



# Structural Stability and Limit Analysis of Structures (Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

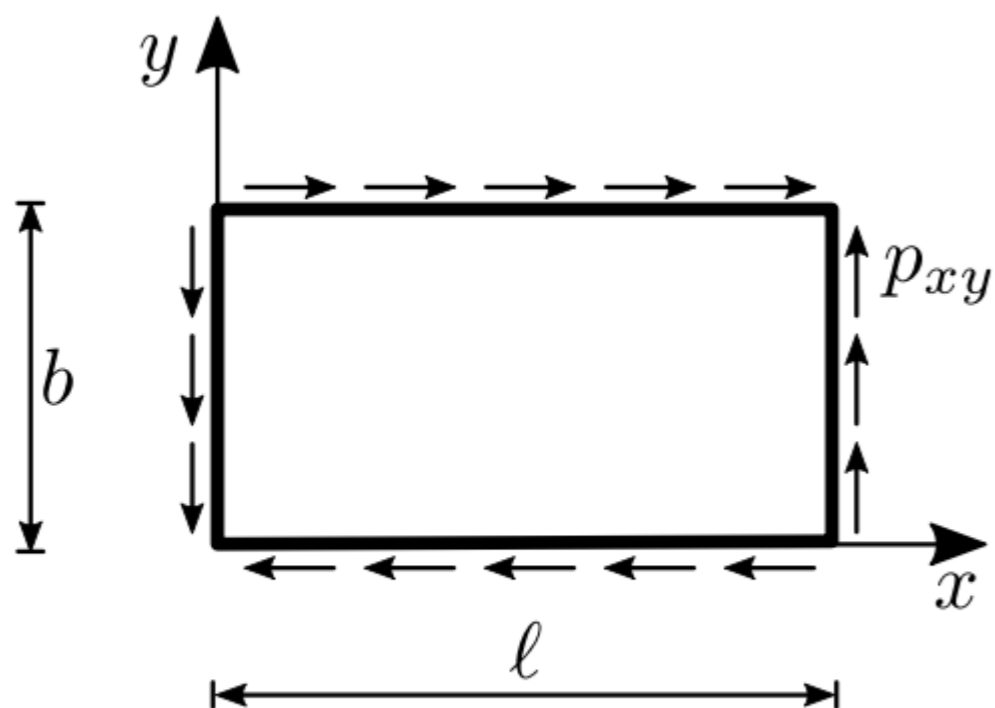
> **Lezione 17**

Buckling of a plate under shear  
(Buckling di piastre: La piastra soggetta a taglio  
uniforme)

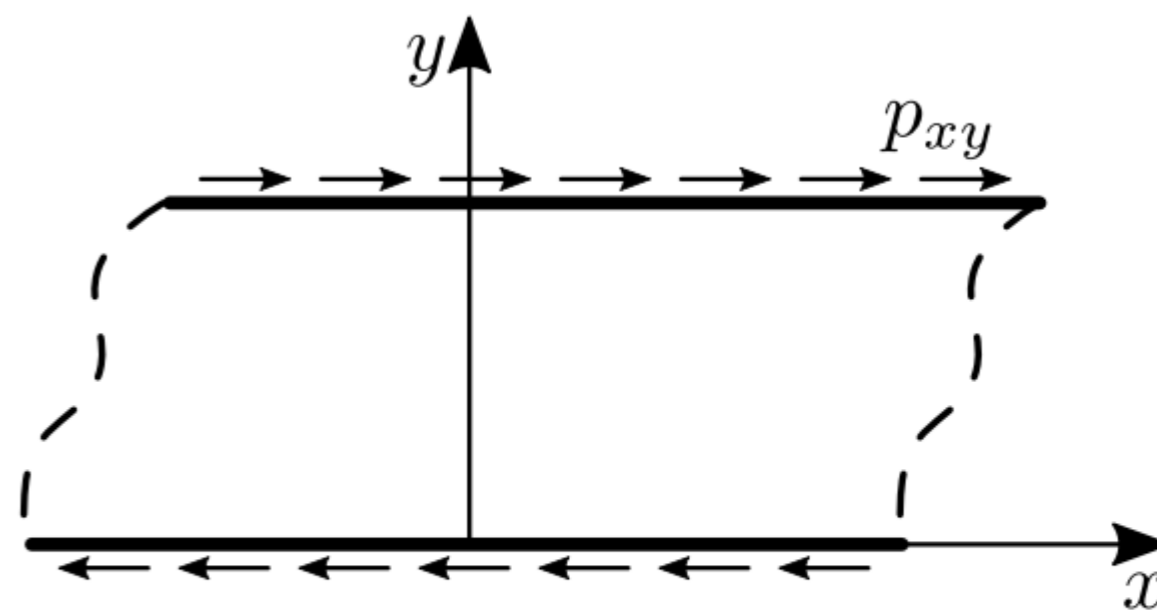
***Victor Eremeev***

victor.eremeev@unica.it

# La piastra soggetta a taglio uniforme



(a)



(b)

Piastra sollecitata a taglio uniforme:

(a) di dimensione finita, (b) infinitamente lunga.

