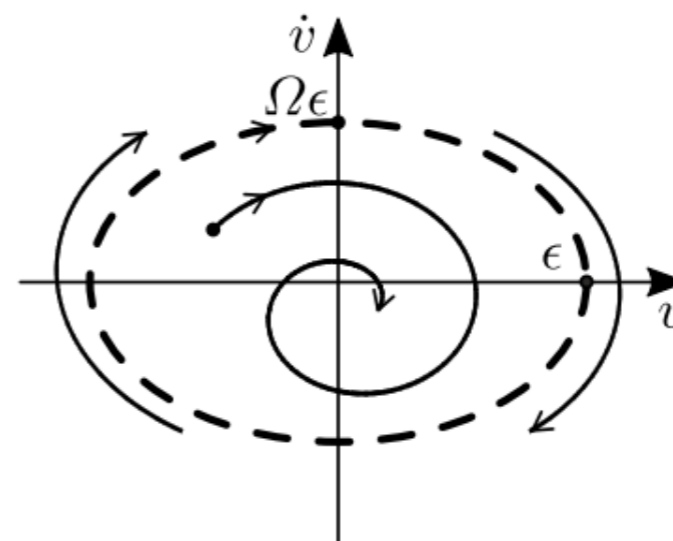
$$\zeta_1 := \frac{\rho_a D \ell}{4\omega_s M} A_1 < 0, \quad \zeta_3 := \frac{\rho_a D \ell}{2M} A_3$$

la soluzione

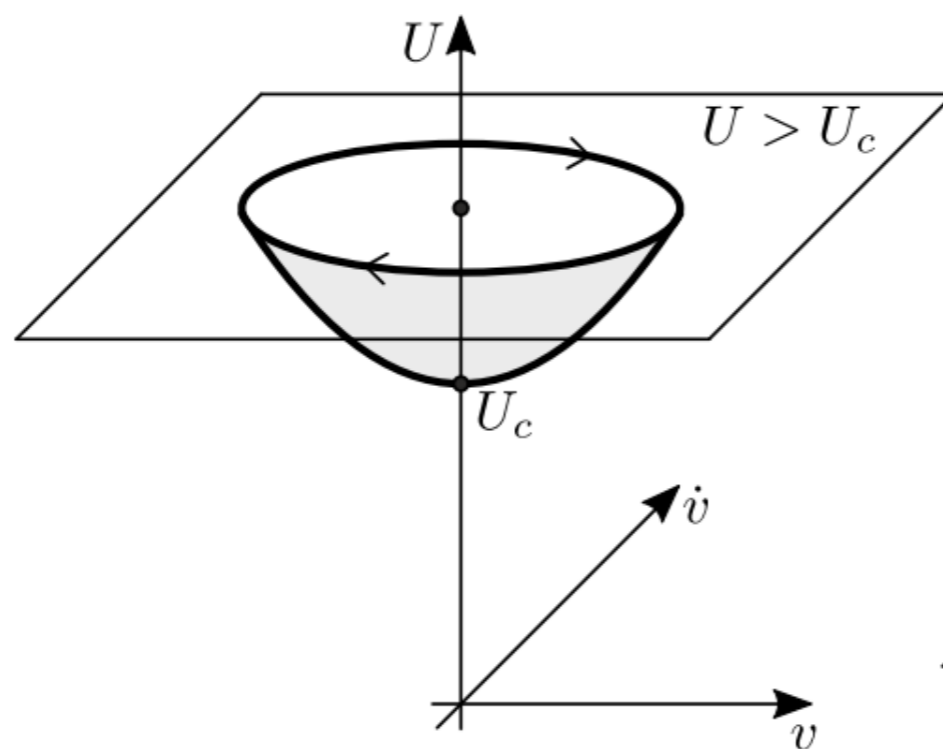
$$v(t; U) = \sqrt{\frac{8U_c |\zeta_1| (U - U_c)}{3\omega_s \zeta_3}} \cos \left(\left(1 + \frac{\kappa_s U_c |\zeta_1| (U - U_c)}{\omega_s^3 \zeta_3} \right) \omega_s t \right)$$



