



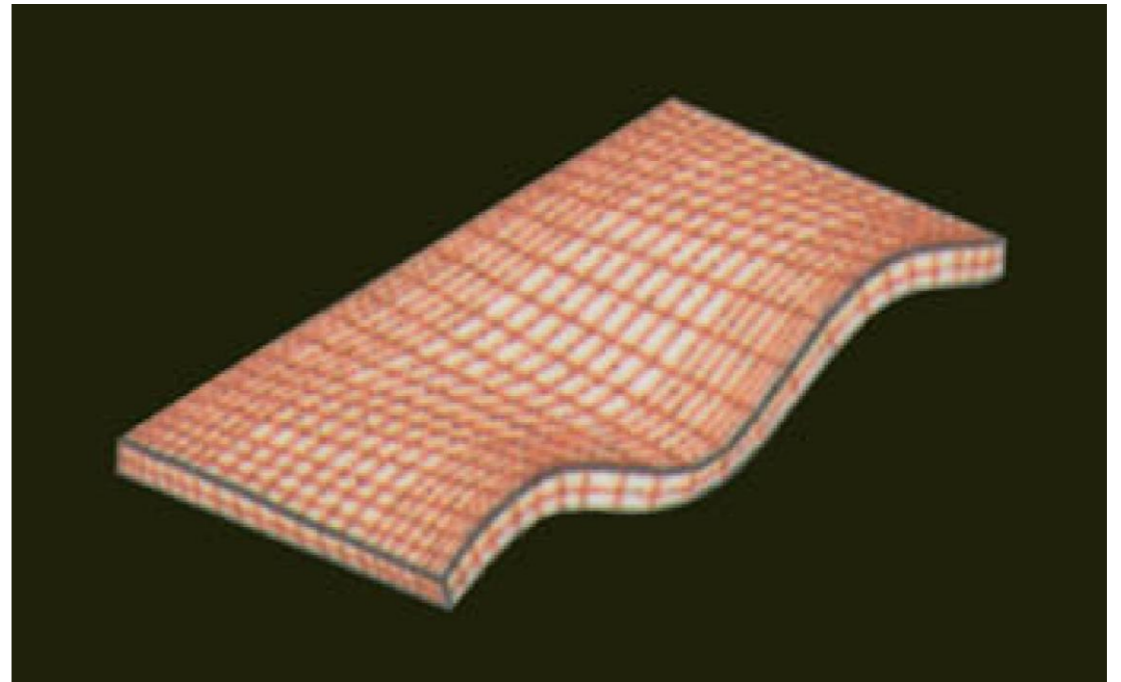
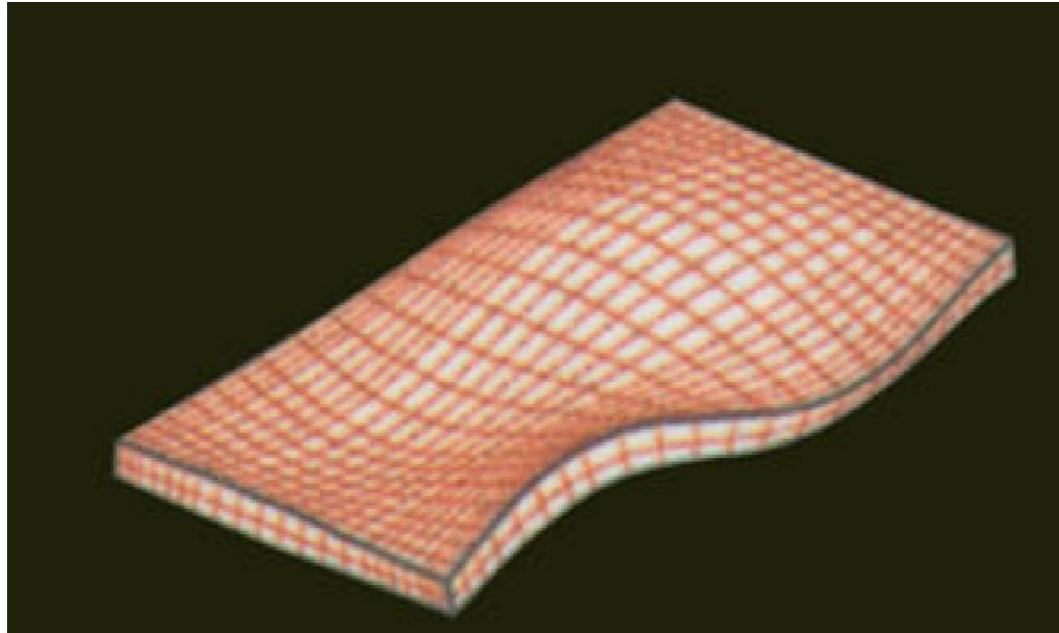
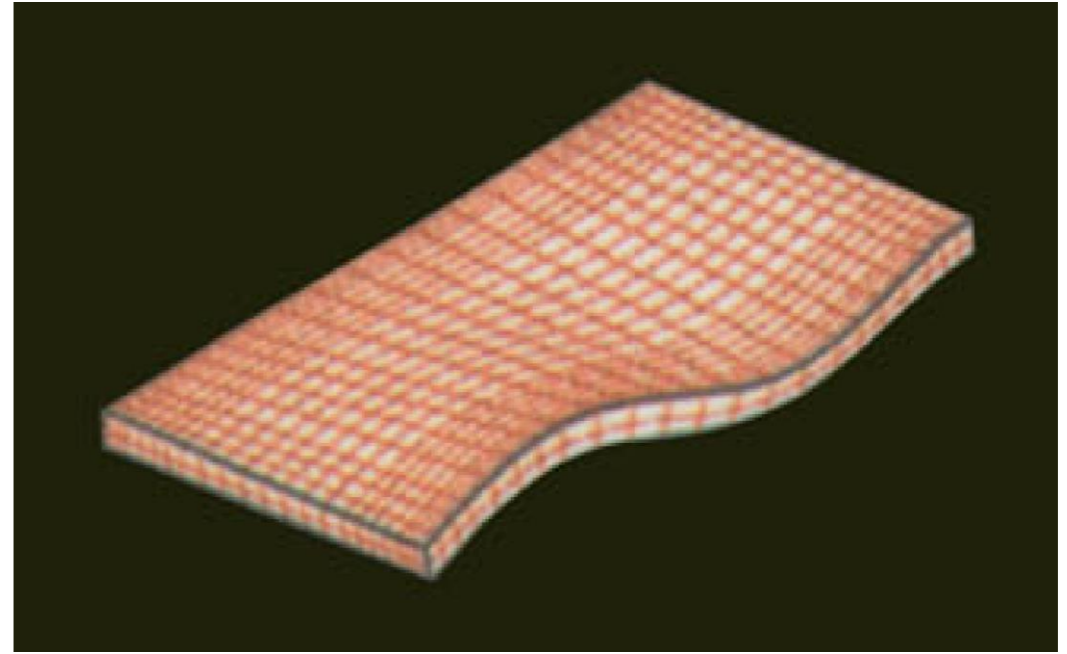
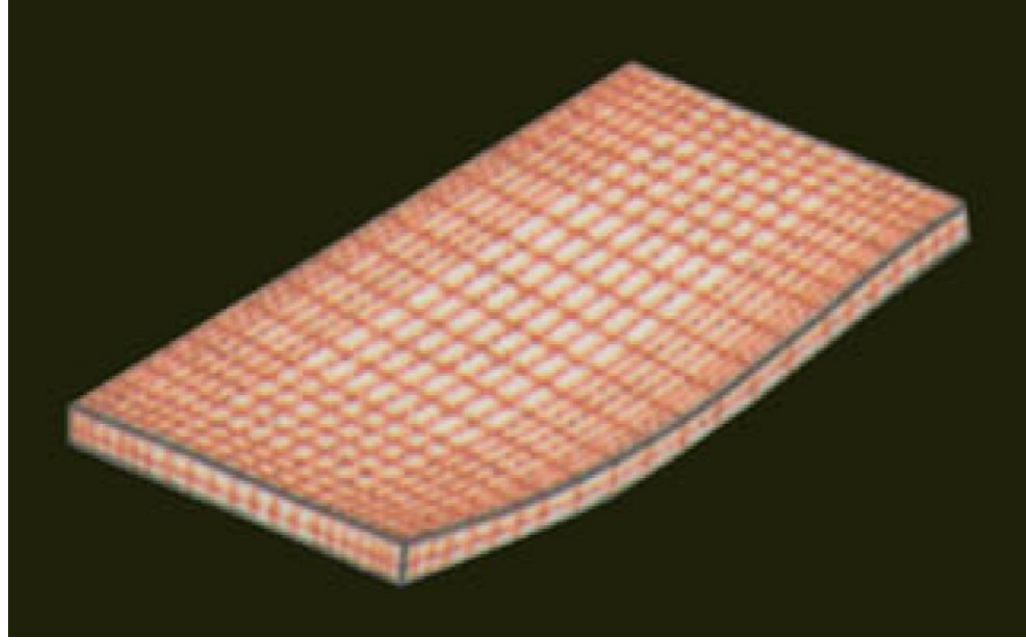
# Structural Stability and Limit Analysis of Structures (Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