## L'equazione indefinita di equilibrio

$$D (w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) - 2p_{xy}w_{,xy} = 0$$

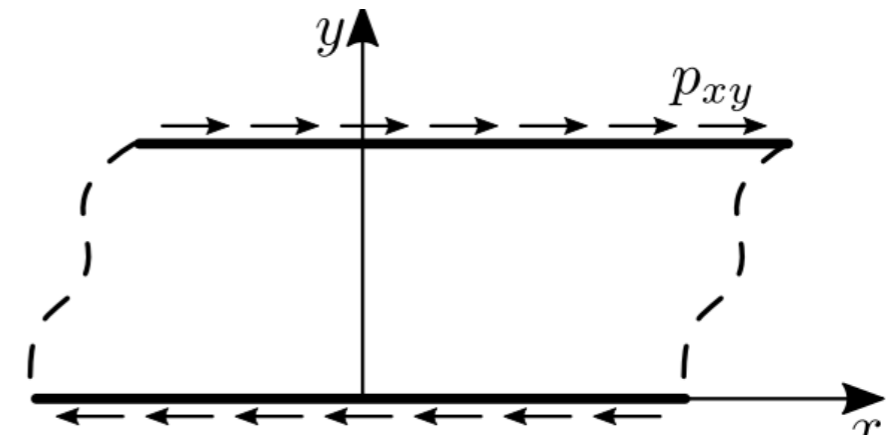
Se la piastra è appoggiata al bordo, le condizioni al contorno si scrivono:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad w_{,xx} = 0, & \quad \text{in } x = 0, \ell \\ w = 0, \quad w_{,yy} = 0, & \quad \text{in } y = 0, b \end{aligned}$$

e se è incastrata:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad w_{,x} = 0, & \quad \text{in } x = 0, \ell \\ w = 0, \quad w_{,y} = 0, & \quad \text{in } y = 0, b \end{aligned}$$

# Piastra infinitamente lunga: soluzione esatta



Se la piastra ha dimensione infinita in direzione  $x$  si può tentare una soluzione *a variabili separate in campo complesso*, ponendo:

$$w(x, y) = Y(y) \exp\left(i \frac{\gamma \pi x}{b}\right)$$

con  $Y(y) \in \mathbb{C}$  funzione a valori complessi e  $\gamma \in \mathbb{R}$  un numero reale, entrambi incogniti. Dal momento che l'equazione di campo è a coefficienti reali, se la precedente è soluzione, anche la sua complessa coniugata è soluzione, per cui, sommando le due, si ottiene:

$$w(x, y) = f(y) \cos\left(\frac{\gamma \pi x}{b}\right) - g(y) \sin\left(\frac{\gamma \pi x}{b}\right)$$

dove  $f(y) := 2\text{Re}[Y(y)]$ ,  $g(y) := 2\text{Im}[Y(y)]$ . La deformata è dunque periodica in  $x$ , di semi-periodo  $\ell_0 := \frac{b}{\gamma}$ . Il numero  $\gamma = \frac{b}{\ell_0}$  assume il significato di rapporto tra la larghezza della piastra e la semi-lunghezza d'onda. La soluzione è sovrapposizione di due diverse forme trasversali,  $f(y)$ ,  $g(y)$ , che si 'propagano' longitudinalmente in modo armonico, ma sfasate di  $\frac{\pi}{2}$ .

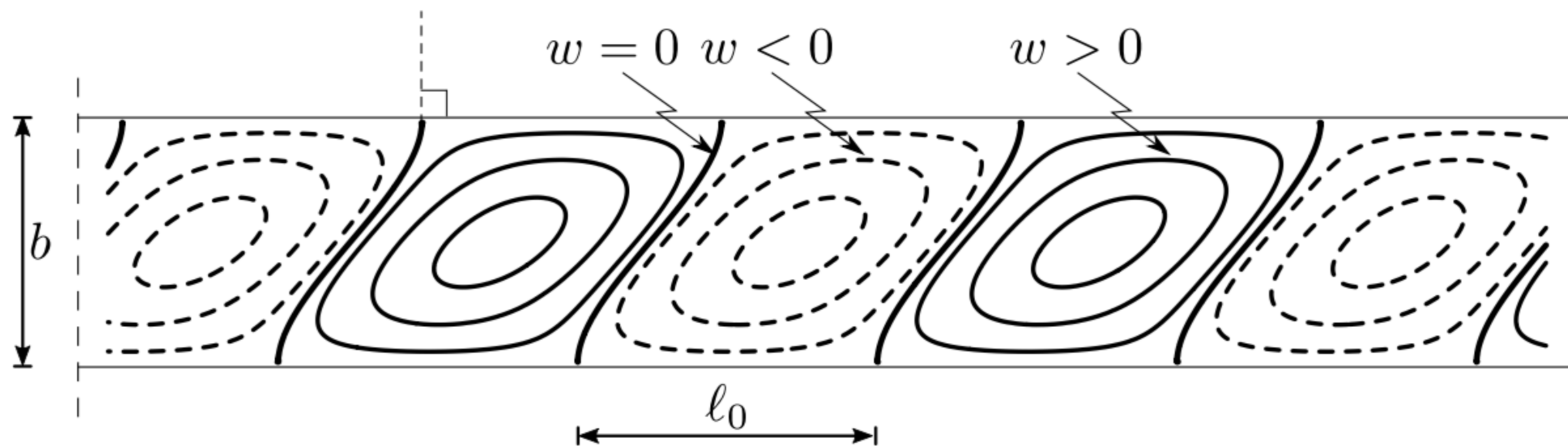
$$w(x, y) = f(y) \cos\left(\frac{\gamma\pi x}{b}\right) - g(y) \sin\left(\frac{\gamma\pi x}{b}\right)$$

