

Diagonalizzazione di endomorfismi

Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione n e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Precedentemente abbiamo osservato che la matrice associata ad f rispetto ad una base cambia in modo ben preciso se si cambia la base. Detta A la matrice di f rispetto ad una base B (stiamo considerando B sia come base del dominio che come base del codominio) e P la matrice di passaggio dalla base B ad un'altra base B' di V , la matrice di f rispetto a B' sarà PAP^{-1} . È quindi naturale porsi il problema di trovare una base tale che la matrice rispetto ad essa sia la più semplice possibile, per esempio una *matrice diagonale*.

Si noti che se $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base rispetto alla quale f ha matrice diagonale le cui entrate nella diagonale principale sono date dagli scalari a_1, \dots, a_n (non necessariamente tutti distinti), allora si ha

$$f(\mathbf{e}_i) = a_i \cdot \mathbf{e}_i$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Per poter cercare una base siffatta, occorre quindi trovare dei vettori non nulli \mathbf{v} tali che $f(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$. Queste considerazioni giustificano la seguente definizione.

Definizione 1.16.5. *Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V . Un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è chiamato autovalore di f se esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Il vettore \mathbf{v} sarà detto autovettore relativo all'autovalore λ .*

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.16.6. *Gli autovettori relativi all'autovalore 0 non sono altro che i vettori non nulli di $\ker(f)$ (se esistono). Per esempio 0 è un autovalore dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da $f(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$. Infatti*

$f(1,1) = (0,0) = 0 \cdot (1,1)$, quindi abbiamo provato l'esistenza di un vettore $\mathbf{v} = (1,1) \neq (0,0)$ tale che $f(\mathbf{v}) = 0 \cdot \mathbf{v}$.

Esempio 1.16.7. Consideriamo l'insieme V_3 dei vettori liberi dello spazio e sia \mathbf{u} un vettore non nullo di modulo 1. Sia $f : V_3 \rightarrow V_3$ l'applicazione che a ogni vettore geometrico \mathbf{v} associa il vettore proiezione ortogonale su \mathbf{u} , cioè

$$f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{u},$$

dove

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle := \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \cos(\hat{\mathbf{v}\mathbf{u}})$$

è il prodotto scalare tra i due vettori geometrici \mathbf{v} e \mathbf{u} (con $\hat{\mathbf{v}\mathbf{u}}$ abbiamo denotato l'angolo formato tra i due vettori). Si può verificare che f è una applicazione lineare. Si osservi ora che $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ e quindi \mathbf{u} è un autovettore relativo all'autovalore 1. Se \mathbf{v} è un vettore non nullo perpendicolare ad \mathbf{u} , allora si ha $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$ e quindi \mathbf{v} è un autovettore relativo all'autovalore 0.

Esempio 1.16.8. Consideriamo l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 definito da

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + y + z, 4y + 2z).$$

Allora $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2) = 2(1, 0, 1)$ e quindi 2 è un autovalore di f con autovettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Si noti che anche $\mathbf{w} = (3, 0, 3)$ è autovettore relativo al medesimo autovalore 2: infatti $f(\mathbf{w}) = f(3, 0, 3) = (6, 0, 6) = 2(3, 0, 3) = 2\mathbf{w}$.

L'esempio precedente mostra che ad un autovalore non resta associato un unico autovettore. Al contrario, come vedremo tra poco l'insieme di tutti gli autovettori associati ad uno stesso autovalore è un insieme infinito.

Definizione 1.16.9. Sia λ un autovalore dell'endomorfismo f di V . Si chiama autospazio relativo all'autovalore λ l'insieme

$$V(\lambda) = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}\}$$

cioè l'insieme costituito da tutti gli autovettori associati a λ e dal vettore nullo di V .

Proposizione 1.16.10. $V(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V(\lambda)$ e per ogni $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{v} + \alpha'\mathbf{v}') &= \alpha f(\mathbf{v}) + \alpha' f(\mathbf{v}') \\ &= \alpha(\lambda\mathbf{v}) + \alpha'(\lambda\mathbf{v}') \\ &= \lambda(\alpha\mathbf{v}) + \lambda(\alpha'\mathbf{v}') \\ &= \lambda(\alpha\mathbf{v} + \alpha'\mathbf{v}'), \end{aligned}$$

da cui $\alpha\mathbf{v} + \alpha'\mathbf{v}' \in V(\lambda)$. □

Vediamo ora alcune proprietà degli autospazi.