> **Lezione 16**

Buckling of plates (Buckling di piastre)

***Victor Eremeev***

victor.eremeev@unica.it

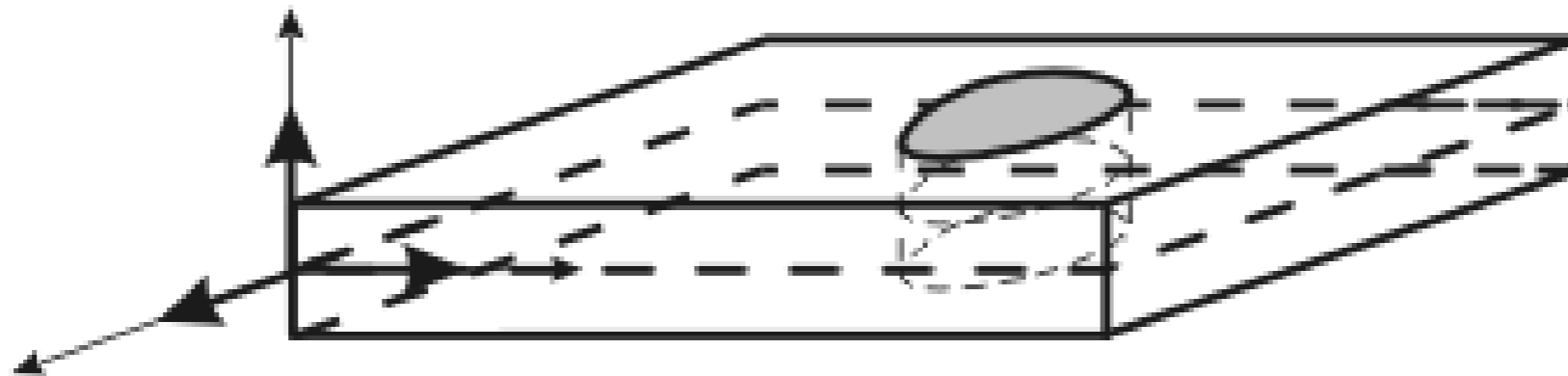


# I modelli

Per poter studiare questi fenomeni, occorre sviluppare un modello di piastra 2D, presollecitata da sforzi di membrana, immerso nello spazio 3D. Come è noto dalla teoria lineare, esistono in letteratura diversi modelli, tra i quali: (a) la piastra di Kirchhoff (isotropa o ortotropa), anche detta ‘indeformabile a taglio’, in cui si ipotizza la conservazione dell’ortogonalità tra superficie media e segmenti materiali inizialmente ad essa ortogonali; (b) la piastra di Mindlin (isotropa o ortotropa), anche detta ‘deformabile a taglio’, in cui si assume che tali segmenti possano ruotare rispetto alla superficie media; (c) *la piastra fibrata* (per definizione ortotropa), anche detta ‘graticcio a maglie infinitesime’, in cui si ammette che i momenti torcenti agenti nelle due direzioni ortogonali possano tra loro essere diversi. Per gli scopi introduttivi di questo testo, è sufficiente il più semplice modello isotropo di Kirchhoff, e dunque ci si riferirà a questo. Per trattare problemi più complessi, tuttavia, è necessario introdurre almeno l’ortotropia (si pensi ad esempio ad una piastra fittamente nervata, in una o due direzioni, che può essere modellata come omogenea, ma ortotropa).

# Il modello lineare di piastra alla Kirchhoff

La piastra è un corpo cilindrico, in cui due dimensioni (secondo gli assi  $x, y$ ) sono molto maggiori rispetto alla terza (lo spessore, nella direzione  $z$ ). La formulazione del modello, secondo l'approccio classico, è sviluppata a partire dal corpo tridimensionale, assumendo che i segmenti materiali, inizialmente paralleli all'asse  $z$ , restino rettilinei ed ortogonali al piano medio ( $x, y$ ). Qui si preferisce, invece, seguire una *formulazione diretta*, in cui la piastra è idealizzata *ab initio* come un continuo bidimensionale *polare*, fatta cioè di particelle materiali dotate di orientazione, in grado di scambiare mutuamente coppie, oltre che forze (così generalizzando concetti ben noti per la trave 1D).