$$w(x, y) = 0:$$

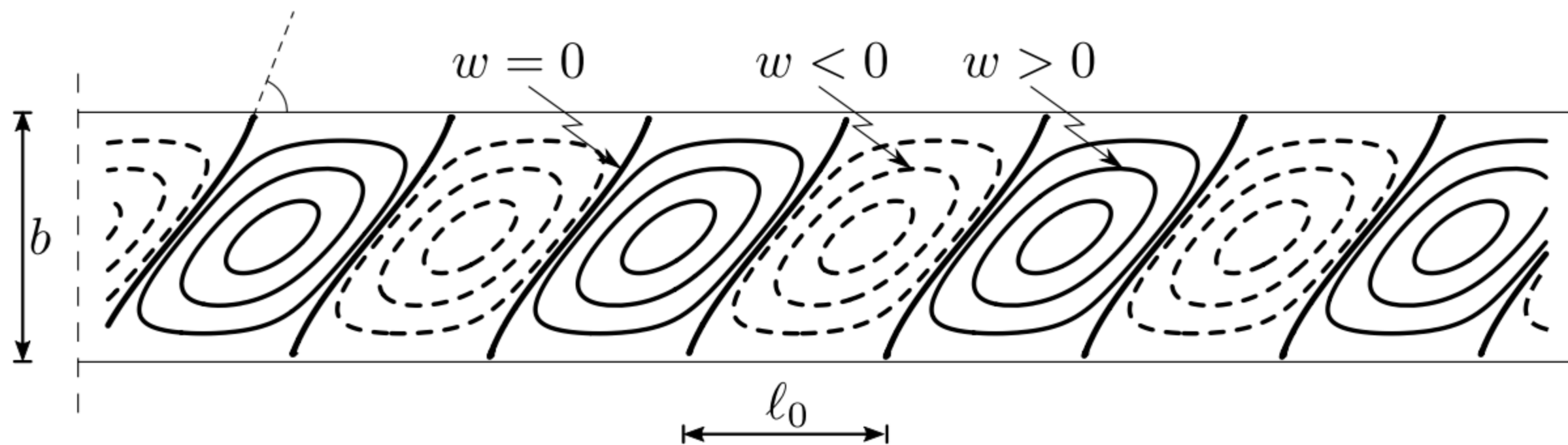
*le linee nodali della deflessione sono curve, di equazione:*

$$x = \frac{b}{\gamma\pi} \arctan\left(\frac{f(y)}{g(y)}\right)$$

Linee  $w = \text{cost}$  della piastra infinitamente lunga soggetta a taglio uniforme:



(a) piastra appoggiata,



(b) piastra incastrata

## L'algoritmo

Sostituendo  $w(x, y) = Y(y) \exp\left(i \frac{\gamma \pi x}{b}\right)$  nell'equazione di campo

$$D(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) - 2p_{xy}w_{,xy} = 0$$

si ottiene:

$$Y'''' - 2\left(\frac{\gamma \pi}{b}\right)^2 Y'' - 2i \frac{p_{xy}}{D} \left(\frac{\gamma \pi}{b}\right) Y' + \left(\frac{\gamma \pi}{b}\right)^4 Y = 0$$

Una soluzione particolare

$$Y(y) = \exp\left(\frac{\beta \pi y}{b}\right)$$

$$\beta^4 - 2\gamma^2 \beta^2 - 2i\mu\gamma\beta + \gamma^4 = 0$$

$$\mu := \frac{p_{xy} b^2}{\pi^2 D}$$

$$\beta_j = \beta_j (\gamma, \mu) \quad (j = 1, \dots, 4)$$

$$Y(y) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp\left(\frac{\beta_j (\gamma, \mu) \pi y}{b}\right)$$

Se la piastra è appoggiata

$$Y = 0, \quad Y'' = 0 \quad \text{in } y = 0, b$$

e se la piastra è incastrata

$$Y = 0, \quad Y' = 0 \quad \text{in } y = 0, b$$



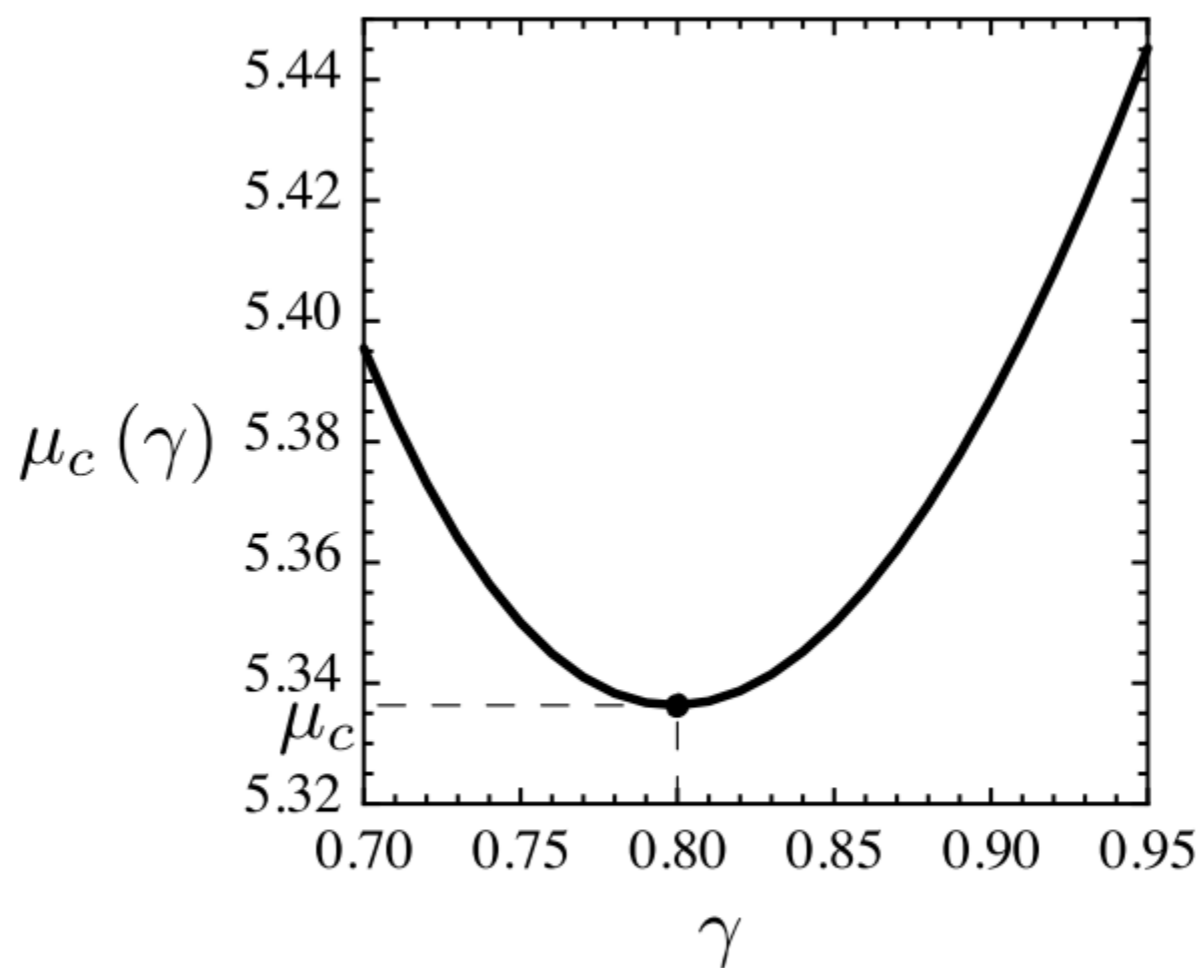
Il procedimento, alquanto laborioso, richiede l'esecuzione dei seguenti passi:

1. si fissa un valore di  $\gamma$ ;
2. si assume un valore 'di tentativo' di  $\mu$  e si risolve l'equazione quartica quindi si verifica che l'equazione caratteristica  $F(\gamma, \mu) = 0$  sia soddisfatta entro una prefissata tolleranza; se questo non è il caso, si itera su  $\mu$  fino a trovare il valore  $\mu_c(\gamma)$  che determina il carico critico corrispondente alla prefissata lunghezza d'onda;
3. si fa variare  $\gamma$  e si ripete il procedimento, fino a costruire la curva  $\mu_c(\gamma)$  in un certo intervallo; in questo, si determina il cercato valore minimo  $\mu_c$ .

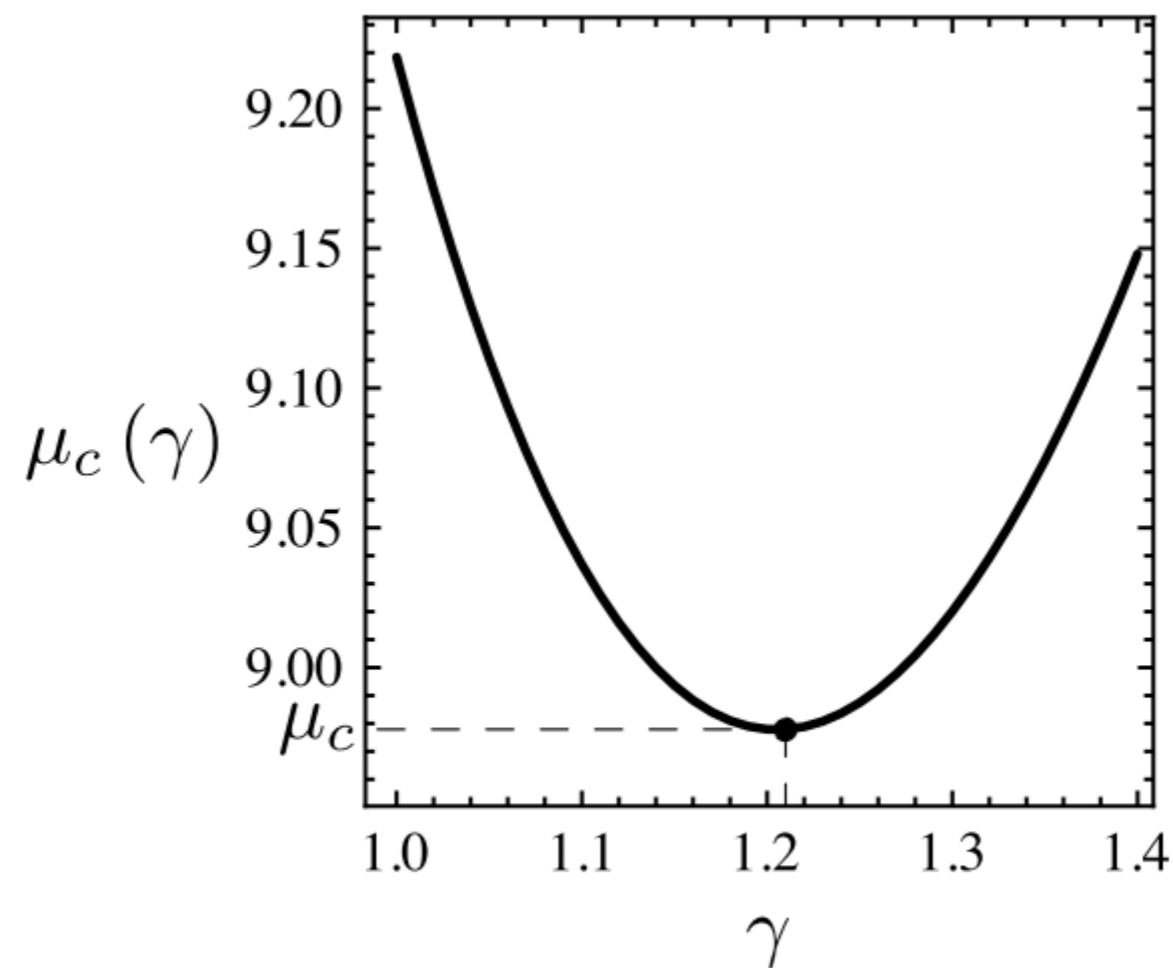
$$\beta^4 - 2\gamma^2\beta^2 - 2i\mu\gamma\beta + \gamma^4 = 0$$

# L'applicazione del metodo su descritto, conduce ai seguenti risultati

- (a) piastra appoggiata:  $\mu_c = 5.34$  (corrispondente a  $\gamma = 0.8$ ;  $\beta_1 = -1.949 + 0.932 i$ ,  $\beta_2 = -0.048 i$ ,  $\beta_3 = -1.816 i$  e  $\beta_4 = 1.949 + 0.932 i$ );
- (b) piastra incastrata:  $\mu_c = 8.98$  (corrispondente a  $\gamma = 1.21$ ;  $\beta_1 = -2.715 + 1.250 i$ ,  $\beta_2 = -0.1 i$ ,  $\beta_3 = -2.399 i$  e  $\beta_4 = 2.715 + 1.250 i$ ).