Proposizione 1.16.11. *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti di f e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ autovettori corrispondenti. Allora i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà per induzione sul numero k di autovalori.

Per $k = 1$ la proprietà è vera perché \mathbf{v}_1 è un autovettore e quindi non può essere nullo, il che significa che è linearmente indipendente.

Supponiamo vera la proprietà ogniqualvolta abbiamo $k - 1$ autovalori distinti e dimostriamola nel caso in cui si abbiano k autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ con corrispondenti autovettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Al fine di dimostrare che $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, consideriamo una loro qualsiasi combinazione lineare

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \quad (1.62)$$

Il nostro obiettivo è provare che $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = \alpha_k = 0$. Moltiplicando ambo i membri della (1.62) per λ_k si ottiene

$$\lambda_k\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k\alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \lambda_k\alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \quad (1.63)$$

D'altra parte, applicando f alla (1.62) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= f(\mathbf{0}) \\ &= f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \alpha_k\mathbf{v}_k) \\ &= \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_{k-1} f(\mathbf{v}_{k-1}) + \alpha_k f(\mathbf{v}_k) \\ &= \lambda_1\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \lambda_k\alpha_k\mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Confrontando la (1.63) con la (1.64) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_k\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k\alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \lambda_k\alpha_k\mathbf{v}_k \\ &= \lambda_1\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \lambda_k\alpha_k\mathbf{v}_k \end{aligned}$$

da cui

$$(\lambda_k - \lambda_1)\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_1)\alpha_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}. \quad (1.65)$$

Si noti che in questa combinazione lineare sono presenti $k - 1$ autovettori di f . Possiamo dunque applicare l'ipotesi induttiva, secondo cui essi sono linearmente indipendenti e dunque da (1.65) segue che

$$\begin{aligned} (\lambda_k - \lambda_1)\alpha_1 &= 0 \\ &\vdots \\ (\lambda_{k-1} - \lambda_{k-1})\alpha_{k-1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Ma, per ipotesi, gli autovalori sono *distinti*, cioè $\lambda_i \neq \lambda_j$ per ogni $i \neq j$. Quindi, in particolare, $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Allora da (1.66) segue che $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Sostituendo tali valori nella combinazione lineare di partenza (1.63) arriviamo a

$$\alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

da cui, essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si ottiene che anche $\alpha_k = 0$. \square

Prima di proseguire con lo studio degli autospazi, torniamo un momento sul concetto di somma diretta. Abbiamo in precedenza detto cosa significa effettuare la somma di due sottospazi vettoriali e cosa significa che tale somma è diretta. In particolare, abbiamo dimostrato che la somma di due sottospazi W_1 e W_2 è diretta se e solo se ogni vettore di $W_1 + W_2$ si decompone in maniera unica come $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, con $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$. E se i sottospazi sono più di due?

La generalizzazione di somma è abbastanza agevole al caso di un numero finito di sottospazi W_1, W_2, \dots, W_k di uno spazio vettoriale V . Precisamente,

$$W_1 + \cdots + W_k := \{\mathbf{v} \in V \mid \exists \mathbf{w}_1 \in W_1, \dots, \mathbf{w}_k \in W_k : \mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_k\}.$$

Si verifica facilmente che il sottospazio somma non cambia se si cambia l'ordine dei sottospazi W_1, \dots, W_k . Anche per un numero finito di sottospazi si definisce la somma diretta. La definizione, che a un primo impatto può sembrare poco intuitiva, in realtà mira a far sì che anche per più di due sottospazi la somma sia diretta se e solo se ogni vettore può essere decomposto in maniera unica come somma di vettori nei rispettivi sottospazi, generalizzando così in maniera naturale quanto accadeva per due sottospazi. Più precisamente:

Definizione 1.16.12. *Dato un numero finito di sottospazi vettoriali W_1, W_2, \dots, W_k di uno spazio vettoriale V , si dice che la loro somma è diretta e verrà indicata*

