Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Calcolo integrale

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23

ME 07 DIC 2022

① IL CALCOLO DI AREE E VOLUMI È UN PROBLEMA CHE SI È POSTO FIN DALL'ANTICHITÀ: ARCHIMEDE È FAMOSO PER L'AREA DEL CERCHIO.

② NEL SEICENTO NASCE IL CALCOLO INTEGRALE ANCHE AD OPERA DI BONAVENTURA CAVALIERI. IL SIMBOLO DI INTEGRALE $\int$ È DOVUTO A LEIBNIZ COME QUELLO DEL DIFFERENZIALE dx

③ NELL'OTTOCENTO ERA IN VIGORE UNA DEFINIZIONE CHE UTILIZZA IL CONCETTO DI PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE DATA:

DATA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ SI DICE PRIMITIVA DI f UNA QUALUNQUE FUNZIONE CONTINUA $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ TALE CHE $F'(x) = f(x)$ PER OGNI $x \in (a,b)$.

ESEMPI

UNA PRIMITIVA DI x^{α} È LA FUNZIONE $\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$, SE $\alpha \neq -1$;

UNA PRIMITIVA DI $x^{-1} = \frac{1}{x}$ È LA FUNZIONE $\log|x|$;

UNA PRIMITIVA DI e^{x} È LA FUNZIONE e^{x};

UNA PRIMITIVA DI $\operatorname{sen} x$ È LA FUNZIONE $-\cos x$;

UNA PRIMITIVA DI $\cos x$ È LA FUNZIONE $\operatorname{sen} x$;

UNA PRIMITIVA DI $\frac{1}{1+x^2}$ È LA FUNZIONE $\operatorname{arctg} x$;

UNA PRIMITIVA DI $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ È LA FUNZIONE $\operatorname{arcsen} x$;

UNA PRIMITIVA DEL POLINOMIO $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ È IL POLINOMIO $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$;

UNA PRIMITIVA DI $\operatorname{senh} x$ È $\cosh x$;

UNA PRIMITIVA DI $\cosh x$ È $\operatorname{senh} x$;

UNA PRIMITIVA DI $\frac{1}{\cos^2 x}$ È $\operatorname{tg} x$;

UNA PRIMITIVA DI $1+\operatorname{tg}^2 x$ È $\operatorname{tg} x$.

LA DEFINIZIONE OTTOCENTESCA DELL'INTEGRALE:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

ESEMPI:

$$\int_0^b x^2\, dx = \frac{1}{3} b^3;$$

$$\int_0^b e^x\, dx = e^b - 1;$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2;$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi:$$

NOTARE CHE $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ NON È DEFINITA PER $x = \pm 1$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

ME 07 DIC 2022

4) NEL 1876 BERNHARD RIEMANN IN UNA DISSERTAZIONE SULLE SERIE TRIGONOMETRICHE PROPONE LA DEFINIZIONE ATTUALE, SUBITO RECEPITA DA U. DINI E DA G. DARBOUX.

LA DEFINIZIONE DI RIEMANN PRESCINDE DALL'ESISTENZA DI UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE INTEGRANDA. A DARBOUX SI ATTRIBUISCE LA SEGUENTE FORMULAZIONE:

CONSIDERIAMO $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA.

UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ DELL'INTERVALLO $[a,b]$ SI OTTIENE CON $n+1$ PUNTI $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, CON $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. IN FUNZIONE DI $\mathcal{D}$ RESTANO DEFINITE LA SOMMA INFERIORE

$$s(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \cdot \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f,$$

$\delta_k = x_k - x_{k-1}$ E LA SOMMA SUPERIORE

$$S(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \cdot \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

E RISULTA $s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D})$, DA CUI

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D})$$

SE VALE L'UGUAGLIANZA LA FUNZIONE f SI DICE INTEGRABILE E SI DEFINISCE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D})$$

IN TALUNI CASI FORTUNATI È POSSIBILE SVOLGERE I CALCOLI:

$f(x) = c$ (COSTANTE). SO CHE $F(x) = cx$ È UNA PRIMITIVA DI f, QUINDI NELL'OTTOCENTO AVREI SCRITTO $\int_a^b c\,dx = cb - ca = (b-a)c$.

APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE DI DARBOUX:

PRENDO UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ CON PUNTI $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ E CALCOLO

$$s(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, c = (b-a)c$$

QUALUNQUE SIA $\mathcal{D}$, QUINDI $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) = (b-a)c$ E SIMILMENTE $\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}) = (b-a)c$ QUINDI $\int_a^b c\,dx = (b-a)c$.

LA VERA UTILITÀ DELLA DEFINIZIONE STA NELLA POSSIBILITÀ DI DIMOSTRARE LE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE.

OSSERVAZIONI: LA FUNZIONE $f(x) = \frac{1}{x}$ NON È INTEGRABILE SULL'INTERVALLO $[0,1]$ PERCHÉ NON È DEFINITA PER $x = 0$. LA FUNZIONE $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ y_0, & \text{SE } x = 0 \end{cases}$ NON È INTEGRABILE SULL'INTERVALLO $[0,1]$ PERCHÉ NON È LIMITATA: $\sup_{[0,1]} f = +\infty$.

LA FUNZIONE $f(x) = \frac{1}{x}$ NON È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SULL'INTERVALLO $[1, +\infty)$ PERCHÉ LA DEFINIZIONE PRESUPPONE CHE L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE SIA LIMITATO.

L'ESEMPIO NON BANALE È LA FUNZIONE DI DIRICHLET $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

FISSATO $[a, b]$ E PRESA UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ SI HA: $s(\mathcal{D}) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = 0$$

E $S(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a$, QUINDI

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) = 0 < b - a = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D})$$

E DI CONSEGUENZA f NON È INTEGRABILE.

LA FUNZIONE $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ HA LA PRIMITIVA $F(x) = \arcsin x$ CHE È CONTINUA IN $[-1, 1]$ MA $f(x)$ NON È IVI INTEGRABILE PERCHÉ NON È LIMITATA. UNO STUDENTE DI DINI, VITO VOLTERRA, TROVÒ NEL 1881 UNA FUNZIONE LIMITATA, DOTATA DI PRIMITIVA, NON INTEGRABILE (FATTA CON UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI SIMILI A $F(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$)

ESERCIZIO: 1) LA FUNZIONE $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ È INTEGRABILE SU $[-1, 1]$?