(a)



(b)

Valore critico  $\mu_c(\gamma)$  in funzione della lunghezza d'onda  $\gamma$

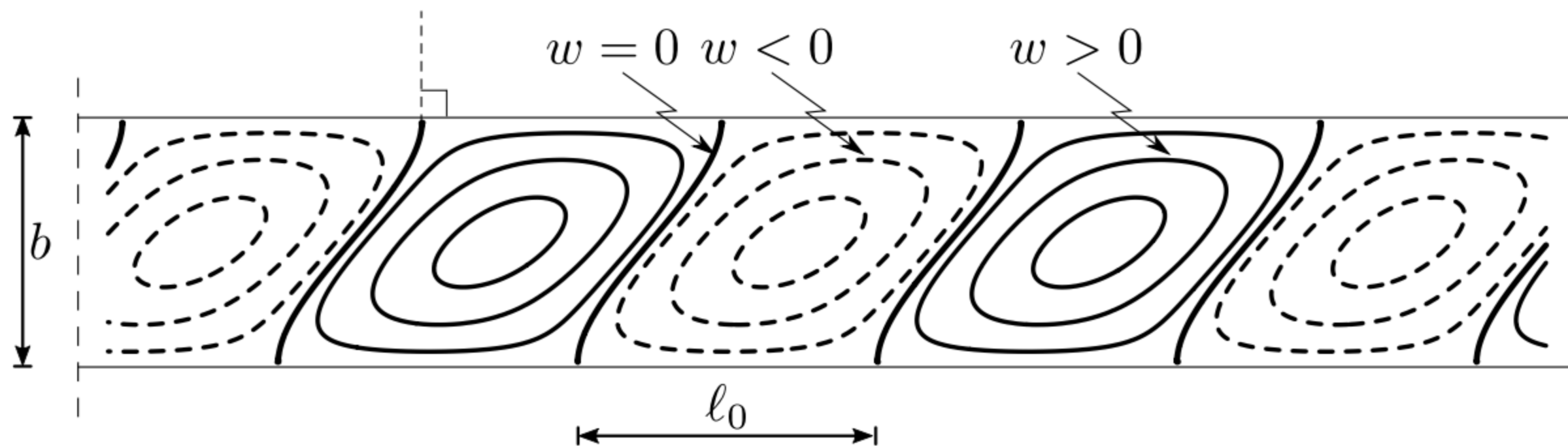
## Piastra appoggiata

$$\begin{aligned}w(x, y) = & -0.560 \cos\left(\frac{2.513x - 0.152y}{b}\right) + 0.388 \cos\left(\frac{2.513x}{b}\right) \cos\left(\frac{5.705y}{b}\right) \\ & + 0.214 \sin\left(\frac{2.513x - 0.152y}{b}\right) + 0.388 \sin\left(\frac{2.513x}{b}\right) \sin\left(\frac{5.705y}{b}\right) \\ & - \cosh\left(\frac{6.123y}{b}\right) \sin\left(\frac{2.513x}{b}\right) \left(0.171 \sin\left(\frac{2.928y}{b}\right) + 0.214 \cos\left(\frac{2.928y}{b}\right)\right) \\ & + \cosh\left(\frac{6.123y}{b}\right) \cos\left(\frac{2.513x}{b}\right) \left(0.171 \cos\left(\frac{2.928y}{b}\right) - 0.214 \sin\left(\frac{2.928y}{b}\right)\right) \\ & + \sinh\left(\frac{6.123y}{b}\right) \sin\left(\frac{2.513x}{b}\right) \left(0.173 \sin\left(\frac{2.928y}{b}\right) + 0.214 \cos\left(\frac{2.928y}{b}\right)\right) \\ & + \sinh\left(\frac{6.123y}{b}\right) \cos\left(\frac{2.513x}{b}\right) \left(0.214 \sin\left(\frac{2.928y}{b}\right) - 0.173 \cos\left(\frac{2.928y}{b}\right)\right),\end{aligned}$$