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

o anche

$$\bigoplus_{i=1}^k W_i,$$

se per ogni $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ si ha che

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k) = \{\mathbf{0}\}.$$

Nel caso di più di due sottospazi, quindi, perchè la somma sia diretta, deve essere vuota l'intersezione di ognuno dei sottospazi con la somma dei restanti. È proprio questo che ci assicura l'unicità della decomposizione come nel caso della somma diretta di due sottospazi:

Proposizione 1.16.13. *La somma di un numero finito di sottospazi W_1, \dots, W_k è diretta se e solo se ogni per ogni vettore $\mathbf{v} \in W_1 + \dots + W_k$ esiste un'unica decomposizione $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k$, con $\mathbf{w}_i \in W_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che per ogni vettore $\mathbf{v} \in W_1 + \dots + W_k$ esista un'unica decomposizione $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k$, con $\mathbf{w}_i \in W_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$. Sia $\mathbf{v} \in W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k)$. Questo significa che $\mathbf{v} \in W_i$ ed $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_{i-1} + \mathbf{w}_{i+1} + \dots + \mathbf{w}_k$, per qualche $\mathbf{w}_j \in W_j, j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$. Allora

$$\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_{i-1} - \mathbf{v} + \mathbf{w}_{i+1} + \dots + \mathbf{w}_k = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}.$$

Ma per l'unicità della decomposizione di $\mathbf{0} \in W_1 + \dots + W_k$ segue che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 = \dots = \mathbf{w}_{i-1} = \mathbf{w}_{i+1} = \dots = \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$. Pertanto

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k) = \{\mathbf{0}\}.$$

Viceversa supponiamo che la somma sia diretta. Supponiamo per assurdo che esista un vettore $\mathbf{v} \in W_1 + \dots + W_k$ che ammetta due decomposizioni distinte

$$\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k = \mathbf{v} = \mathbf{w}'_1 + \dots + \mathbf{w}'_k$$

con $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}'_i \in W_i, i \in \{1, \dots, k\}$. Allora dall'uguaglianza precedente si ha

$$\mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i = (\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1) + \dots + (\mathbf{w}'_{i-1} - \mathbf{w}_{i-1}) + (\mathbf{w}'_{i+1} - \mathbf{w}_{i+1}) + \dots + (\mathbf{w}'_k - \mathbf{w}_k)$$

da cui si deduce che $\mathbf{w}_i - \mathbf{w}'_i \in W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k)$. Ma per ipotesi la somma è diretta e dunque

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k) = \{\mathbf{0}\}.$$

Quindi $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}'_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$. □

Anche per le somme di k sottospazi, con $k \geq 2$ è possibile dimostrare un analogo della formula di Grassmann. Quel che ci serve per lo studio degli autovalori, è il seguente caso particolare.

Proposizione 1.16.14. *Siano W_1, \dots, W_k sottospazi vettoriali finitamente generati di uno spazio vettoriale V , e sia, per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, B_i una base di W_i . Supponiamo che la somma di W_1, \dots, W_k sia diretta. Allora $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ è una base di $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. In particolare si ha che $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ è finitamente generato e*

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^k W_i \right) = \sum_{i=1}^k \dim(W_i).$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue la stessa linea della dimostrazione già fatta per due sottospazi, e pertanto viene lasciata come utile esercizio per il lettore. \square

Vediamo subito per quale motivo ci serviva generalizzare il concetto di somma diretta.

Proposizione 1.16.15. *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti dell'endomorfismo $f : V \rightarrow V$ e siano $V(\lambda_1), \dots, V(\lambda_k)$ gli autospazi corrispondenti. Allora la somma $V(\lambda_1) + \dots + V(\lambda_k)$ è diretta.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che l'intersezione di ogni $V(\lambda_i)$ con la somma dei restanti autospazi $V(\lambda_1) + \dots + V(\lambda_{i-1}) + V(\lambda_{i+1}) + \dots + V(\lambda_k)$ contiene solo il vettore nullo. Sia allora

$$\mathbf{v} \in V(\lambda_i) \cap (V(\lambda_1) + \dots + V(\lambda_{i-1}) + V(\lambda_{i+1}) + \dots + V(\lambda_k)).$$