2) AMMETTE PRIMITIVA?

SVOLGIMENTO: 1) PRENDO LA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}_\varepsilon = \{-1, -\varepsilon, \varepsilon, 1\}$, $\varepsilon \in (0,1)$

E TROVO $s(\mathcal{D}_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{3} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} H(x)$

$$= (1-\varepsilon) \cdot 0 + 2\varepsilon \cdot 0 + (1-\varepsilon) \cdot 1 = 1 - \varepsilon$$

E $S(\mathcal{D}_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{3} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} H(x)$

$$= (1-\varepsilon) \cdot 0 + 2\varepsilon \cdot 1 + (1-\varepsilon) \cdot 1 = 1 + \varepsilon.$$

QUINDI PER OGNI $\varepsilon \in (0,1)$ SI HA $1 - \varepsilon =$

$$= s(\mathcal{D}_\varepsilon) \leq \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}) \leq$$

$\leq S(\mathcal{D}_\varepsilon) = 1 + \varepsilon$. PER L'ARBITRARIETÀ DI ε LA FUNZIONE $H(x)$ È INTEGRABILE SULL'INTERVALLO $[-1, 1]$ E SI PUÒ SCRIVERE $\int_{-1}^{1} H(x)\,dx =$

$$= \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}) = 1.$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE: (A) LE FUNZIONI COSTANTI A TRATTI $g(x) = c_k$ (COSTANTE) PER $x \in (x_{k-1}, x_k)$ SONO INTEGRABILI E SI TROVA

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, c_k.$$

(B) CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ SIA INTEGRABILE È CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTA UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ TALE CHE $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) < \varepsilon$.

 VE 09 DIC 2022

SVOLGIMENTO: 2) PER IL TEOREMA DI LAGRANGE (23/11), LE FUNZIONI CONTINUE $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ SODDISFACENTI LA CONDIZIONE $f'(x)=H(x)$ PER OGNI $x\neq 0$ SONO DATE DA

$$f(x)-f(0)=\begin{cases} x, & \text{SE } x\in(0,+\infty) \\ 0, & \text{SE } x\in(-\infty,0). \end{cases}$$

QUINDI $f(x)=\begin{cases} f(0)+x, & \text{SE } x\in(0,+\infty) \\ f(0), & \text{SE } x\in(-\infty,0) \end{cases}$

OVVERO $f(x)=f(0)+x^+$ (4/11).

NESSUNA DI ESSE È DERIVABILE NELL'ORIGINE, QUINDI NESSUNA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ SODDISFA $f'(x)=H(x)$ PER OGNI $x\in\mathbb{R}$.

DOMANDE. 1) LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INTEGRANDA È NECESSARIA PER L'INTEGRABILITÀ? NO: PENSATE AD $H(x)$ CHE È INTEGRABILE BENCHÉ DISCONTINUA. 2) LA CONTINUITÀ DI f È NECESSARIA PER L'ESISTENZA DI UNA PRIMITIVA? NO: SI PENSI ALLA FUNZIONE DI VOLTERRA

$$F(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{SE } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{SE } x=0 \end{cases}$$

DUNQUE LA FUNZIONE $f(x)$ DATA DA

$$f(x)=\begin{cases} 2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{SE } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{SE } x=0 \end{cases}$$

AMMETTE PRIMITIVA $F(x)$ BENCHÉ f SIA DISCONTINUA NELL'ORIGINE.

ABBIAMO STABILITO CHE:

(B) CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ SIA INTEGRABILE È CHE PER OGNI $\varepsilon\in(0,+\infty)$ ESISTA UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ TALE CHE $S(\mathcal{D})-s(\mathcal{D})<\varepsilon$.

NE SEGUONO NOTEVOLI PROPRIETÀ.

1) APPLICARE LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE ALLA FUNZIONE $f(x)=x$ PER $x\in[0,b]$. SI DEVE TROVARE $\int_0^b x\,dx=\frac{1}{2}b^2$. SUGGERIMENTO: PER OGNI $n\in\mathbb{Z}$ PRENDERE $\mathcal{D}_n$ CON $x_k=\frac{k}{n}b$ PER $k=0,\dots,n$ E RICORDARE CHE $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ (24/10).

2) LE FUNZIONI MONOTONE SONO INTEGRABILI (SI BADI CHE $f(x)=\frac{1}{x}$ NON È MONOTONA SU $[0,1]$):

INFATTI SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È CRESCENTE E PRENDO UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ HO CHE

$$S(\mathcal{D})=\sum_{k=1}^{n}\delta_k\sup_{[x_{k-1},x_k]}f=\sum_{k=1}^{n}\delta_k f(x_k)$$

E $s(\mathcal{D})=\sum_{k=1}^{n}\delta_k f(x_{k-1})$ QUINDI

$$S(\mathcal{D})-s(\mathcal{D})=\sum_{k=1}^{n}\delta_k\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)$$

LIMITIAMOCI ALLA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}_n$ AVENTE $\delta_k=\frac{b-a}{n}$ PER OGNI $k=1,\dots,n$ (DECOMPOSIZIONE EQUISPAZIATA) COSICCHÉ $S(\mathcal{D}_n)-s(\mathcal{D}_n)$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)=$$

$$=\frac{f(b)-f(a)}{n}(b-a)<\varepsilon \quad \text{PER } n \text{ GRANDE.}$$

LU 12 DIC 2022

③ SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È (UNIFORMEMENTE) CONTINUA, CIOÈ PER OGNI $\varepsilon\in(0,+\infty)$ ESISTE $\delta>0$ TALE CHE $|f(x)-f(z)|<\varepsilon$ PER OGNI $x,z\in[a,b]$ SODDISFACENTI $|x-z|<\delta$, ALLORA f È INTEGRABILE: INFATTI PRENDO $\mathcal{D}$ CON $\delta_k=\frac{b-a}{n}<\delta$ ED HO CHE $\sup_{[x_{k-1},x_k]} f-\inf_{[x_{k-1},x_k]} f\leq\varepsilon$ QUINDI

$$S(\mathcal{D})-s(\mathcal{D})=\sum_{k=1}^{n}\delta_k\left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f-\inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right)$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\delta_k\,\varepsilon=(b-a)\varepsilon$$ DA CUI LA TESI.