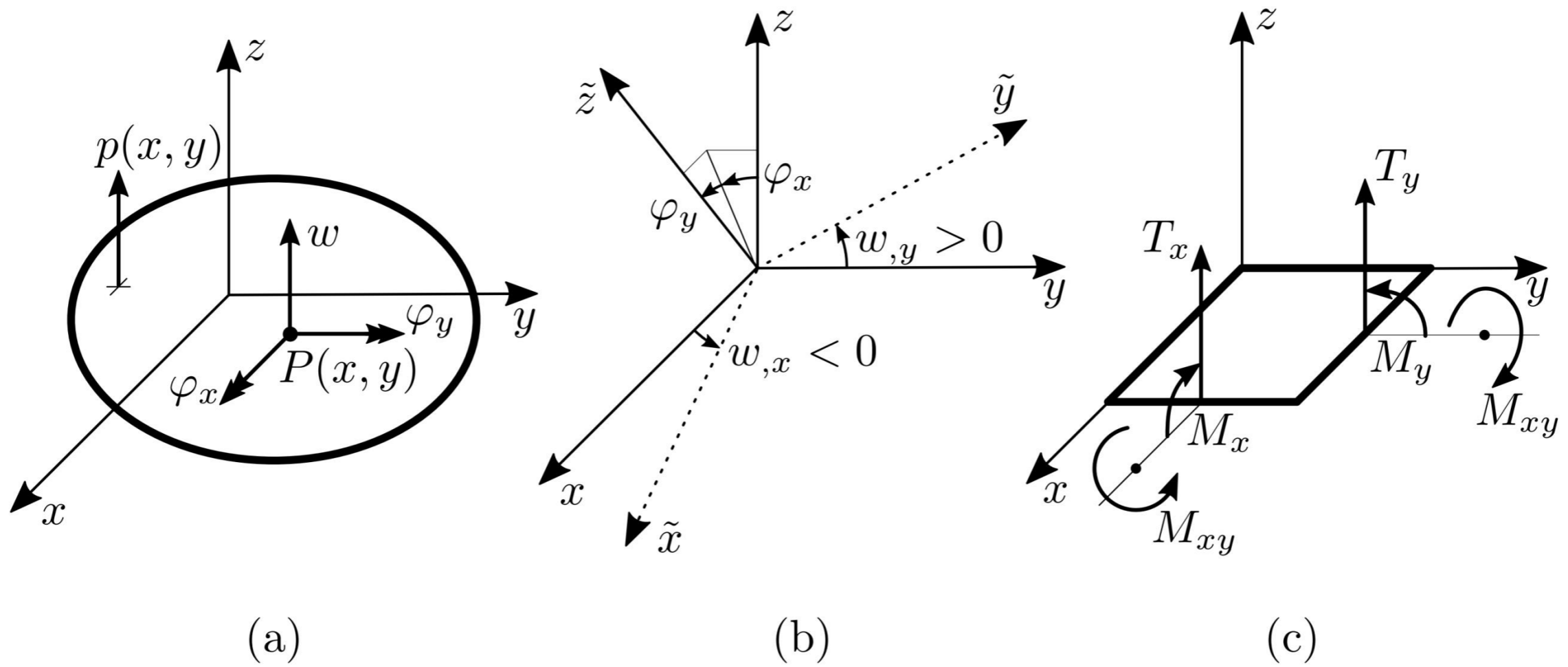


# La cinematica

Si consideri la piastra nel suo stato naturale, in cui tutti i suoi punti  $P(x, y)$  giacciono nel piano, e successivamente in una configurazione deformata leggermente deflessa, in cui i punti  $P$  subiscono spostamenti  $w(x, y)$  ortogonali al piano, e rotazioni  $\varphi_x, \varphi_y$ , ordinatamente rispetto agli assi  $x, y$ . Nel modello indeformabile a taglio, tuttavia, le rotazioni non costituiscono variabili di configurazione indipendenti, ma sono legate alla deflessione dalle relazioni

$$\varphi_x = w_{,y}, \quad \varphi_y = -w_{,x}$$

cosicché  $w(x, y)$  è l'unico descrittore cinematico.



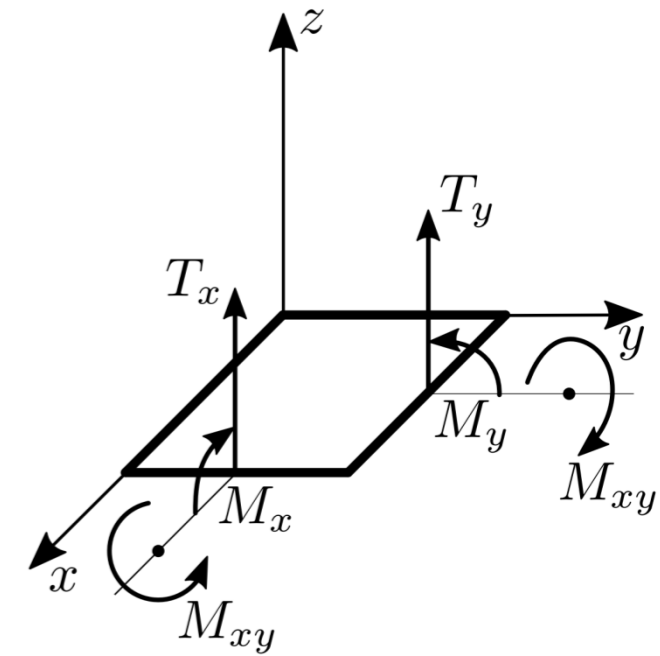
**Figura** Modello bidimensionale di piastra: (a) spostamenti, (b) indeformabilità a taglio, (c) sollecitazioni.

Si definiscono le seguenti deformazioni (lineari):

$$\boldsymbol{\kappa} := \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{pmatrix}$$

in cui:  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  sono rispettivamente la *curvatura flessionale* secondo  $x$  ed  $y$ , rispettivamente, e  $\kappa_{xy}$  è la *curvatura torsionale*. Le curvature flessionali sono identiche a quelle di una trave Eulero-Bernoulli orientata secondo l'asse  $x$  oppure  $y$ , e dunque positive quando le curve rivolgono la concavità verso il semiasse positivo di  $z$ . La curvatura torsionale è invece la *somma* delle curvature torsionali di due strisce (travi) ortogonali concorrenti nel punto  $P$ , uguali in modulo, ma prese l'una positiva antioraria, l'altra positiva oraria

# Le sollecitazioni ed il legame elastico

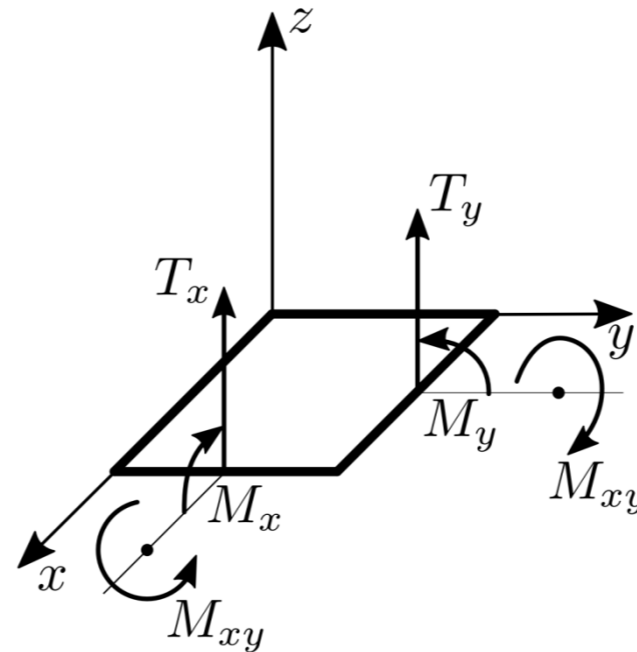


## Le sollecitazioni

Alle deformazioni sono associate le sollecitazioni duali (aventi dimensioni fisiche di un momento per unità di lunghezza, e dunque di una forza):

$$\mathbf{m} := \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix}$$

in cui:  $M_x$ ,  $M_y$  sono rispettivamente il *momento flettente* secondo  $x$  ed  $y$ , ed  $M_{xy}$  è il *momento torcente* (Fig. ). Il momento flettente secondo  $x$  (o  $y$ ) rappresenta la coppia interna flettente che agisce in una striscia, di larghezza unitaria, orientata secondo l'asse  $x$  (o  $y$ ), positivo se 'tende' le fibre che giacciono nel semispazio  $z < 0$ . Il momento torcente rappresenta l'intensità di *due* coppie interne torcenti, uguali ed opposte, agenti l'una in una striscia in direzione  $x$  (positiva se antioraria), l'altra nella striscia in direzione  $y$  (positiva se oraria)



Oltre alle *sollecitazioni attive*  $m$ , sono presenti anche *sollecitazioni reattive*  $t := (T_x \quad T_y)^T$  che rappresentano gli sforzi di taglio nelle due direzioni, positivi se concordi con l'asse  $z$ , quando agenti sulle facce positive dell'elemento di piastra (le cui normali uscenti sono concordi con gli assi  $x, y$ , Fig. ). Queste, tuttavia, spendendo lavoro nullo negli scorrimenti (inibiti) della piastra indeformabile a taglio, non appaiono nella formulazione variazionale, che fornisce equazioni di equilibrio condensate, *pure* negli spostamenti. La loro considerazione, tuttavia, è importante, ai fini dell'interpretazione delle condizioni al contorno, *pure* fornite dal processo variazionale.