Allora si ha che $\mathbf{v} \in V(\lambda_i)$ e

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \mathbf{v}_k \tag{1.67}$$

per qualche $\mathbf{v}_j \in V(\lambda_j)$, $j \neq i$. Supponiamo per assurdo che $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Allora non può accadere che $\mathbf{v}_1 = \dots = \mathbf{v}_{i-1} = \mathbf{v}_{i+1} = \dots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, perchè altrimenti dalla (1.67) avremmo che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Possiamo dunque supporre che esistano alcuni vettori $\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_h}$, tra $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k$, che siano diversi dal vettore nullo, mentre i restanti siano uguali a $\mathbf{0}$. La (1.67) quindi si riscrive

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{i_1} + \dots + \mathbf{v}_{i_h}, \tag{1.68}$$

con $i_1, \dots, i_h \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, k\}$. Si noti che i vettori che compaiono nella (1.68) sono vettori non nulli e ciascuno appartenente ad un certo autospazio. Possiamo dunque concludere che \mathbf{v} è autovettore relativo all'autovalore λ_i e ciascun \mathbf{v}_{i_p} è autovettore relativo all'autovalore λ_{i_p} . Poichè, per ipotesi, gli autovalori sono distinti, per la Proposizione 1.16.11 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_h}$ sono linearmente indipendenti, il che è in contraddizione con la (1.68). \square

1.16.1 Polinomio caratteristico

Per cercare gli autovalori di un endomorfismo $f: V \rightarrow V$, consideriamo una base $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ di V e sia $A = M_{BB}(f)$ la matrice associata ad f rispetto a tale base. Un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f se e solo se, per definizione, esiste $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che

$$f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}.$$

Dette $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le componenti di \mathbf{v} rispetto alla base B e (x'_1, \dots, x'_n) quelle di $f(\mathbf{v})$, dalla precedente uguaglianza abbiamo che

$$x'_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x'_n \mathbf{e}_n = \lambda (x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)$$

cioè

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

In conclusione possiamo dire che $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di f se e solo se esiste

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

tale che

$$AX = \lambda X,$$

o equivalentemente

$$(A - \lambda I_n)X = O \tag{1.69}$$

cioè se e solo se il sistema lineare omogeneo (1.69) ammette una soluzione $X \neq O$. Sappiamo che ciò accade se e solo se

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Queste considerazioni portano alla seguente definizione.

Definizione 1.16.16. Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e sia $A = M_{BB}(f)$ la matrice associata ad f rispetto alla base B di V . Il polinomio di grado $n = \dim(V)$

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

è detto polinomio caratteristico di f .

Prima di proseguire, occorre verificare che la definizione sia *ben posta*, cioè che il polinomio caratteristico di f non dipende dalla particolare base B scelta. Dimostriamo in realtà qualcosa di più generale. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, possiamo definire come polinomio caratteristico di A il polinomio $P(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$. Abbiamo il seguente risultato.

Lemma 1.16.17. *Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Siano A e B due matrici simili. Allora esiste $P \in GL(n)$ tale che $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$. Allora

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= \det(PBP^{-1} - \lambda I_n) = \det(PBP^{-1} - P\lambda I_n P^{-1}) \\ &= \det(P(B - \lambda I_n)P^{-1}) \stackrel{\text{per Binet}}{=} \det(P) \det(B - \lambda I_n) \det(P^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I_n). \end{aligned}$$

□

In particolare, poichè le matrici $A = M_{BB}(f)$ e $A' = M_{B'B'}(f)$ associate ad un endomorfismo f rispetto a due basi B e B' sono simili, possiamo concludere che il polinomio caratteristico di f non dipende dalla base scelta.