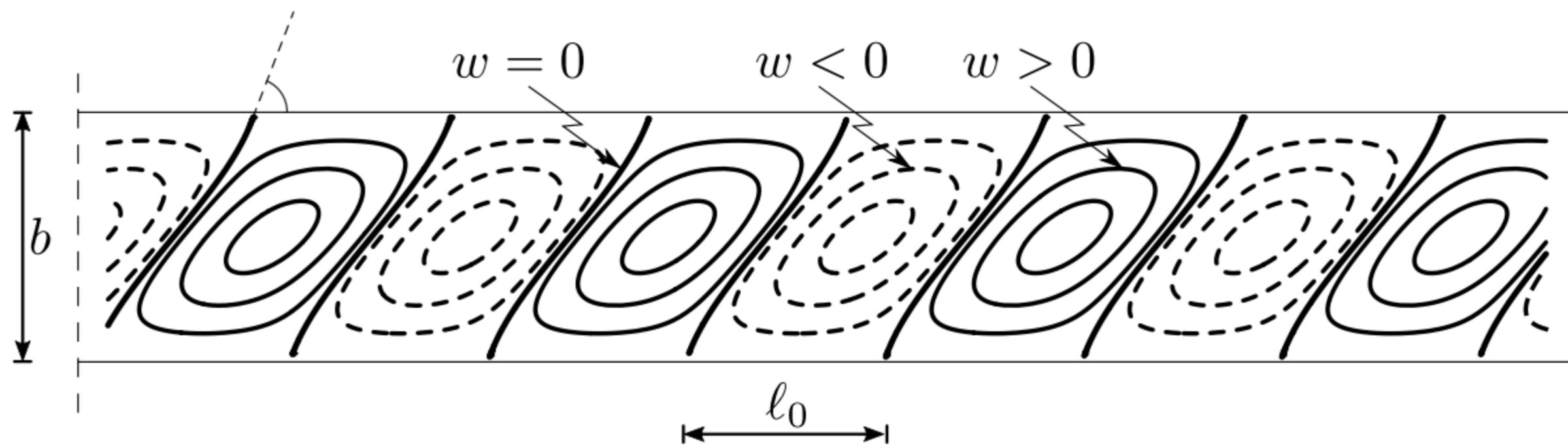
## Piastra incastrata

$$\begin{aligned}w(x, y) = & -0.535 \cos\left(\frac{3.801x - 0.314y}{b}\right) + 0.4 \cos\left(\frac{3.801x}{b}\right) \cos\left(\frac{7.537y}{b}\right) \\ & - 0.272 \sin\left(\frac{3.801x - 0.314y}{b}\right) + 0.4 \sin\left(\frac{3.801x}{b}\right) \sin\left(\frac{7.537y}{b}\right) \\ & + \cosh\left(\frac{8.53y}{b}\right) \sin\left(\frac{3.801x}{b}\right) \left(0.272 \cos\left(\frac{3.926y}{b}\right) - 0.135 \sin\left(\frac{3.926y}{b}\right)\right) \\ & + \cosh\left(\frac{8.53y}{b}\right) \cos\left(\frac{3.801x}{b}\right) \left(0.272 \sin\left(\frac{3.926y}{b}\right) + 0.135 \cos\left(\frac{3.926y}{b}\right)\right) \\ & + \sinh\left(\frac{8.53y}{b}\right) \sin\left(\frac{3.801x}{b}\right) \left(0.135 \sin\left(\frac{3.926y}{b}\right) - 0.272 \cos\left(\frac{3.926y}{b}\right)\right) \\ & - \sinh\left(\frac{8.53y}{b}\right) \cos\left(\frac{3.801x}{b}\right) \left(0.272 \sin\left(\frac{3.926y}{b}\right) + 0.135 \cos\left(\frac{3.926y}{b}\right)\right)\end{aligned}$$

Linee  $w = \text{cost}$  della piastra infinitamente lunga soggetta a taglio uniforme:



(a) piastra appoggiata,



(b) piastra incastrata

## Piastra di dimensioni finite

Poiché non esiste una soluzione in forma chiusa, bisogna ricorrere al metodo di Ritz, al fine di trasformare il problema da differenziale in algebrico. Utilizzando l'espressione dell'EPT, ed adottando funzioni di forma a variabili separabili si perviene al problema algebrico agli autovalori:

$$(\mathbf{K}_e + \mu \mathbf{K}_g) \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

$$p_{xy} \rightarrow \mu p_{xy}$$



## La piastra appoggiata

Se la piastra è semplicemente appoggiata, si possono scegliere le seguenti funzioni di forma:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

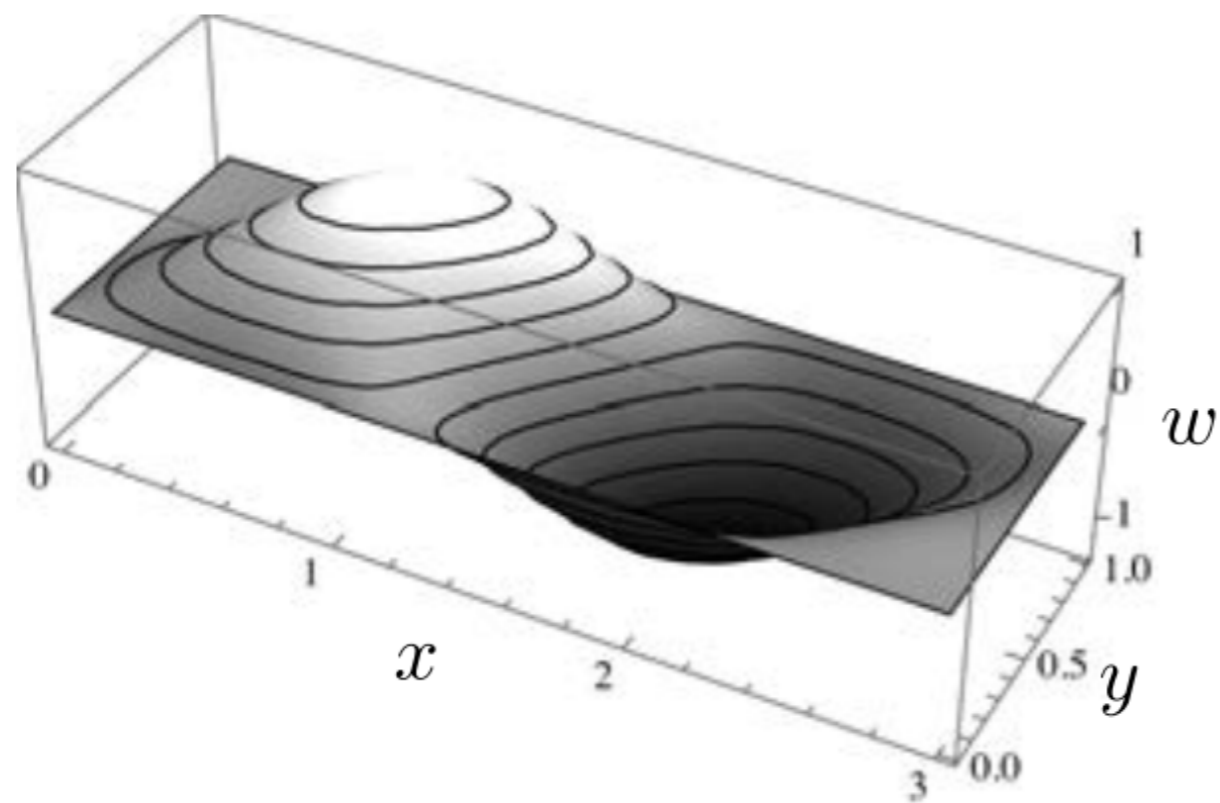
a cui corrisponde l'EPT:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \frac{\pi^4 b \ell}{4} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_{nm}^2 \left( \frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2 \\ & + 4p_{xy} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{h=1}^N \sum_{k=1}^N a_{nm} a_{hk} \frac{nmhk}{(n^2 - h^2)(k^2 - m^2)} \end{aligned}$$