NOTA: SE $f:S\to\mathbb{R}$ È CONTINUA E S È COMPATTO, ALLORA È UNIFORMEMENTE CONTINUA (TEOREMA DI HEINE-CANTOR). DIMOSTRIAMO LA PROPOSIZIONE CONTRONOMINALE: UNA $f:S\to\mathbb{R}$ NON UNIFORMEMENTE CONTINUA SU S COMPATTO HA ALMENO UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ.

NON UNIFORMEMENTE CONTINUA VUOL DIRE CHE ESISTE $\varepsilon_0\in(0,+\infty)$ TALE CHE PER OGNI $\delta_n=\frac{1}{n}$ ESISTONO $x_n,z_n\in S$ SODDISFACENTI $|x_n-z_n|<\frac{1}{n}$ E $|f(x_n)-f(z_n)|\geq\varepsilon_0$.

ESSENDO S COMPATTO, $x_{n_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{} c\in S$ (21/11). DA $|x_n-z_n|<\frac{1}{n}$ SEGUE $z_{n_k}\to c$

DA $|f(x_n)-f(z_n)|\geq\varepsilon_0$ SEGUE LA DISCONTINUITÀ NEL PUNTO $c\in S$ (QUANDO f È CONTINUA IN UN PUNTO c SI HA $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(c)$ PER OGNI SUCCESSIONE $x_n\to c$).

④ LEGAME FRA LA DEFINIZIONE OTTOCENTESCA E QUELLA DI RIEMANN: SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN ED HA (ALMENO) UNA PRIMITIVA $F(x)$ ALLORA L'INTEGRALE DI RIEMANN $\int_a^b f(x)\,dx$ VALE $F(b)-F(a)$ (TEOREMA DI VALUTAZIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI, DETTO ANCHE TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE).

INFATTI, ESSENDO f INTEGRABILE, PER OGNI $\varepsilon>0$ ESISTE UNA DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}_\varepsilon$ TALE CHE $S(\mathcal{D}_\varepsilon)-s(\mathcal{D}_\varepsilon)<\varepsilon$. USO I SUOI PUNTI x_k PER DECOMPORRE $F(b)-F(a)=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(F(x_k)-F(x_{k-1})\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(c_k),\quad c_k\in(x_{k-1},x_k)$$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE. QUINDI

$$F(b)-F(a)\leq\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\sup_{[x_{k-1},x_k]} f$$

$$=S(\mathcal{D}_\varepsilon)\ \text{ E }\ F(b)-F(a)\geq s(\mathcal{D}_\varepsilon),$$

DA CUI $$\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon<s(\mathcal{D}_\varepsilon)\leq$$

$$\leq F(b)-F(a)\leq S(\mathcal{D}_\varepsilon)<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon$$

E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

PER CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI VALUTAZIONE, LE SEGUENTI UGUAGLIANZE SONO CORRETTE PERCHÉ LE FUNZIONI INTEGRANDE SONO CONTINUE E QUINDI INTEGRABILI:

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3; \quad \int_0^b e^x\,dx = e^b - 1;$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2; \quad \int_0^\pi \cos x\,dx = 0;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = 1.$$

INVECE L'INTEGRALE $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ NON È BEN DEFINITO PERCHÉ L'INTEGRANDA È ILLIMITATA, PERÒ È INTEGRABILE SU OGNI $[a,b] \subset (-1,1)$. FISSIAMO ALLORA $x_0 \in (-1,1)$ E GUARDIAMO SE ESISTONO FINITI I LIMITI $\lim_{a\to(-1)^+} \int_a^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

E $\lim_{b\to 1^-} \int_{x_0}^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$: IN TAL CASO SI DICE CHE $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO, O GENERALIZZATO, DI RIEMANN, E SI DEFINISCE

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to(-1)^+} \int_a^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{b\to 1^-} \int_{x_0}^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

PER IL TEOREMA DI VALUTAZIONE SI HA CHE

$$\int_a^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x_0 - \arcsin a$$

QUINDI $\lim_{a\to(-1)^+} \int_a^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x_0 + \frac{\pi}{2}$

E SIMILMENTE $\int_{x_0}^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{x_0}^b$

QUINDI $\lim_{b\to 1^-} \int_{x_0}^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x_0$

IN TAL CASO SI DICE CHE L'INTEGRALE $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ CONVERGE E SI SCRIVE

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi \text{ NEL SENSO IMPROPRIO.}$$

ALTRO ESEMPIO: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ NEL SENSO IMPROPRIO PERCHÉ

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \cancel{\log 1} - \log\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} +\infty$$

IN CHE SENSO « IMPROPRIO » ? LA FUNZIONE $f(x) = \frac{1}{x}$ È ILLIMITATA SULL'INTERVALLO $(0,1)$ QUINDI L'INTEGRALE $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ NON È DEFINITO NEL SENSO DI RIEMANN! L'INTEGRALE IMPROPRIO È UNA GENERALIZZAZIONE DELL'INTEGRALE DI RIEMANN.

 MA 13 DIC 2022

CON UN PROCEDIMENTO ANALOGO SI POSSONO DEFINIRE GLI INTEGRALI $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$,

$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. ESEMPIO:

$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = 1$ IN SENSO GENERALIZZATO,

PERCHÉ $\int_{a}^{0} e^x\,dx = e^0 - e^a \xrightarrow[a\to-\infty]{} 1$.

LE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE $f(x)$

① OSSERVAZIONE SEMPLICE: SE $F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$ ALLORA LE FUNZIONI $F(x)+C$, $C \in \mathbb{R}$, SODDISFANO

$$(F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

QUINDI SONO PRIMITIVE DI $f(x)$. ESEMPIO: x^2+1, x^2, $x^2-\pi$ SONO PRIMITIVE DI $2x$.

② SE $F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$ SU DI UN INTERVALLO I ALLORA NON VI SONO ALTRE PRIMITIVE ALL'INFUORI DELLE FUNZIONI $F(x)+C$.

INFATTI, INDICATA CON $G(x)$ UNA PRIMITIVA INCOGNITA DI $f(x)$ SULL'INTERVALLO I, LA DIFFERENZA $F(x)-G(x)$ SODDISFA

$$(F(x)-G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0$$

E QUINDI (29/11) $F(x)-G(x)$ È COSTANTE NELL'INTERVALLO I.