## Il legame elastico isotropo

Si assume, tra sollecitazioni e deformazioni, un legame iper-elastico lineare isotropo:

$$\mathbf{m} = \mathbf{E}\boldsymbol{\kappa}$$

dove la *matrice elastica* è:

$$\mathbf{E} := D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

In questa,  $\nu$  è il fattore di Poisson, e:

$$D := \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

è la *rigidezza flessionale della piastra*, in cui  $E$  è il modulo di Young ed  $h$  lo spessore.

Questo legame discende direttamente da quello relativo allo stato elastico piano di tensione , in cui l'accoppiamento tra le tensioni normali (e dunque

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

avendo tenuto conto che il modulo elasticità tangenziale si scrive  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

**OSSERVAZIONE** Il legame tra momenti flettenti e curvature, nel caso  $\nu = 0$ , riproduce esattamente quello di una trave, di sezione rettangolare  $1 \times h$ , per la quale la rigidezza flessionale è  $EI = \frac{Eh^3}{12}$ . Il fattore irrigidente,  $\frac{1}{1-\nu^2}$ , è dovuto alla *dilatazione laterale impedita delle strisce inflesse*, causata dalla presenza delle strisce adiacenti, che esercitano un'azione di confinamento.

## L'energia potenziale elastica e le equazioni di equilibrio

Le equazioni di equilibrio della piastra, soggetta a forze trasversali  $p(x, y)$ , sono qui derivate attraverso un procedimento variazionale. La densità (per unità di area) dell'energia potenziale elastica, tenuto conto del legame , si scrive:

$$e = \frac{1}{2} \mathbf{m}^T \boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\kappa} = \frac{D}{2} \left[ \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu \kappa_x \kappa_y + \frac{1-\nu}{2} \kappa_{xy}^2 \right]$$

da cui, usando le relazioni di congruenza (9.2) segue:

$$e = \frac{D}{2} \left[ w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\nu) w_{,xy}^2 \right]$$

L'energia potenziale totale (EPT) è somma dell'energia potenziale elastica  $U = \iint_{\Omega} e \, dx \, dy$ , dove  $\Omega$  è il dominio piano occupato dalla piastra, e dell'energia potenziale dei carichi. È dunque:

$$\Pi = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left[ w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\nu) w_{,xy}^2 \right] \, dx \, dy - \iint_{\Omega} p w \, dx \, dy$$



Eguagliando a zero la variazione prima dell'EPT, si ha:

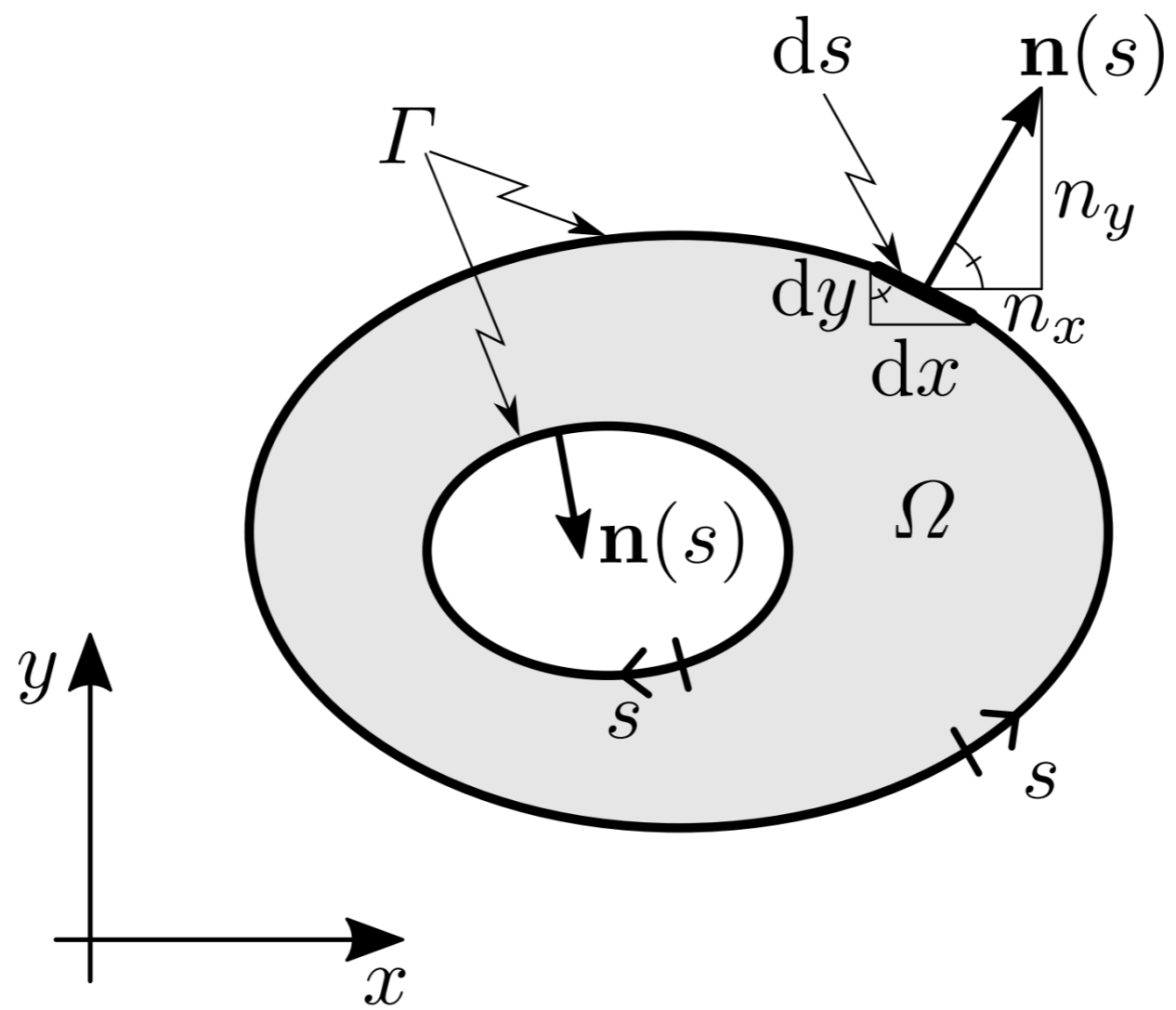
$$\delta\Pi = D \iint_{\Omega} [(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,xx} + (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,yy} + 2(1 - \nu) w_{,xy} \delta w_{,xy}] dx dy - \iint p \delta w dx dy = 0, \quad \forall \delta w$$

Per 'liberare' le variazioni dalle derivate, occorre integrare per parti, facendo uso della formula di Green :

$$\iint_{\Omega} f g_{,j} dx dy = - \iint_{\Omega} g f_{,j} dx dy + \oint_{\Gamma} f g n_j ds$$

in cui  $n_j$  sono i coseni direttori della normale uscente dal dominio, e  $s$  è un'ascissa curvilinea su  $\Gamma$  (Fig. ) orientata in modo da lasciare a sinistra il dominio. Equivalentemente, tenuto conto che  $n_x ds = dy$  e  $n_y ds = -dx$  può scriversi:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f g_{,x} dx dy &= - \iint_{\Omega} g f_{,x} dx dy + \oint_{\Gamma} f g dy \\ \iint_{\Omega} f g_{,y} dx dy &= - \iint_{\Omega} g f_{,y} dx dy - \oint_{\Gamma} f g dx \end{aligned}$$



Integrando l'equazione due volte per parti si ottiene:

$$\delta \Pi = \iint_{\Omega} [D (w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) - p] \delta w \, dx \, dy$$
$$+ \oint_{\Gamma} D [\dots] \, ds = 0, \quad \forall \delta w$$

dove i termini al contorno verranno esplicitati in seguito.