Riassumiamo quanto finora dimostrato:

Teorema 1.16.18. *Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora gli autovalori di f sono tutte e sole le radici in \mathbb{R} del polinomio caratteristico, cioè le soluzioni (in \mathbb{R}) dell'equazione $P(\lambda) = 0$.*

Esempio 1.16.19. *Consideriamo l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (2x - y, x - 2y)$. Usando il teorema precedente, determiniamo gli autovalori di f . La prima cosa da fare è fissare una qualsiasi base B di \mathbb{R}^2 e trovare la matrice associata ad f rispetto a tale base. Scegliamo per esempio la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Allora*

$$f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$$

$$f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$$

da cui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è dunque dato da

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 3. \end{aligned}$$

Quindi f ammette due autovalori: $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

Si noti che non è affatto detto che le radici del polinomio caratteristico siano necessariamente elementi di \mathbb{R} . Per esempio, l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definito da $f(x, y) = (-y, x)$, ha come matrice associata rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^2 la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $i, -i \in \mathbb{C}$.

Osservazione 1.16.20. *Come detto in precedenza, il polinomio caratteristico è un polinomio nella variabile λ , a coefficienti in \mathbb{R} , di grado $n = \dim(V)$. Più precisamente, si può dimostrare che*

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

1.17 Il Teorema Spettrale

Una delle ragioni dell'introduzione degli autovalori è la possibilità, in alcuni casi, di trovare una base di uno spazio vettoriale rispetto alla quale la matrice associata ad un dato endomorfismo assume una forma particolarmente semplice e facile da trattare. Cerchiamo di formalizzare questi concetti con la seguente definizione.

Definizione 1.17.1. Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ si dice diagonalizzabile se esiste una base di V formata da autovettori di f .

Si noti che se $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di V formata da autovettori di f , allora

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 \\ f(\mathbf{e}_2) &= \lambda_2 \mathbf{e}_2 \\ &\vdots \\ f(\mathbf{e}_n) &= \lambda_n \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

e quindi la matrice associata ad f rispetto a B è una matrice diagonale

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con gli autovalori (non necessariamente distinti) sulla diagonale principale.

Definizione 1.17.2. Una matrice quadrata A è detta diagonalizzabile se è la matrice associata a qualche endomorfismo diagonalizzabile.

Proposizione 1.17.3. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A è diagonalizzabile se e solo se A è simile ad una matrice diagonale.

Dimostrazione. Se A è diagonalizzabile allora $A = M_{BB}(f)$ per qualche endomorfismo $f : V \rightarrow V$ diagonalizzabile e B base di V . Quindi esiste una base B' di V formata da autovettori, cioè tale che $M_{B'B'}(f)$ sia una matrice diagonale. Dato che matrici associate ad uno stesso endomorfismo sono simili, concludiamo che $A = M_{BB}(f)$ è simile alla matrice diagonale $M_{B'B'}(f)$.

Viceversa, se A è simile ad una matrice diagonale D , allora esiste $P \in GL(n)$ tale che

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = D. \tag{1.70}$$

Definiamo l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x_1, \dots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Allora, per costruzione, A risulta essere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica B_C di \mathbb{R}^n . Per dimostrare che A è una matrice diagonalizzabile

basterà dunque provare che f è un endomorfismo diagonalizzabile. Ebbene, denotiamo con $\mathbf{e}'_j \in \mathbb{R}^n$ la j -esima colonna della matrice P^{-1} , per ciascun $j \in \{1, \dots, n\}$. Poichè $\det(P^{-1}) \neq 0$, i vettori $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ sono linearmente indipendenti, e dunque $B' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ è base di \mathbb{R}^n . Per come abbiamo costruito B' , si ha che $M_{B'B_C} = P^{-1}$. Allora per la (1.70) si ha

$$D = P \cdot A \cdot P^{-1} = M_{B_C B'} \cdot M_{B_C B_C}(f) \cdot M_{B' B_C} = M_{B' B'}(f). \quad (1.71)$$

Essendo D una matrice diagonale, la (1.71) ci dice che B' è una base di \mathbb{R}^n formata da autovettori di f . \square

Per quanto abbiamo dimostrato, quindi, *diagonalizzare* una matrice, cioè trovare (se esiste) una matrice diagonale simile a quella data, è equivalente a diagonalizzare un endomorfismo, cioè verificare se esiste una base dello spazio vettoriale formato da autovettori dell'endomorfismo. Vediamo ora di capire *come* è possibile verificare se un endomorfismo è diagonalizzabile.