③ L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI $f(x)$ SI CHIAMA INTEGRALE INDEFINITO E SI INDICA CON $\int f(x)\,dx = F(x)+C$. ESEMPI:

$\int dx = x + C$, $\int 0\,dx = C$ (29/11),

$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$ IN QUANTO

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

MA 13 DIC 2022

LE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

L'INTEGRALE SI PUÒ CONCEPIRE COME UNA FUNZIONE $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ DETTA « OPERATORE DI INTEGRAZIONE »

① MONOTONIA RISPETTO ALLA FUNZIONE INTEGRANDA: SE $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ SONO INTEGRABILI, E SE $f(x) \le g(x)$ PER OGNI $x \in [a,b]$ ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. ESEMPI:

SICCOME $e^{-x^2} \le e^0 = 1$, POSSO SCRIVERE $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 dx = 1$, E SIMILMENTE $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \le 1$. IL CASO PARTICOLARE $f(x) = 0$:

② POSITIVITÀ DELL'INTEGRALE: SE $g : [a,b] \longrightarrow [0, +\infty)$ È INTEGRABILE, ALLORA

$$\int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b 0\,dx = 0.$$

APPLICAZIONE: SE $g(x)$ È CONTINUA NEL PUNTO $x_0 \in (a,b)$ E $g(x_0) > 0$ ALLORA $g(x) > \frac{1}{2} g(x_0)$ PER $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (PERMANENZA DEL SEGNO) QUINDI $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2} g(x_0)\,dx =$

$$= \delta\, g(x_0) > 0.$$

③ LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI INTEGRAZIONE: SE $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ SONO INTEGRABILI E PRENDO $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ALLORA LA FUNZIONE $\lambda f(x) + \mu g(x)$ È INTEGRABILE, E SI HA CHE

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

APPLICAZIONI: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1-1+x^2}{1+x^2}\,dx =$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= 1 - (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0;$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$$

$$= 1 - (\log(1+1) - \log(1+0)) = 1 - \log 2 > 0.$$

④ SE f E g HANNO PRIMITIVE F E G ALLORA $\lambda f + \mu g$ HA PRIMITIVA $\lambda F + \mu G$ PERCHÉ $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G'$. SI SCRIVE

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx$$

⑤ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È INTEGRABILE, ALLORA ANCHE $f^+(x)$, $f^-(x)$ E $|f(x)|$ SONO INTEGRABILI, E SI HA CHE

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$ IN QUANTO

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ QUINDI PER LA MONOTONIA E LA LINEARITÀ SI HA CHE

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b -|f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$ NOTA: SE $f(x)$ È CONTINUA, ANCHE $|f(x)|$ LO È.

SFIDA: TROVARE $f(x)$ NON INTEGRABILE CON $|f(x)|$ INTEGRABILE

MA 13 DIC 2022

⑥ ADDITIVITÀ RISPETTO ALL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE: DATA $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ E FISSATO $b\in(a,c)$, f È INTEGRABILE SU $[a,c]$ SE E SOLO SE LO È SU $[a,b]$ E $[b,c]$.

IN TAL CASO SI TROVA CHE $\int_a^b f(x)\,dx +$

$$+\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,$$ UGUAGLIANZA

CHE SI ESTENDE INTRODUCENDO DUE DEFINIZIONI:

Ⓐ SI DEFINISCE $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Ⓑ SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È INTEGRABILE, SI DEFINISCE $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

CON QUESTE DEFINIZIONI, L'UGUAGLIANZA

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$ SUSSISTE

INDIPENDENTEMENTE DALL'ORDINE FRA a, b E c CIOÈ LA CONDIZIONE $a<b<c$ NON È NECESSARIA.

GI 15 DIC 2022

DIMOSTRAZIONE DELLA 1 MONOTONIA DELL'INTEGRALE RISPETTO ALLA FUNZIONE INTEGRANDA:

SE f E g SONO INTEGRABILI SU $[a,b]$ E $f(x) \le g(x)$ PER OGNI $x \in [a,b]$, ALLORA PER OGNI DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ SI HA $f(x) \le g(x) \le \sup_{[x_{k-1},x_k]} g$ PER OGNI $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ED OGNI $k = 1, \dots, n$,

QUINDI IL NUMERO $\sup_{[x_{k-1},x_k]} g$ È UN MAGGIORANTE DI $f(x)$ PER $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

SICCOME $\sup_{[x_{k-1},x_k]} f$ È IL PIÙ PICCOLO MAGGIORANTE, DEVE AVERSI $\sup_{[x_{k-1},x_k]} f \le$
$\le \sup_{[x_{k-1},x_k]} g$ PER OGNI $k = 1, \dots, n$.

QUINDI $S(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \le$
$\le \sum_{k=1}^{n} \delta_k \sup_{[x_{k-1},x_k]} g = S(g,\mathcal{D})$

QUALUNQUE SIA $\mathcal{D}$. QUINDI $\int_a^b f(x)\,dx =$
$= \inf_{\mathcal{D}} S(f,\mathcal{D}) \le S(f,\mathcal{D}_0) \le$
$\le S(g,\mathcal{D}_0)$ PER OGNI DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}_0$.

LA DISUGUAGLIANZA $\int_a^b f(x)\,dx \le S(g,\mathcal{D})$ MOSTRA CHE L'INTEGRALE $\int_a^b f(x)\,dx$ È UN MINORANTE PER $S(g,\mathcal{D})$. MA SICCOME L'ESTREMO INFERIORE È IL PIÙ GRANDE MINORANTE, POSSIAMO SCRIVERE $\int_a^b f(x)\,dx \le \inf_{\mathcal{D}} S(g,\mathcal{D})$
$= \int_a^b g(x)\,dx$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

APPLICAZIONI

A CONFRONTO FRA INTEGRALI E SERIE

I RIDIMOSTRIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

OSSERVAMO CHE $\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$ (07/12)

E CHE $\frac{1}{k} \ge \frac{1}{x}$ PER OGNI $x \in [k, +\infty)$ QUINDI $\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx \ge \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$ PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE. DUNQUE, PER IL TEOREMA DI VALUTAZIONE, $\frac{1}{k} \ge \log(k+1) - \log k$.

SOMMANDO SU k DA 1 AD n OTTENIAMO $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \log(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ DA CUI LA TESI.