# L'equazione di campo

$$D (w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) = p$$

che, in forma operatoriale, si scrive:

$$D \mathcal{K}_e w = p$$

in cui:

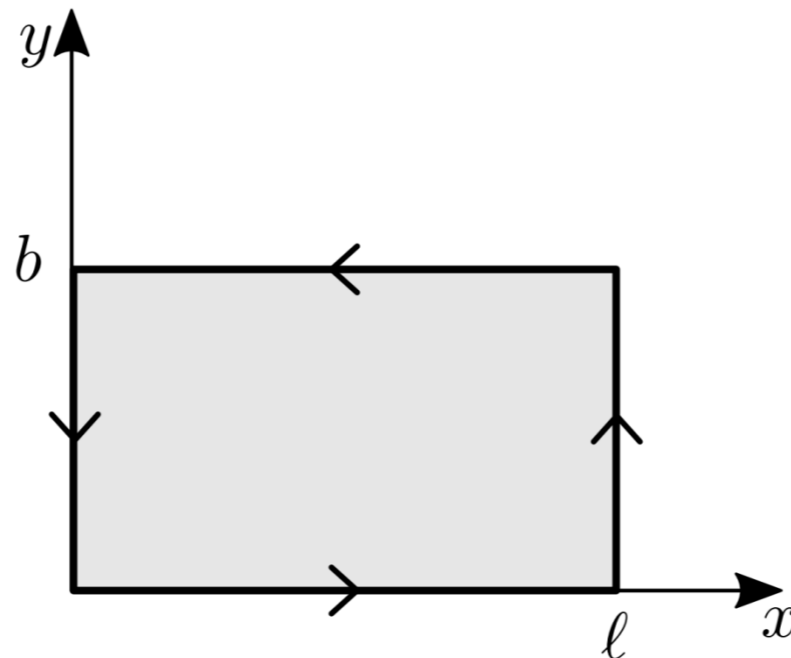
$$\mathcal{K}_e := \partial_{xxxx}^4 + 2\partial_{xxyy}^4 + \partial_{yyyy}^4 \equiv \nabla^4$$

è l'*operatore di rigidezza elastica della piastra*.

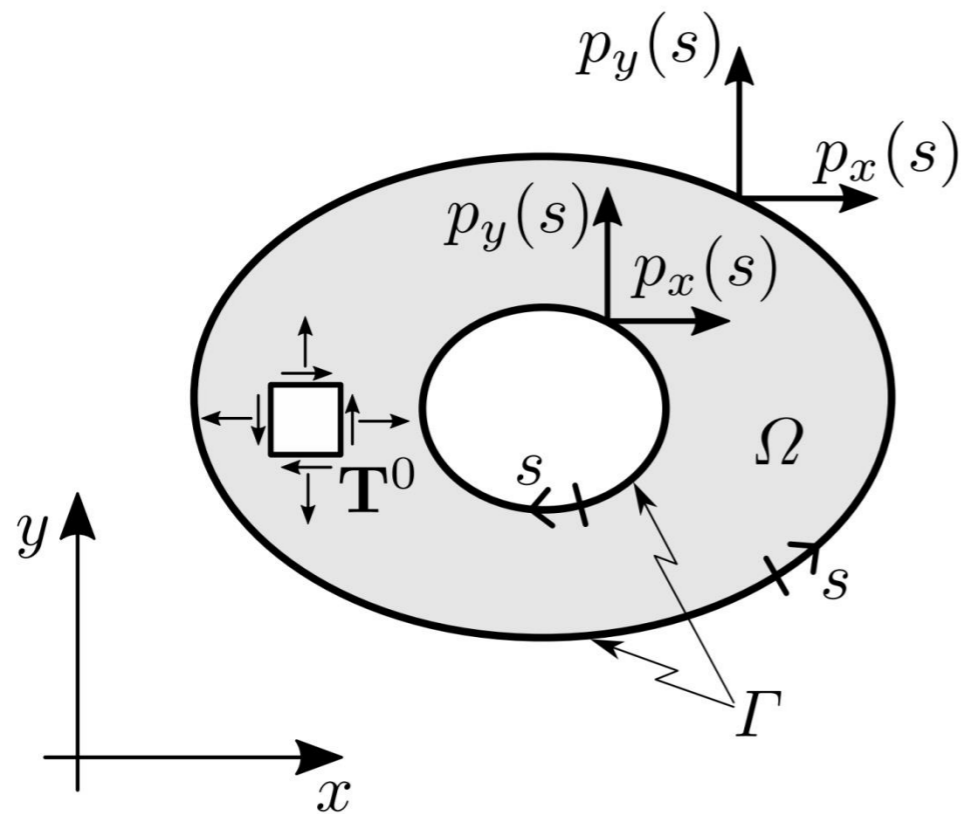
# Le condizioni al contorno

Limitandosi a considerare piastre rettangolari,

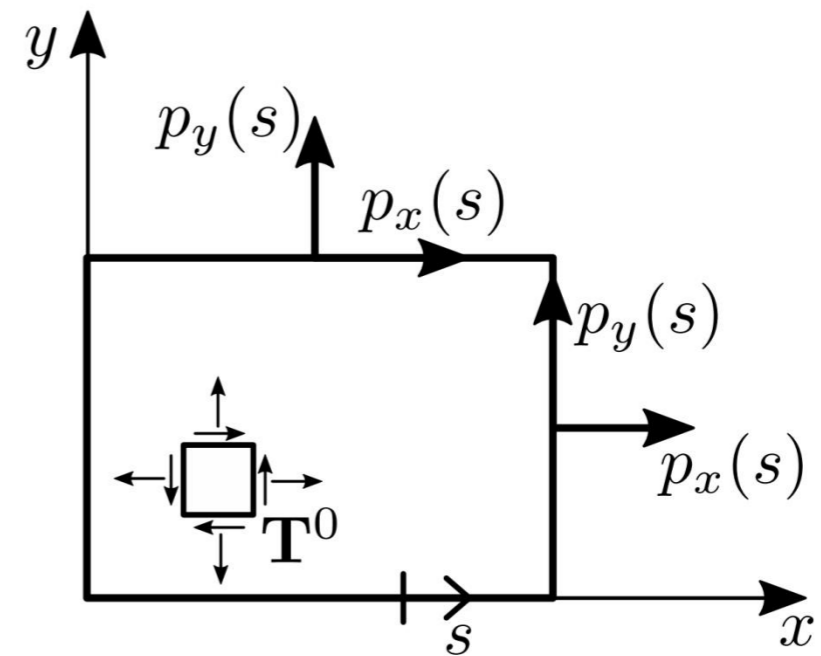
$$\begin{aligned}
 D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,x} &= 0, & \text{in } x = 0, \ell \\
 D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,y} &= 0, & \text{in } y = 0, b \\
 - D (w_{,xxx} + (2 - \nu) w_{,xyy}) \delta w &= 0, & \text{in } x = 0, \ell \\
 - D (w_{,yyy} + (2 - \nu) w_{,xxy}) \delta w &= 0, & \text{in } y = 0, b \\
 2D (1 - \nu) w_{,xy} \delta w &= 0, & \text{in } (0, 0), (\ell, 0), \\
 & & (\ell, b), (0, b)
 \end{aligned}$$



# La piastra presollecitata nel piano



(a)



(b)