Definizione 1.17.4. *Sia λ_0 un autovalore dell'endomorfismo $f : V \rightarrow V$ e $P(\lambda)$ il polinomio caratteristico di f . La molteplicità algebrica di λ_0 è l'unico numero naturale $m_a(\lambda_0)$ tale che $(\lambda - \lambda_0)^{m_a(\lambda_0)}$ divide il polinomio $P(\lambda)$ mentre $(\lambda - \lambda_0)^{m_a(\lambda_0)+1}$ non divide $P(\lambda)$. La molteplicità geometrica di λ_0 è il numero $m_g(\lambda_0) := \dim V(\lambda_0)$, dove $V(\lambda_0)$ è l'autospazio relativo a λ_0 .*

Quindi $m_a(\lambda_0)$ è la molteplicità di λ_0 come radice di $P(\lambda)$ ed è chiaramente maggiore o uguale a 1 poiché λ_0 è soluzione di $P(\lambda) = 0$.

Nell'esempio incontrato in precedenza, dove avevamo trovato $P(\lambda) = \lambda^2 - 3 = (\lambda + \sqrt{3})(\lambda - \sqrt{3})$, abbiamo due autovalori, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, ciascuno con molteplicità algebrica 1. Se, per esempio, il polinomio caratteristico di un certo endomorfismo fosse $P(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^2(\lambda - 2) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 2)^3$, avremmo due autovalori: 2 con molteplicità algebrica 2, e -2 con molteplicità algebrica 3.

I due tipi di molteplicità, algebrica e geometrica, sembrano apparentemente avere poco a che fare l'uno con l'altro. In realtà essi sono strettamente legati, come mostriamo ora.

Proposizione 1.17.5. *Sia λ_0 un autovalore dell'endomorfismo $f : V \rightarrow V$. Allora si ha*

$$m_a(\lambda_0) \geq m_g(\lambda_0) \geq 1.$$

Dimostrazione. Poichè λ_0 è un autovalore di f allora esiste almeno un autovettore, cioè un vettore non nullo che appartiene a $V(\lambda_0)$ e quindi si deve avere $m_g(\lambda_0) = \dim V(\lambda_0) \geq 1$.

Sia ora $k = m_g(\lambda_0)$. Esiste dunque una base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ di $V(\lambda_0)$, che possiamo completare ad una base $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di V . Scriviamo la matrice di f rispetto a tale base:

$$A = M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \text{????} & \text{????} & \text{????} \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \text{????} & \text{????} & \text{????} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \text{????} & \text{????} & \text{????} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \text{????} & \text{????} & \text{????} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \text{????} & \text{????} & \text{????} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \text{????} & \text{????} & \text{????} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \text{????} & \text{????} & \text{????} \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

Quindi se calcoliamo il polinomio caratteristico di f utilizzando k -volte il Teorema di Laplace applicato alla prima colonna otteniamo

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda), \quad (1.73)$$

dove $Q(\lambda)$ è un altro polinomio nella variabile λ . Se ne deduce che $(\lambda - \lambda_0)^k$ divide $P(\lambda)$. Ma, per definizione di molteplicità algebrica, $m_a(\lambda_0)$ è il più grande intero tale che $(\lambda - \lambda_0)^{m_a(\lambda_0)}$ divide $P(\lambda)$. Allora $m_a(\lambda_0) \geq k$. \square

Quindi la molteplicità algebrica è sempre maggiore o uguale a quella geometrica. Quando si ha l'uguaglianza tra le due molteplicità? Se e solo se, sotto l'ipotesi che tutte le radici del polinomio caratteristico siano numeri reali, l'endomorfismo è diagonalizzabile. È quanto dimostreremo nel prossimo teorema.

Teorema 1.17.6 (Teorema Spettrale). *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora f è diagonalizzabile se e solo se sono verificate le due seguenti proprietà*

- (i) tutte le radici del polinomio caratteristico sono numeri reali,
- (ii) per ogni autovalore λ_0 di f si ha che $m_g(\lambda_0) = m_a(\lambda_0)$.