GI 15 DIC 2022

(II) RIDIMOSTRIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ PER OGNI $\alpha \in (1,+\infty)$ (25/10). OSSERVIAMO CHE $\frac{1}{k^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$ PER OGNI $x \in [k-1, k]$ E $k \ge 2$, QUINDI

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,dx \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{k-1}^{k} = \frac{1}{1-\alpha}\left(k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}\right)$$

DA CUI OTTENIAMO $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le$

$$\le 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

E LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

(B) CONFRONTO FRA INTEGRALI GENERALIZZATI

(I) SE $f : [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ È INTEGRABILE SU $[a,b]$ PER OGNI $b \in (a,+\infty)$ ALLORA IL LIMITE

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ ESISTE,}$$

FINITO O INFINITO. DIMOSTRAZIONE: PER OGNI $b_1, b_2 \in (a,+\infty)$ CON $b_1 < b_2$ SI HA

$$\int_a^{b_1} f(x)\,dx \le \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \text{ PERCHÉ}$$

$\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \ge 0$ PER LA POSITIVITÀ DELL'INTEGRALE.

QUINDI $\int_a^{b_1} f(x)\,dx \le \int_a^{b_2} f(x)\,dx$ IL CHE MOSTRA CHE LA $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ È CRESCENTE E LA TESI SEGUE (14/11).

(II) SE $f, g : [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ SONO INTEGRABILI SU $[a,b]$ PER OGNI $b \in (a,+\infty)$ E SODDISFANO $f(x) \le g(x)$ PER OGNI $x \in [a,+\infty)$ ALLORA $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. DIMOSTRAZIONE: SI HA $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ PER OGNI $b \in (a,+\infty)$ PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE DI RIEMANN E LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO APPLICATO ALLE FUNZIONI

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{E} \quad G(b) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

ESEMPIO: L'INTEGRALE $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ HA UN VALORE FINITO PERCHÉ $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx =$

$$= \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = e^{-1}.$$

 GI 15 DIC 2022

Ⓒ LA MEDIA INTEGRALE

SE f È INTEGRABILE SU $[a,b]$ ALLORA DA

$\inf\limits_{[a,b]} f \le f(x) \le \sup\limits_{[a,b]} f$ SEGUE CHE

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f = \int_a^b \left(\inf_{[a,b]} f\right) dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le$$

$$\le \int_a^b \left(\sup_{[a,b]} f\right) dx = (b-a)\sup_{[a,b]} f \quad \text{QUINDI}$$

$$\inf_{[a,b]} f \le -\!\!\!\!\!\!\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \le \sup_{[a,b]} f.$$

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE: SE f È CONTINUA IN $[a,b]$ ALLORA ESISTE (ALMENO) UN PUNTO $c \in [a,b]$ TALE CHE $f(c) = -\!\!\!\!\!\!\int_a^b f(x)\, dx$. DIMOSTRAZIONE:

PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTONO $x_m, x_M \in [a,b]$ TALI CHE $f(x_m) = \min\limits_{[a,b]} f \le -\!\!\!\!\!\!\int_a^b f(x)\, dx \le \max\limits_{[a,b]} f = f(x_M)$ QUINDI LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (17/11).

SFIDA: SI PUÒ ASSERIRE CHE ESISTE $c \in (a,b)$ TALE CHE $f(c) = -\!\!\!\!\!\!\int_a^b f(x)\, dx$?

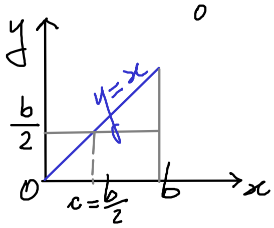
Ⓓ TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

DATA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE, E FISSATO $x_0 \in [a,b]$, LA FUNZIONE INTEGRALE $F(t) = \int_{x_0}^t f(x)\, dx$ È DERIVABILE IN OGNI PUNTO DI CONTINUITÀ DI f E IN TALI PUNTI RISULTA $F'(t) = f(t)$.

COROLLARIO: SE f È CONTINUA IN $[a,b]$ ALLORA F È UNA PRIMITIVA DI f.

ESEMPIO: LA FUNZIONE DEGLI ERRORI $\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2} dx$ È DERIVABILE PER OGNI $t \in \mathbb{R}$ E SODDISFA $\frac{d}{dt}\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$. ESERCIZIO: TRACCIARE IL GRAFICO DI $\mathrm{erf}(t)$.

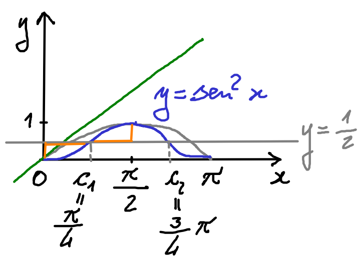
ESEMPIO: $-\!\!\!\!\!\!\int_0^b x\, dx = \frac{1}{b}\int_0^b x\, dx = \frac{b}{2}$



$$-\!\!\!\!\!\!\int_0^\pi \mathrm{sen}^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\, dx +$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{sen}\, 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}$$



VE 16 DIC 2022

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO.

APPLICO ALLA FUNZIONE $F(t)=\int_{x_0}^{t} f(x)\,dx$ LA

DEFINIZIONE DELLA DERIVATA IN UN PUNTO t DOVE f È CONTINUA. PRESO $\varepsilon\in(0,+\infty)$ ESISTE $\delta>0$ TALE CHE $f(t)-\varepsilon<f(x)<f(t)+\varepsilon$ PER OGNI $x\in[a,b]\cap[t-\delta,\, t+\delta]$. SUPPONIAMO $t<b$ E PRENDIAMO $\delta<b-t$ COSICCHÉ $t+\delta<b$.

PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE, ABBIAMO

$$(f(t)-\varepsilon)h=\int_t^{t+h}(f(t)-\varepsilon)\,dx\le\int_t^{t+h}f(x)\,dx\le$$

$$\le\int_t^{t+h}(f(t)+\varepsilon)\,dx=(f(t)+\varepsilon)h,\quad h\in(0,\delta)$$

PER L'ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE SI PUÒ SCRIVERE

$$F(t+h)-F(t)=\int_{x_0}^{t+h}f(x)\,dx-\int_{x_0}^{t}f(x)\,dx=$$

$$=\int_t^{t+h}f(x)\,dx$$ QUINDI

$$f(t)-\varepsilon\le\frac{F(t+h)-F(t)}{h}\le f(t)+\varepsilon$$

PER L'ARBITRARIETÀ DI ε SEGUE CHE

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=F'_+(t)=f(t)$$

PER $t<b$. SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE SE $a<t$ SI HA $F'_-(t)=f(t)$ IL CHE COMPLETA LA DIMOSTRAZIONE.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE: (A) LE FUNZIONI COSTANTI A TRATTI $g(x)=c_k$ (COSTANTE) PER $x\in(x_{k-1},x_k)$ SONO INTEGRABILI E SI TROVA

$$\int_a^b g(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\,c_k \qquad (09/12).$$

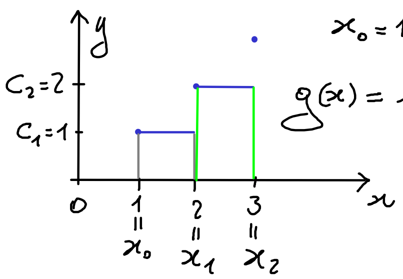
SE $c_k>0$ PER OGNI $k=1,\dots,n$, I PRODOTTI $(x_k-x_{k-1})\,c_k$ SI POSSONO VEDERE COME AREA DEL RETTANGOLO $[x_{k-1},x_k]\times[0,c_k]$ QUINDI L'INTEGRALE $\int_a^b g(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\,c_k$ COME AREA DELL'UNIONE $\bigcup_{k=1}^{n}\left([x_{k-1},x_k]\times[0,c_k]\right)$

$$=\left\{(x,y):\ x\in[a,b],\ y\in[0,g(x)]\right\}$$

DETTA SOTTOGRAFICO DELLA FUNZIONE g.

ESEMPIO: $g(x)=[x]$ PARTE INTERA DI $x\in[1,3]$

$x_0=1,\quad x_1=2,\quad x_3=3$



$g(x)=c_1=1$ PER $x\in(x_0,x_1)=(1,2)$

$g(x)=c_2=2$ PER $x\in(x_1,x_2)=(2,3)$

$$\int_1^3 g(x)\,dx=(x_1-x_0)\,c_1+(x_2-x_1)\,c_2=$$

$$=1+2=3$$

PASSIAMO DALLE FUNZIONI g COSTANTI A TRATTI ALLE FUNZIONI f INTEGRABILI. NESSO: PER OGNI DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$, LA SOMMA INFERIORE $s(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$

È L'INTEGRALE $\int_a^b g(x)\,dx$ DELLA FUNZIONE COSTANTE A TRATTI $g(x) = c_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$ PER $x \in [x_{k-1}, x_k]$. MA ALLORA, SE $\inf_{[a,b]} f > 0$

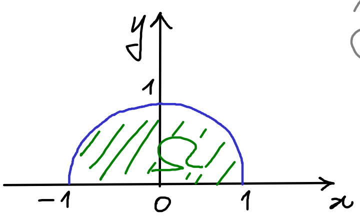
DUNQUE $c_k > 0$ PER OGNI k, LA $s(\mathcal{D})$ È L'AREA DEL PLURIRETTANGOLO

$\bigcup_{k=1}^{n} \left([x_{k-1}, x_k] \times [0, c_k] \right)$ IL QUALE È INCLUSO NEL SOTTOGRAFICO DI f CHE È

$$\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\}.$$

QUINDI $\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D})$ È L'ESTREMO SUPERIORE DELL'INSIEME NUMERICO DELLE AREE DEI SUDDETTI PLURIRETTANGOLI. DUNQUE SE Ω È UNA FIGURA NOTA AI GRECI, L'INTEGRAZIONE DI RIEMANN RIPRENDE IL PROCEDIMENTO DI ARCHIMEDE PER L'AREA DEL CERCHIO:

$f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$ ELEVANDO AL QUADRATO $y = \sqrt{1-x^2}$ SI TROVA $x^2 + y^2 = 1$



$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

VE 16 DIC 2022

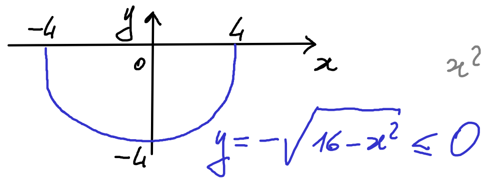
SE Ω NON È UNA FIGURA REGOLARE, IL NUMERO $\int_a^b f(x)\,dx$ SI CHIAMA MISURA (BIDIMENSIONALE) DI Ω SECONDO PEANO–JORDAN. OCCHIO: SERVE $f \geq 0$ INTEGRABILE! SE $f \geq 0$ NON È INTEGRABILE, SI DICE CHE Ω NON È MISURABILE SECONDO PEANO–JORDAN.

ESEMPIO: $\Omega = \{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in [0, \chi_{\mathbb{Q}}(x)]\}$

« PETTINE DI DIRICHLET ».

ESERCIZIO: TROVARE L'AREA DEL SEMICERCHIO $\Omega = \{(x,y) : x \in [-4,4],\ y \in [-\sqrt{16-x^2}, 0]\}$.

SVOLGIMENTO: ESSENDO IL RAGGIO $R = 4$, L'AREA DI Ω VALE $\frac{1}{2}\pi R^2 = 8\pi$.



$x^2 + y^2 = 4^2$

TIPICO FRAINTENDIMENTO: « L'INTEGRALE È UN'AREA ».

 VE 16 DIC 2022

REGOLE DI INTEGRAZIONE

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

CONSIDERIAMO UNA $f(x)$ AVENTE PRIMITIVA $F(x)$, DUNQUE $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

SE PONIAMO $\boxed{x = \varphi(t)}$ CON φ DERIVABILE,

ABBIAMO $\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$
$= f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

$\boxed{\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}}$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

QUINDI $\int f(\varphi(t))\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt} = F(\varphi(t)) + C$.