**Figura** Piastra presollecitata da forze di bordo agenti nel piano: (a) di forma generica, (b) rettangolare.

# La piastra presollecitata nel piano

Qui ci si limita a considerare piastre presollecitate da forze (Fig. ): (a) contenute nel piano, e, (b) agenti esclusivamente al bordo,  $p_x(s)$ ,  $p_y(s)$  (sono cioè nulle le forze di volume). Le forze inducono una sollecitazione puramente membranale, descritta dal tensore di sforzo:

$$\mathbf{T}^0 = \begin{bmatrix} N_x^0 & N_{xy}^0 \\ N_{xy}^0 & N_y^0 \end{bmatrix}$$

in cui  $N_x^0(x, y)$ ,  $N_y^0(x, y)$  sono sforzi normali e  $N_{xy}^0(x, y)$  il taglio di membrana (tutte forze per unità di lunghezza), generalmente variabili nel dominio. Gli sforzi soddisfano le equazioni indefinite di equilibrio (omogenee):

$$\begin{aligned} N_{x,x}^0 + N_{xy,y}^0 &= 0, \\ N_{xy,x}^0 + N_{y,y}^0 &= 0, \end{aligned} \quad \text{in } \Omega$$

e le condizioni di equilibrio al contorno (non omogenee):

$$\begin{aligned} N_x^0 n_x + N_{xy}^0 n_y &= p_x, \\ N_{xy}^0 n_x + N_y^0 n_y &= p_y, \end{aligned} \quad \text{su } \Gamma$$



## L'energia di presollecitazione

Agli sforzi compete l'energia di presollecitazione:

$$U^0 = \iint_{\Omega} \left[ N_x^0 \varepsilon_x^{(2)} + N_y^0 \varepsilon_y^{(2)} + N_{xy}^0 \gamma_{xy}^{(2)} \right] dx dy \quad (9.29)$$

in cui  $\varepsilon_x^{(2)}$ ,  $\varepsilon_y^{(2)}$ ,  $\gamma_{xy}^{(2)}$  sono le componenti del secondo ordine delle deformazioni incrementali. Utilizzando il tensore di Green-Lagrange e tenendo conto che l'unico spostamento diverso da zero è quello trasversale  $w$ , si ha:

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2} w_{,x}^2,$$

$$\varepsilon_y^{(2)} = \frac{1}{2} w_{,y}^2,$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = w_{,x} w_{,y}$$

Conseguentemente:

$$U^0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ N_x^0 w_{,x}^2 + N_y^0 w_{,y}^2 + 2N_{xy}^0 w_{,x} w_{,y} \right] dx dy$$

## L'operatore di rigidità geometrica

La variazione prima dell'energia, si scrive:

$$\delta U^0 = \iint_{\Omega} [(N_x^0 w_{,x} + N_{xy}^0 w_{,y}) \delta w_{,x} + (N_{xy}^0 w_{,x} + N_y^0 w_{,y}) \delta w_{,y}] dx dy$$

e, integrando per parti:

$$\begin{aligned} \delta U^0 = & - \iint_{\Omega} [(N_x^0 w_{,x} + N_{xy}^0 w_{,y})_{,x} + (N_{xy}^0 w_{,x} + N_y^0 w_{,y})_{,y}] \delta w dx dy \\ & + \oint_{\Gamma} [(N_x^0 w_{,x} + N_{xy}^0 w_{,y}) n_x + (N_{xy}^0 w_{,x} + N_y^0 w_{,y}) n_y] \delta w ds \end{aligned}$$

si scrive anche:

$$\delta U^0 = - \iint_{\Omega} (N_x^0 w_{,xx} + 2N_{xy}^0 w_{,xy} + N_y^0 w_{,yy}) \delta w \, dx \, dy \\ + \oint_{\Gamma} (p_x w_{,x} + p_y w_{,y}) \delta w \, ds$$

Posto  $\delta U^0 = \iint_{\Omega} \delta w \mathcal{K}_g w \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \delta w \mathcal{B}_g w \, ds$ , si ottengono gli *operatori di rigidità geometrica* della piastra di Kirchhoff, nel dominio:

$$\mathcal{K}_g := - (N_x^0 \partial_{xx}^2 + 2N_{xy}^0 \partial_{xy}^2 + N_y^0 \partial_{yy}^2)$$

ed al contorno:

$$\mathcal{B}_g := p_x \partial_x + p_y \partial_y$$

## Le equazioni di equilibrio della piastra presollecitata

L'equilibrio indefinito della piastra presollecitata è governato dal problema:

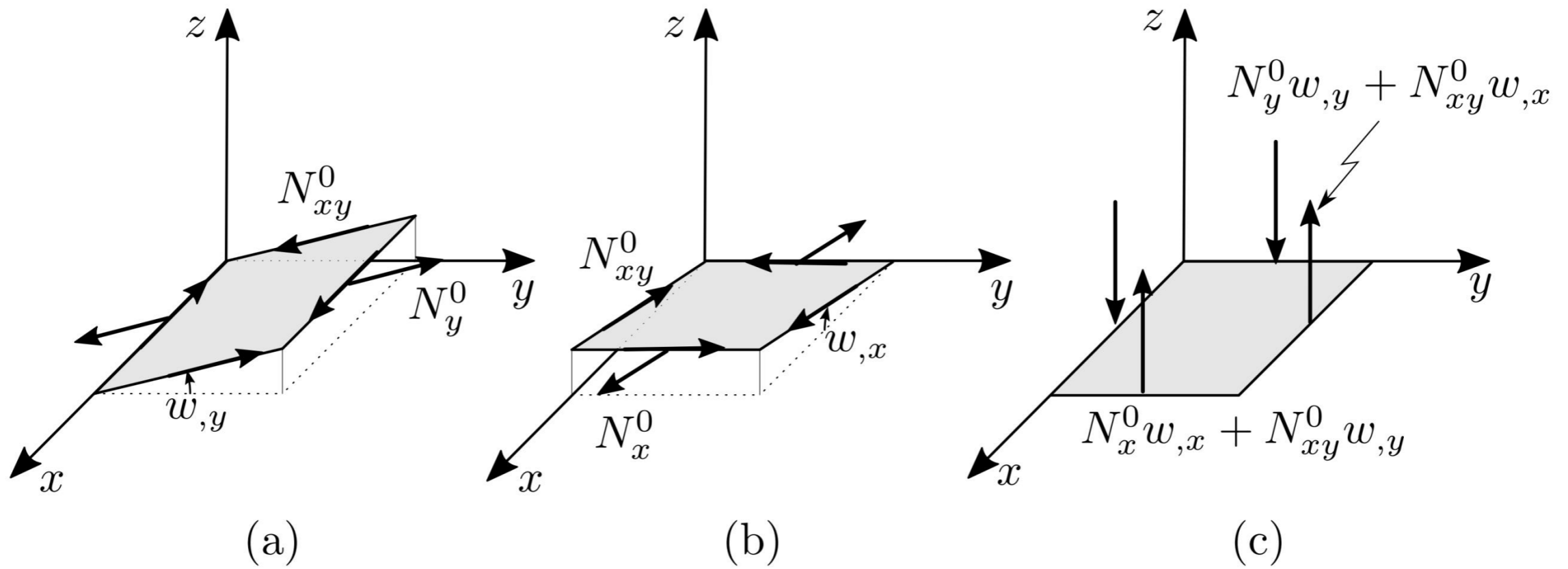
$$(\mathcal{K}_e + \mathcal{K}_g) w = 0, \quad \text{in } \Omega$$

in cui le rigidezze elastiche e geometriche si sommano. In forma esplicita, ricordando si ha:

$$D (w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) - (N_x^0 w_{,xx} + 2N_{xy}^0 w_{,xy} + N_y^0 w_{,yy}) = 0$$