Dimostrazione. Se f è diagonalizzabile allora esiste una base $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ di V formata da autovettori di f e, come visto in precedenza, la matrice associata ad f rispetto a B è diagonale

$$A = M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con le entrate sulle diagonale principale proprio gli autovalori di f

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 \\ f(\mathbf{e}_2) &= \lambda_2 \mathbf{e}_2 \\ &\vdots \\ f(\mathbf{e}_n) &= \lambda_n \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico è allora dato da

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda), \end{aligned}$$

e quindi le radici di $P(\lambda)$ sono proprio gli autovalori di f che, per definizione, sono elementi di \mathbb{R} . La (i) è quindi soddisfatta. Ora proviamo la (ii). Sia λ_0 un autovalore di f . Sia $k = m_g(\lambda_0) = \dim(V(\lambda_0))$ la molteplicità geometrica di λ_0 . Sia B una base di V formata da autovettori di f (esiste in quanto stiamo supponendo f diagonalizzabile). Allora k vettori di B , diciamo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono autovettori linearmente indipendenti relativi all'autovalore λ_0 , mentre i rimanenti $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ vettori di B sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$, tali che $\lambda_i \neq \lambda_0$ per ogni $i \in \{k+1, \dots, n\}$. Allora

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

da cui il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k (\lambda_{k+1} - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Possiamo dunque concludere che $(\lambda - \lambda_0)^k$ divide $P(\lambda)$ e $(\lambda - \lambda_0)^{k+1}$ non divide $P(\lambda)$, dato che $\lambda_0 \neq \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_0 \neq \lambda_n$. Pertanto $m_a(\lambda_0) = k = m_g(\lambda_0)$.

Viceversa supponiamo che le condizioni (i) e (ii) dell'enunciato siano verificate. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di f . Abbiamo precedentemente dimostrato che la somma dei relativi autospazi è diretta. Ora, la somma diretta

$$\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i) := V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$$

è un sottospazio vettoriale di V tale che

$$\begin{aligned} \dim \left(\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i) \right) &\stackrel{\text{somma diretta}}{=} \sum_{i=1}^k \dim(V(\lambda_i)) \stackrel{\text{def. di } m_g}{=} \sum_{i=1}^k m_g(\lambda_i) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sum_{i=1}^k m_a(\lambda_i) \stackrel{(i)}{=} \deg(P(\lambda)) = \dim(V) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che

$$\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i) = V.$$

Allora, detta B_i una base di $V(\lambda_i)$, per tutti gli $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

è una base di $V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k) = V$. Dato che, per definizione di autospazio, ciascun vettore di B_i è un autovettore relativo all'autovalore λ_i , concludiamo che B è una base di V formata da autovettori di f . \square

Corollario 1.17.7. *Se il polinomio caratteristico associato ad $f : V \rightarrow V$ ammette $n = \dim(V)$ radici distinte, tutte appartenenti a \mathbb{R} , allora l'endomorfismo f è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Se le radici di $P(\lambda)$ sono tutte elementi di \mathbb{R} la condizione (i) del Teorema Spettrale è verificata. Mostriamo che anche la (ii) è soddisfatta. Dato che $P(\lambda)$ ammette n radici distinte, allora

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

e ciascun autovalore ha molteplicità algebrica 1. Allora per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$ si ha

$$1 = m_a(\lambda_i) \geq m_g(\lambda_i) \geq 1,$$

da cui $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = 1$. \square

Mostriamo mediante un esempio come applicare il Teorema Spettrale. Supponiamo di voler studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $f : V \rightarrow V$ dello spazio vettoriale delle matrici simmetriche ad entrate reali

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

definito da

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Al fine di trovare il polinomio caratteristico, fissiamo una qualsiasi base di V . Si osservi che

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= L \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Essendo i vettori

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

linearmente indipendenti, concludiamo che $B := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è una base di V . Troviamo ora la matrice associata ad f rispetto alla base di B . Un calcolo immediato mostra che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

da cui si ha che

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è allora dato da

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1 - \lambda)^2.$$

L'endomorfismo f ha dunque due autovalori, corrispondenti alle due radici, entrambe reali, del polinomio caratteristico sono gli autovalori di f : 0 (con molteplicità algebrica 1) e 1 (con molteplicità algebrica 2). Troviamo ora gli autospazi associati a tali autovalori.