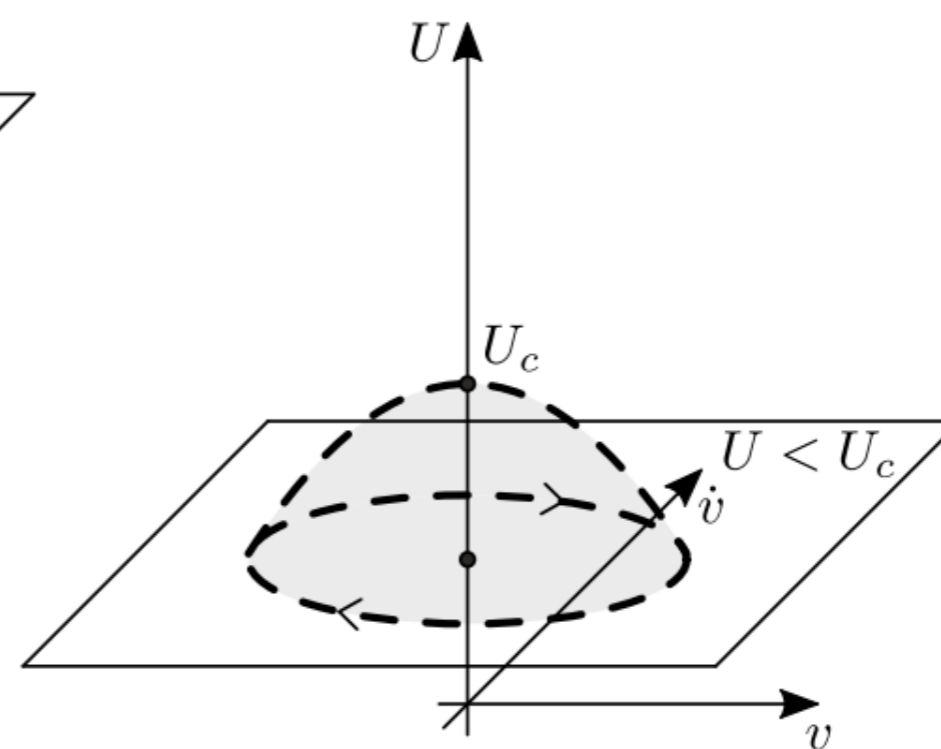
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura Cicli limite per l'equazione di Rayleigh-Duffing: (a) ciclo limite stabile (supercritico); (b) ciclo limite instabile (sottocritico); (c) famiglia di cicli limite stabili, parametrizzata da $U > U_c$; (d) famiglia di cicli limite instabili, parametrizzata da $U < U_c$.

La trave di Eulero-Bernoulli

L'equazione che governa la dinamica trasversale al vento di una trave di Eulero-Bernoulli, soggetta a flusso $U \mathbf{a}_x$, è

$$m\ddot{v} + c_e \dot{v} + \eta I \dot{v}'''' + EI v'''' = f_y^a(z, t)$$

dove: $v = v(z, t)$ è il campo di spostamento, m la densità lineare di massa, c_e lo smorzamento esterno, η lo smorzamento interno, I il momento d'inerzia della sezione rispetto ad \mathbf{a}_x , E il modulo elastico ed f_y^a le forze aeroelastiche per unità di lunghezza, date dalle

$$f_y(z, t) = -\frac{1}{2} \rho_a U^2 D \left[A_1 \frac{\dot{v}(z, t)}{U} + A_3 \left(\frac{\dot{v}(z, t)}{U} \right)^3 + \dots \right]$$

Se la trave è incastrata in A ($z = 0$) e libera in B ($z = \ell$), le condizioni al contorno sono:

$$v(0, t) = 0,$$

$$v'(0, t) = 0,$$

$$\left(E + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) I v''(\ell, t) = 0,$$

$$- \left(E + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) I v'''(\ell, t) = 0$$

Si assume che la trave oscilli con una forma assegnata, sia cioè $v(z, t) = q(t) \phi(z)$. Una possibile scelta consiste nel prendere $\phi(z)$ quale primo modo naturale della trave non smorzata, soluzione del problema agli autovalori:

$$\begin{aligned} EI\phi'''' - m\omega_1^2\phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \quad \phi'(0) = 0, \\ \phi''(\ell) &= 0, \quad \phi'''(\ell) = 0 \end{aligned}$$