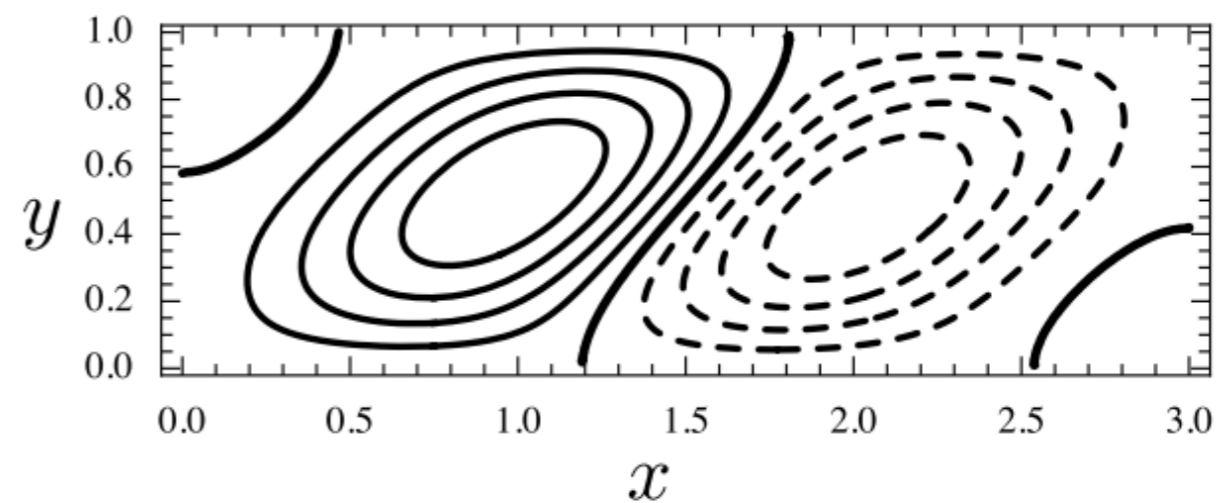
Imponendo che sia  $\frac{\partial \Pi}{\partial a_{nm}} = 0$ , si ottengono

$$D \frac{\pi^4 b \ell}{4} \left( \frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2 a_{nm} + 8p_{xy} \sum_{h=1}^N \sum_{k=1}^N a_{hk} \frac{nmhk}{(n^2 - h^2)(k^2 - m^2)} = 0, \quad n, m = 1, \dots, N$$

$\alpha = \frac{\ell}{b} = 3$ , si ottiene il carico critico adimensionale  $\mu_c = 5.84$



(a)



(b)

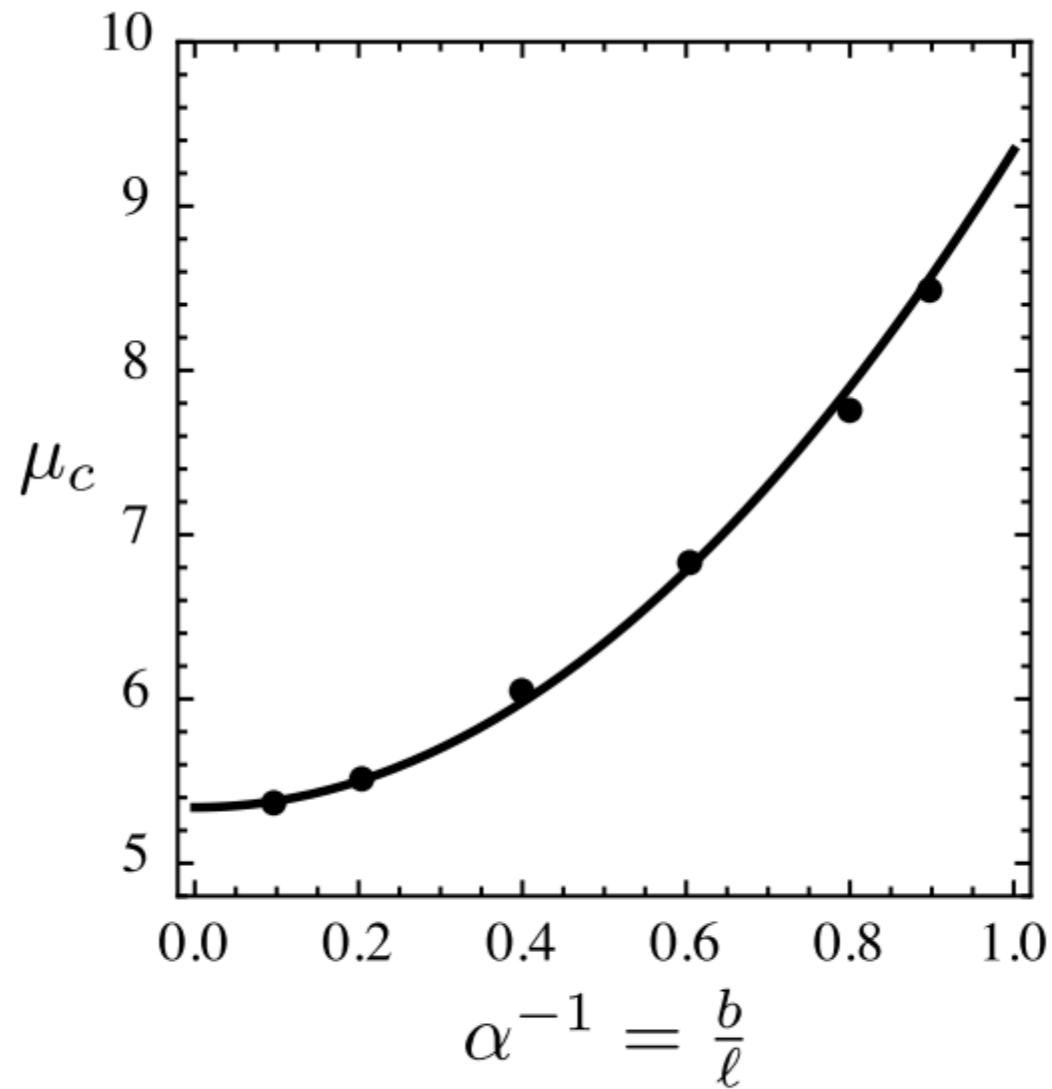
Modo critico di una piastra appoggiata di rapporto di forma  $\alpha = \frac{\ell}{b} = 3$  soggetta a taglio uniforme ( $N = 30$ ): (a) vista 3D, (b) linee di livello