SE POI $\varphi(t)$ HA INVERSA $t = \psi(x)$, E SO CHE $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = G(t) + C$,

NE DEDUCO CHE $\frac{d}{dx} G(\psi(x)) =$

$= \frac{dG}{dt}(\psi(x)) \cdot \psi'(x) =$ $\quad \psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$ $\quad$ 25/11

$= f(\varphi(\psi(x)))\,\varphi'(\psi(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)$

QUINDI $\int f(x)\,dx = G(\psi(x)) + C$

APPLICAZIONI: $\int tg\,2x\,dx = \int tg\,t \cdot \frac{1}{2}\,dt$

$2x = t,\quad x = \frac{t}{2}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t}\,dt =$ (25/11)

$= -\frac{1}{2}\log|\cos t| + C =$

$= -\frac{1}{2}\log|\cos 2x| + C$

VERIFICA: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\log|\cos 2x|\right) =$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\operatorname{sen} 2x) \cdot 2 = tg\,2x$

ESERCIZIO: SVOLGERE $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ CON LA SOSTITUZIONE $x = \operatorname{sen} t \in (-1,1)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, QUINDI $dx = \cos t\,dt$.

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE NEGLI INTEGRALI DEFINITI

SAPENDO CHE

$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$,

SE $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ È INTEGRABILE SU $[t_1, t_2]$

ALLORA $\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1))$

$= \int_a^b f(x)\,dx$ SE $a = \varphi(t_1)$ E $b = \varphi(t_2)$ E

SE ANCHE f È INTEGRABILE

SFRUTTIAMO LA PARITÀ/DISPARITÀ DI f CONTINUA SULL'INTERVALLO $[-z, z]$

$$\int_{-z}^{z} f(x)\,dx = \int_{-z}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{z} f(x)\,dx$$

$x = \varphi(t) = -t$, $dx = -dt$ $\quad$ $x = t$

$$= -\int_{z}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{z} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{z} f(-t)\,dt + \int_{0}^{z} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{z} \big(f(-t) + f(t)\big)\,dt$$

SE $f(t) = f(-t)$ SI TROVA $2\int_{0}^{z} f(t)\,dt$

SE $f(t) = -f(-t)$ SI TROVA ZERO.

OSSERVAZIONE: LA TESI VALE ANCHE SE f È DISCONTINUA (PURCHÉ INTEGRABILE) E SE f NON AMMETTE PRIMITIVA. SFIDA: DIMOSTRARLO. SUGGERIMENTO: APPLICARE LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE PASSANDO DA $\mathcal{D} = \{x_0, \dots, x_n\}$ A $-\mathcal{D} = \{-x_n, \dots, -x_0\}$

TESI: $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt$

INTEGRALI QUASI IMMEDIATI

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \log|\varphi(t)|\,dt$$

ESEMPI: $\displaystyle\int \operatorname{tg} t\,dt = -\int \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t}\,dt =$

$$= -\log|\cos t| + C;$$

$$\int \frac{\cos t - \operatorname{sen} t}{\cos t + \operatorname{sen} t}\,dt = \text{(ESERCIZIO)}$$

$$\int \frac{dt}{t \log t} = \int \frac{1/t}{\log t}\,dt = \log|\log t| + C$$

STRADA PIÙ LUNGA: $x = \varphi(t) = \log t$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$,

$$\int \frac{1}{t \log t}\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C =$$

$$= \log|\log t| + C$$

$$\int \tanh t\,dt = \int \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\,dt =$$

$$= \log\left(e^t + e^{-t}\right) + C$$

L'INTEGRALE $\displaystyle\int \frac{1}{e^t + 1}\,dt$ NON È IMMEDIATO, PERÒ, POSTO $x = e^t$ DA CUI $\dfrac{dx}{dt} = e^t = x$

DIVENTA $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$

$$= \log|x| - \log|x+1| + C = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

$$= \log\frac{e^t}{e^t + 1} + C = t - \log(e^t + 1) + C$$

INFATTI $\displaystyle\left(t - \log(e^t + 1)\right)' = 1 - \frac{e^t}{e^t + 1} = \frac{1}{e^t + 1}$

LU 19 DIC 2022

ALTRI INTEGRALI QUASI IMMEDIATI:

$$\int (\varphi(t))^n \varphi'(t)\, dt = \frac{(\varphi(t))^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t + C$$

OPPURE SI PONE $x = \operatorname{sen} t$ E SI OTTIENE

$$\int \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt = \int x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$
$$= \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t + C$$

$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$; L'INTEGRALE

$\int \sqrt{1+t}\, dt = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} + C$ È QUASI

IMMEDIATO. SI PUÒ ANCHE SOSTITUIRE $x = 1+t$

E SI OTTIENE $\int \sqrt{1+t}\, dt = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$

$= \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} + C$ COME PRIMA.

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

DATE DUE FUNZIONI DERIVABILI F E G, E POSTO $f(x) = F'(x)$ E $g(x) = G'(x)$, SI HA CHE

$$(F(x)G(x))' - f(x)G(x) = F(x)g(x).$$

OVVIAMENTE $\int (F(x)G(x))'\, dx = F(x)G(x) + C.$

SE ANCHE $f(x)G(x)$ AMMETTE PRIMITIVA, ALLORA, PER LINEARITÀ,

$$\int F(x)g(x)\, dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x).$$

SE POI LE FUNZIONI INTEGRANDE SONO INTEGRABILI, SI APPLICA IL TEOREMA DI VALUTAZIONE:

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)G(x).$$

TIPICI ESEMPI: $\int x \operatorname{sen} x\, dx =$

$x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx =$

$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$ INFATTI

$(-x\cdot\cos x + \operatorname{sen} x)' = -\cos x + x \operatorname{sen} x + \cos x$

MA ALLORA $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x +$

$-\int 2x(-\cos x)\, dx = -x^2 \cos x +$

$+ 2\int x \cos x\, dx$ E QUEST'ULTIMO SI SVOLGE

COME SOPRA: $\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x +$

$-\int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

QUINDI $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x +$

$+ 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) + C = -x^2 \cos x +$

$+ 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C$

ALTRO ESEMPIO TIPICO: $\int x e^x \, dx = x e^x +$

$- \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$ DA CUI

SI RICAVA $\int x^2 e^x \, dx$ (ESERCIZIO)

ALTRO ESEMPIO:

$$\begin{cases} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx \\ \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \end{cases}$$

SOMMANDO LE DUE UGUAGLIANZE SI OTTIENE

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

E QUINDI $\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

LU 19 DIC 2022

INTEGRAZIONE PER PARTI DI UN SOLO FATTORE:

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= x (\log x - 1) + C$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$
$$= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$ QUINDI

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$ INFATTI

$$\frac{d}{dx} \left(x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} \right) = \operatorname{arcsen} x +$$
$$+ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

 MA 20 DIC 2022

ESERCIZIO: DETERMINARE $\frac{d}{dy}\,\text{sett senh}\, y$

($x = \text{sett senh}\, y$ È LA FUNZIONE INVERSA DI $y = \text{senh}\, x$). SVOLGIMENTO: COME IL 25/11

SCRIVIAMO $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ OVVERO $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

E TROVIAMO $\frac{d}{dy}\,\text{sett senh}\, y = \frac{1}{(\text{senh}\, x)'} = \frac{1}{\cosh x} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\text{senh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ PER OGNI $y \in \mathbb{R}$.