Si trova la frequenza $\omega_1 = \frac{1.875^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$ e l'autovettore:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 0.367 \left[\sin\left(1.875 \frac{z}{\ell}\right) - \sinh\left(1.875 \frac{z}{\ell}\right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\cosh\left(1.875 \frac{z}{\ell}\right) - \cos\left(1.875 \frac{z}{\ell}\right) \right], \end{aligned}$$

normalizzato con la condizione $\phi(\ell) = 1$

$$\int_0^\ell [m\ddot{v} + c_e\dot{v} + \eta I\dot{v}'''' + EIv'''' - f_y^a(z, t)] \phi(z) dz = 0$$

si ottiene $M\ddot{q} + (c_s + Ub_1)\dot{q} + k_1q + \frac{1}{U}b_3\dot{q}^3 = 0$

$$M := m \int_0^\ell \phi^2 dz = \frac{1}{4}ml,$$

$$k_1 := EI \int_0^\ell \phi'''' \phi dz = 3.091 \frac{EI}{\ell^3},$$

$$c_s := c_e \int_0^\ell \phi^2 dz + \eta I \int_0^\ell \phi'''' \phi dz = \frac{1}{4}c_e \ell + 3.091 \frac{\eta I}{\ell^3},$$

$$b_1 := \frac{1}{2}\rho_a DA_1 \int_0^\ell \phi^2 dz = \frac{1}{8}\rho_a D \ell A_1$$

$$b_3 := \frac{1}{2}\rho_a DA_3 \int_0^\ell \phi^4 dz = \frac{0.147}{2}\rho_a D \ell A_3$$

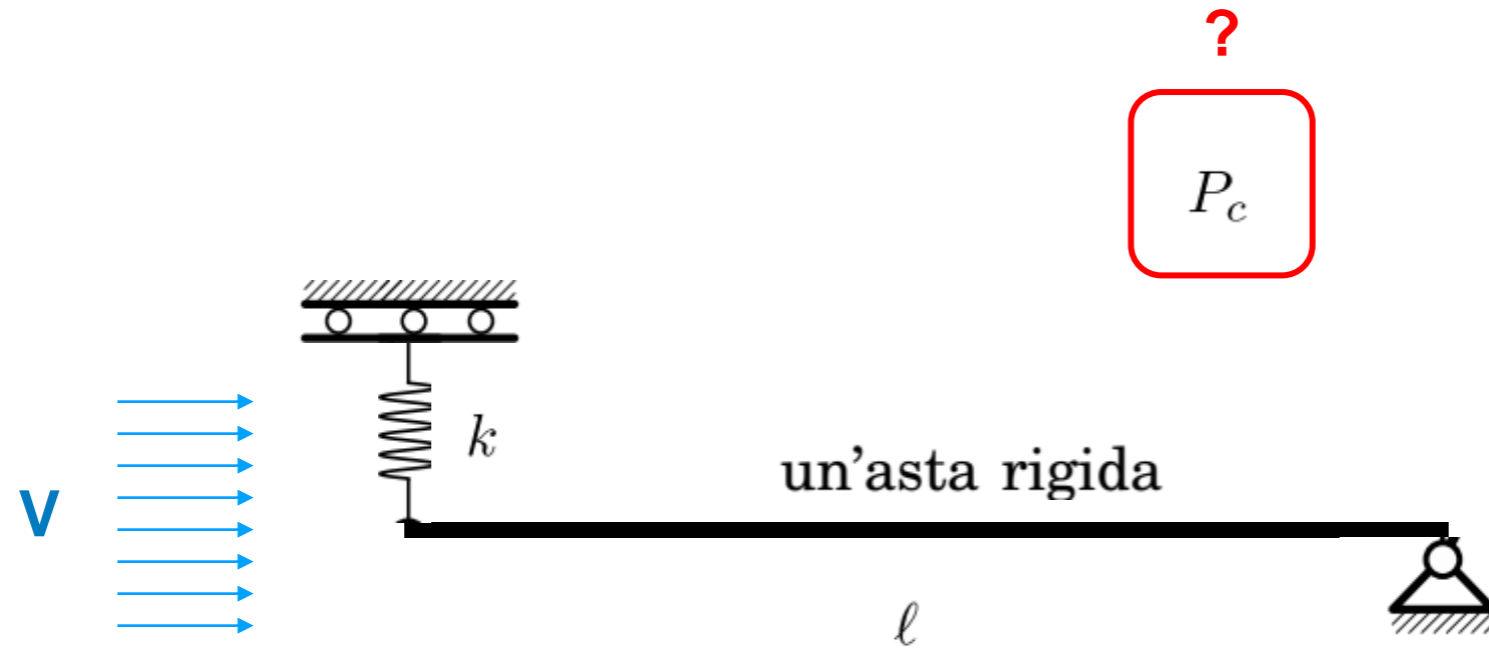
$$\omega_s^2 = \frac{k_1}{M}, \quad \xi_s = \frac{c_s}{2\omega_s M}, \quad \kappa_s = 0, \quad \zeta_1 := \frac{b_1}{2\omega_s M}, \quad \zeta_3 := \frac{b_3}{M}$$

equazione di Rayleigh-Duffing:

$$\ddot{v} + 2\omega_s (\xi_s + U\zeta_1) \dot{v} + \omega_s^2 v + \kappa_s v^3 + \frac{1}{U}\zeta_3 \dot{v}^3 = 0$$