Al contorno, e per una piastra rettangolare (

$$\begin{aligned}
 D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,x} &= 0, & \text{in } x = 0, \ell \\
 D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,y} &= 0, & \text{in } y = 0, b \\
 [-D (w_{,xxx} + (2 - \nu) w_{,xyy}) + p_x w_{,x} + p_y w_{,y}] \delta w &= 0, & \text{in } x = 0, \ell \\
 [-D (w_{,yyy} + (2 - \nu) w_{,xxy}) + p_x w_{,x} + p_y w_{,y}] \delta w &= 0, & \text{in } y = 0, b \\
 2D (1 - \nu) w_{,xy} \delta w &= 0, & \text{in } (0, 0), (\ell, 0), \\
 & & (\ell, b), (0, b)
 \end{aligned}$$

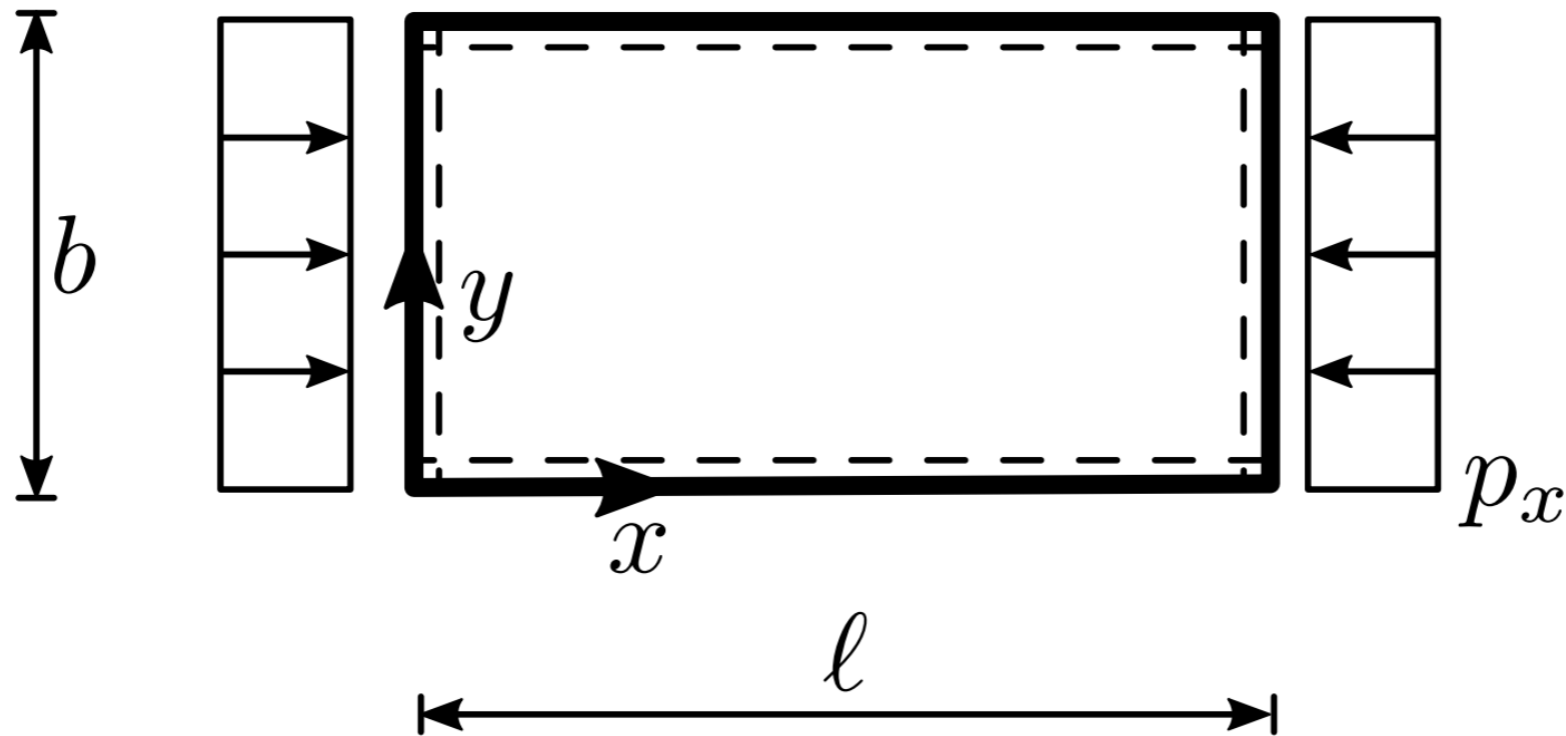


**Figura** Portanza geometrica: (a) rotazione intorno ad  $x$ , (b) rotazione intorno ad  $y$ , (c) forze di taglio geometriche somma dei due effetti.

# Piastra appoggiata su quattro lati e compressa in una direzione

Lo stato di presollecitazione è descritto da:

$$N_x^0 = -p_x, N_y^0 = N_{xy}^0 = 0$$



# Piastra appoggiata su quattro lati e compressa in una direzione

Lo stato di presollecitazione è descritto da:

$$N_x^0 = -p_x, \quad N_y^0 = N_{xy}^0 = 0$$

$$D (w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) + p_x w_{,xx} = 0,$$

$$w = 0, \quad w_{,xx} = 0, \quad \text{in } x = 0, \ell$$

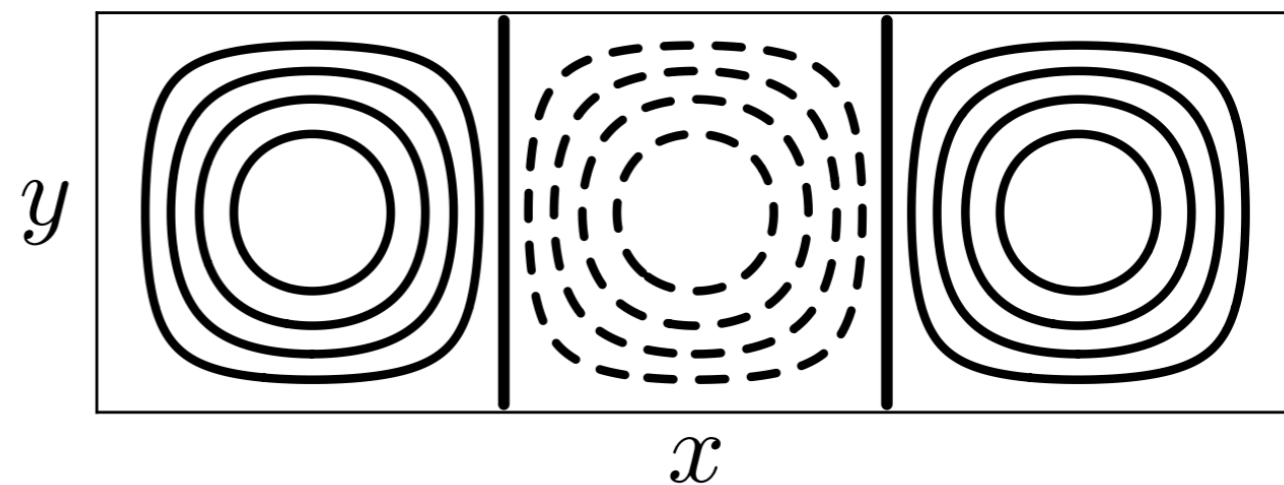
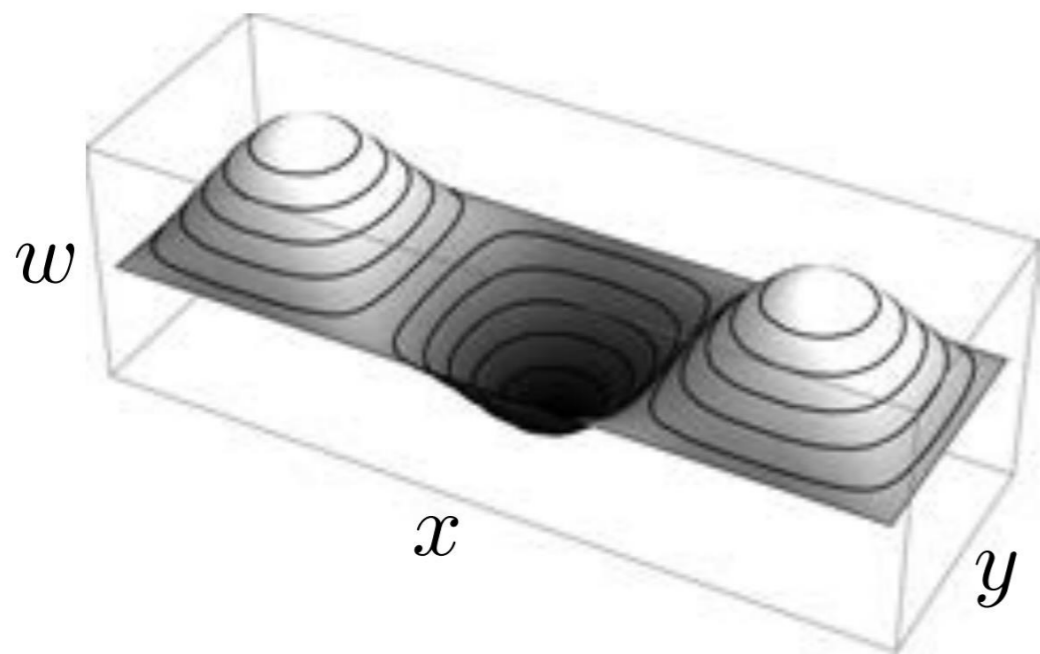
$$w = 0, \quad w_{,yy} = 0, \quad \text{in } y = 0, b$$