Partiamo con l'autospazio relativo all'autovalore 0. Si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in V(0) &\iff f(\mathbf{v}) = 0 \cdot \mathbf{v} \\ &\iff f \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x = 0, \quad y = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L(\mathbf{e}'_1),$$

dove abbiamo posto $\mathbf{e}'_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto $\{\mathbf{e}'_1\}$ è una base di $V(0)$, e quindi $m_g(0) = \dim(V(0)) = 1 = m_a(0)$. Si noti che quest'ultima informazione poteva essere dedotta anche direttamente dalla Proposizione 1.17.5, essendo in questo caso $1 = m_a(0) \geq m_g(0) \geq 1$.

Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in V(1) &\iff f(\mathbf{v}) = 1 \cdot \mathbf{v} \\ &\iff f \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ y = y \\ x = z \end{cases} \\ &\iff x = z \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} V(1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in V : x = z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= L \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= L(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3), \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $\mathbf{e}'_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}'_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pertanto $\{\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ è una base di $V(1)$, e quindi $m_g(1) = \dim(V(1)) = 2 = m_a(1)$.

Per il Teorema Spettrale concludiamo che f è diagonalizzabile e una base di V formata da autovettori di f è data da $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$.

1.18 Esercizi conclusivi

1. Si trovino autovalori e relativi autospazi degli endomorfismi di \mathbb{R}^3 rappresentati rispetto alla base $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per ciascun endomorfismo, si dica se la somma degli autospazi coincide con tutto \mathbb{R}^3 .

2. Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare una matrice P tale che $P \cdot A \cdot P^{-1}$ è una matrice diagonale.

3. Siano f e g due endomorfismi diagonalizzabili di uno spazio vettoriale V , aventi gli stessi autovalori, con le stesse molteplicità. Dimostrare che le matrici associate ad f e g rispetto ad una qualsiasi base sono simili.
4. Si consideri l'endomorfismo f di \mathbb{R}^2 che soddisfa le seguenti condizioni:

- (a) $\ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$,
- item[(b)] il vettore $\mathbf{v} = (1, 1)$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 2.

Si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica e si trovi una base rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(Suggerimento: si trovi un vettore del nucleo e lo si scriva come combinazione lineare della base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ per ottenere una relazione tra $f(\mathbf{e}_1)$ e $f(\mathbf{e}_2)$ e si trovi un'altra relazione dalla seconda condizione)

5. Si consideri l'applicazione

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

definita da

$$f(A) = A - 2A^t$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (a) Si verifichi che f è un endomorfismo
 (b) Si trovi la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 (c) Si trovino autovalori e autospazi di f ed una base per ogni autospazio
 (d) Si dica se l'endomorfismo f è diagonalizzabile ed in caso affermativo si trovi una base di autovettori.
6. Determinare se le seguenti matrici sono simili, ed in caso affermativo trovare una matrice invertibile P tale che $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Determinare se le seguenti matrici sono simili, ed in caso affermativo trovare una matrice invertibile P tale che $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Determinare se le seguenti matrici sono simili, ed in caso affermativo trovare una matrice invertibile P tale che $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Per ciascun $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $f_h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f_h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + hx_2 + x_4, hx_1 - x_4, x_1 - x_3, x_2 + 2hx_4).$$

Trovare il valore h_0 del parametro $h \in \mathbb{R}$ per il quale si ha $\dim(\ker(f_h)) = 1$. In corrispondenza di tale valore determinare $\text{Im}(f_{h_0})$ e una sua base. Infine stabilire se f_{h_0} è diagonalizzabile.

10. Sia f l'endomorfismo di \mathbb{C}^3 definito da

$$f(x, y, z) = (x - z, 2y, x + y + z)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. Stabilire se f è diagonalizzabile, ed in caso affermativo trovare una base di \mathbb{C}^3 formata da autovettori di f .

11. Sia A la seguente matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed f l'endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$f(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}.$$

Determinare gli autovalori e gli autospazi di f .