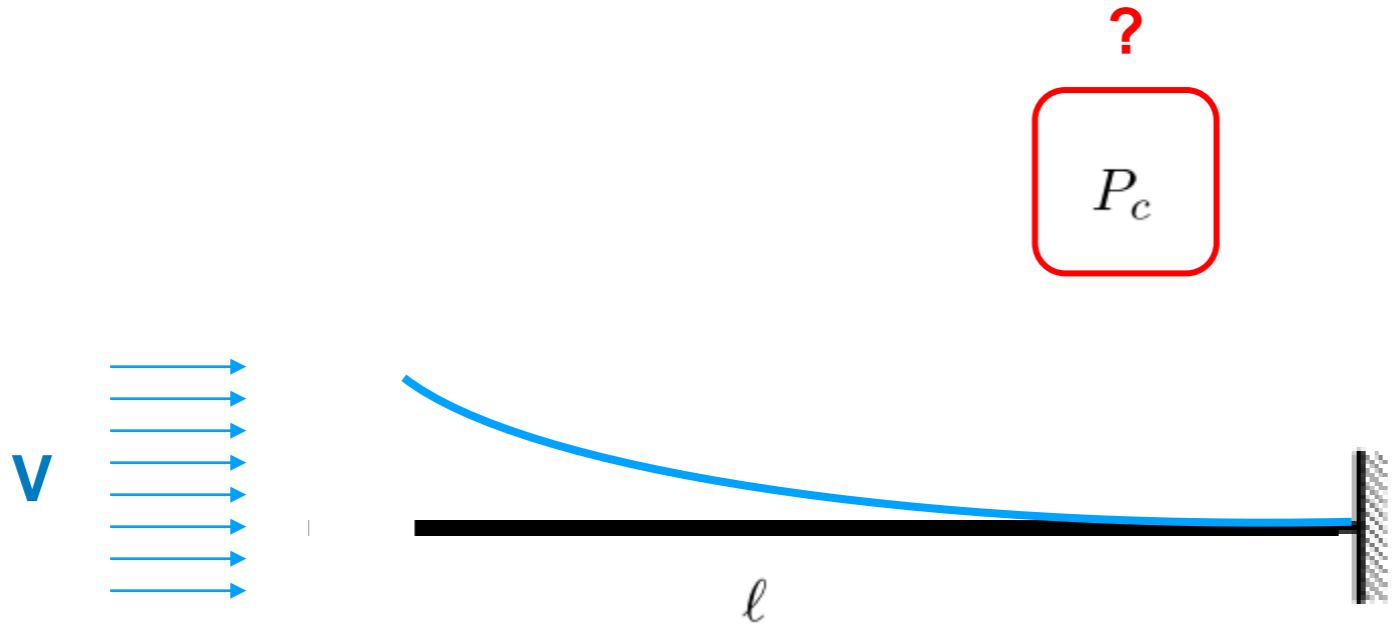


ESEMPIO 1.



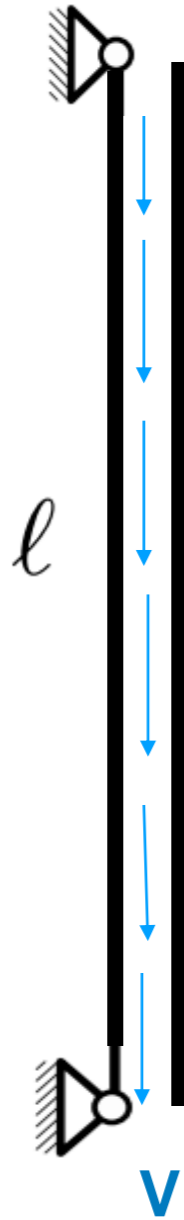


ESEMPIO 2. La trave





ESEMPIO 2. Il tubo



?

$$P_c$$