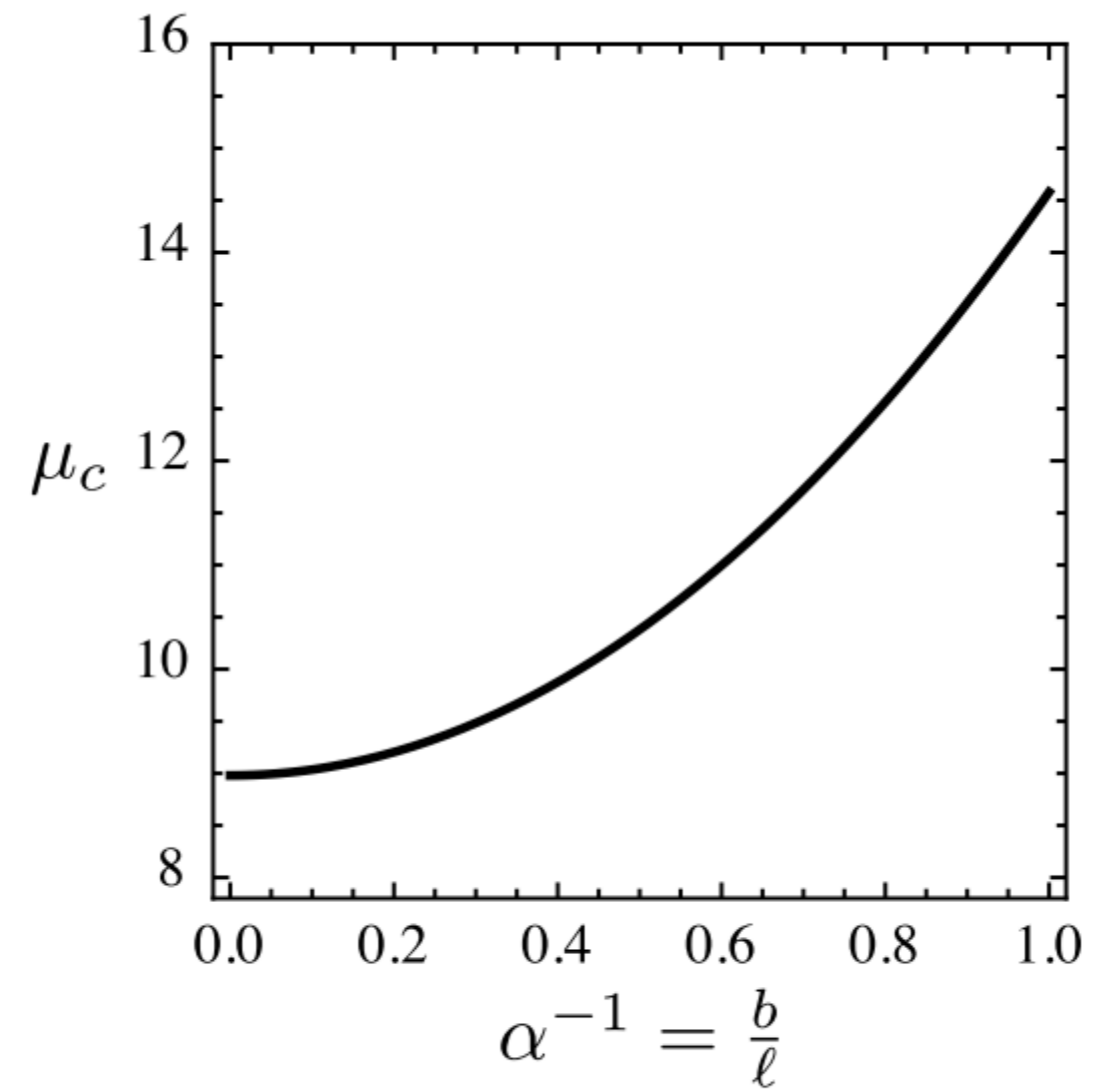
## Formule approssimate interpolanti

$$\mu_c = \begin{cases} 5.34 + \frac{4}{\alpha^2} & \text{piastra appoggiata} \\ 8.98 + \frac{5.6}{\alpha^2} & \text{piastra incastrata} \end{cases} \quad \alpha = \frac{\ell}{b}$$

Carico critico di piastre di dimensione finita, in funzione del rapporto di forma:



(a)



(b)

(a) appoggiate, (b) incastrate; interpolazione parabolica (curva continua) e metodo di Ritz (punti), con  $N = 30$ .