SIMILMENTE SI TROVA $\frac{d}{dy}\,\text{sett cosh}\, y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

PER $y \in (1,+\infty)$ E DI CONSEGUENZA $\frac{d}{dy}\,\text{sett cosh}\,|y| =$

$= \frac{\text{sgn}(y)}{\sqrt{y^2-1}}$ PER $y \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

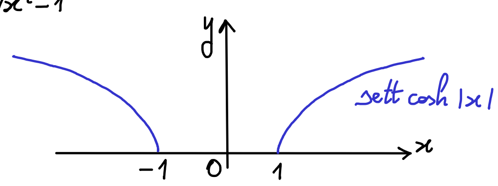
ESSENDO $\text{sgn}(y) = \begin{cases} 1, & \text{SE } y > 0 \\ -1, & \text{SE } y < 0 \end{cases}$.

CIÒ PREMESSO, SONO IMMEDIATI GLI INTEGRALI

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \text{sett senh}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{sett cosh}\, x + C \quad \text{PER } x \in (1,+\infty)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\,\text{sett cosh}\,|x| + C \quad \text{PER } x \in (-\infty,-1)$$



INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

LE FUNZIONI RAZIONALI $\frac{P(x)}{Q(x)}$, CON $P(x)$ E $Q(x)$ POLINOMI, SONO COMBINAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI COMPLESSI DELLE FUNZIONI RAZIONALI SEMPLICI $\frac{1}{(x-z_0)^k}$ CON $z_0 \in \mathbb{C}$ RADICI DEL DENOMINATORE $Q(x)$.

PER RESTARE NEL CAMPO REALE CI SI ARRESTA A FUNZIONI DEL TIPO $\frac{mx+q}{(Q^2(x))^k}$ CON $Q^2(x)$ POLINOMIO IRRIDUCIBILE DI SECONDO GRADO IL CUI MODELLO È $Q^2(x) = x^2+1$. TUTTE SI POSSONO INTEGRARE ELEMENTARMENTE (MENTRE IL DENOMINATORE $Q(x)$ NON SI PUÒ SEMPRE FATTORIZZARE ELEMENTARMENTE).

ESEMPI: $\int \frac{1}{mx+q}\,dx = \frac{1}{m}\log|mx+q| + C$;

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{-1}{x+1} + C;$$

$$\int \frac{1}{(2x+3)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(2x+3)^2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+5x-6} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x+6} \quad \text{PERCHÉ}$$

$\Delta = 25+24 = 49 \qquad x_{1,2} = \frac{-5\pm 7}{2}$

$$\frac{1}{x^2+5x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} = \frac{(A+B)x+6A-B}{x^2+5x-6}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ 6A-B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{7} \\ B = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+5x-6} = \frac{1}{7}\log|x-1| - \frac{1}{7}\log|x+6| + C$$

$$= \frac{1}{7}\log\left|\frac{x-1}{x+6}\right| + C$$

MA 20 DIC 2022

$$\int \frac{dx}{x^2+x+6} = \int \frac{dx}{\frac{23}{4} + \left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \int \frac{dt}{\frac{23}{4}+t^2}$$

$$\Delta = 1-24 = -23 < 0$$

$$x^2+x+6 = x^2 + 2\,\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4} + \frac{23}{4}$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$$

$$\int \frac{dt}{\frac{23}{4}+t^2} = \frac{4}{23}\int \frac{dt}{1+\frac{4}{23}t^2} = \frac{4}{23}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{23}}t\right)^2}$$

$$= \frac{4}{23}\,\frac{\sqrt{23}}{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{23}}t\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{23}}t\right) + C$$ QUINDI

$$\int \frac{dx}{x^2+x+6} = \frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{23}}\right) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+x+6} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+6}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+6}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+6}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+6\right) - \frac{1}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{23}} + C$$

$$\int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

MA $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{-dx}{1+x^2} = \frac{-x/2}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

QUINDI $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + C$

(F. CASOLARO: « INTEGRALI »).

PER SVOLGERE $\displaystyle\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx$

RICORDIAMO CHE $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \operatorname{erf}(x)$

QUINDI PONIAMO $\displaystyle t^2 = \frac{(x-\mu)^2}{(\sqrt{2}\,\sigma)^2}$ O MEGLIO $t =$ $\displaystyle = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}$ DUNQUE $\displaystyle dt = \frac{dx}{\sqrt{2}\,\sigma}$, $\sigma \in (0,+\infty)$

E OTTENIAMO $\displaystyle\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx =$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-t^2}\sqrt{2}\,\sigma\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{erf}(t) + C$$ IN QUANTO $\displaystyle\frac{d}{dt}\operatorname{erf}(t) =$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-t^2}.$$ IN CONCLUSIONE

$$\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) + C.$$

IL NOME « DEGLI ERRORI » È DOVUTO ALL'INTERPRETAZIONE STATISTICA DEL SUDDETTO INTEGRALE. SI IPOTIZZA CHE L'ERRORE DI MISURA SIA LA SOMMA DI n VARIABILI ALEATORIE (GAUSS) DI VALOR MEDIO μ E VARIANZA σ^2 E SI DIMOSTRA CHE SE $n \longrightarrow +\infty$ IL LIMITE DI TALE SOMMA HA DENSITÀ GAUSSIANA. LA PROBABILITÀ CHE IL VALORE OSSERVATO APPARTENGA ALL'INTERVALLO (a,b) È

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx.$$

EQUIVALENTEMENTE LA PROBABILITÀ CHE L'ERRORE DI MISURA APPARTENGA A $(-\varepsilon,\varepsilon)$ È DATA DA

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\,dx$$

MA 20 DIC 2022

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt =$$

$$= 2\,\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \operatorname{erf}(t) = 1.$$