Si osserva che, poiché nel problema sono coinvolte solo derivate pari nelle due variabili indipendenti, onde sinusoidali di opportuna lunghezza soddisfano sia le equazioni di campo sia le condizioni al contorno. Si adotta allora, quale soluzione ‘di tentativo’, una combinazione lineare a coefficienti incogniti di prodotti di funzioni sinusoidali (serie doppia di Fourier nei soli seni):

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

in cui  $A_{nm}$  sono ampiezze incognite, ed  $n$  ed  $m$  sono interi, pure incogniti.

$$n = 3, m = 1$$





Sostituendo la soluzione nelle equazioni di equilibrio, le condizioni al contorno, come detto, sono identicamente soddisfatte. L'equazione di campo invece fornisce:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ D \left[ \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - p_x \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \right\} \\ \times A_{nm} \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right) = 0, \quad \forall x, y$$

Dovendo questa essere soddisfatta in ogni punto del dominio, segue che:

$$\left\{ D \left[ \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - p_x \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \right\} A_{nm} = 0 \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (9.42)$$

cioè *le armoniche si disaccoppiano*, generando un sistema di  $\infty$  equazioni algebriche lineari in una sola ampiezza incognita



L'autovalore  $p_{xc}(n, m)$  è cioè:

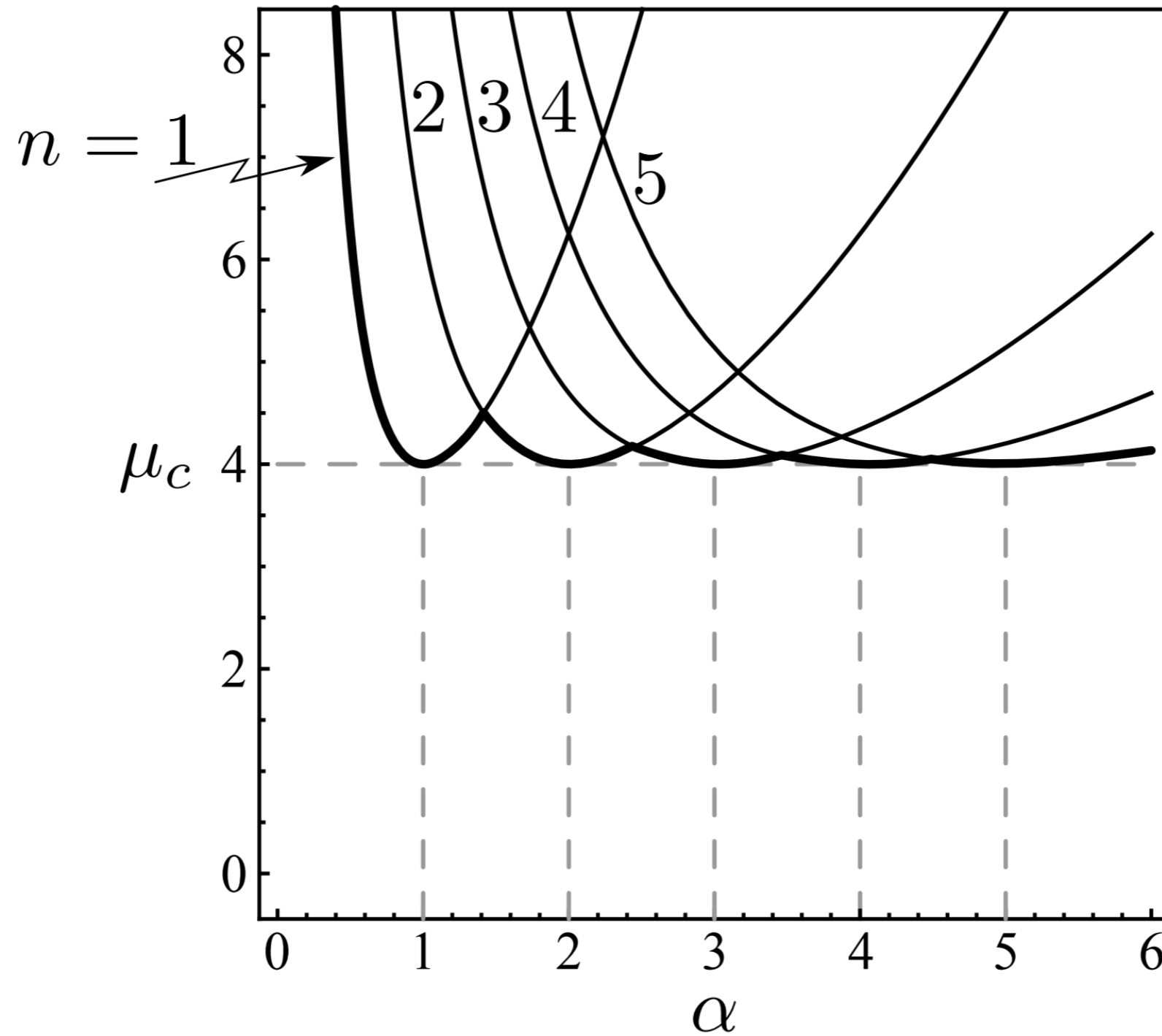
$$p_{xc}(n, m) = D \frac{\pi^2}{b^2} \left( \frac{nb}{\ell} + m^2 \frac{\ell}{nb} \right)^2$$

$$p_{xc}(n, m) = D \frac{\pi^2}{b^2} \left( \frac{nb}{\ell} + m^2 \frac{\ell}{nb} \right)^2$$

Esistono dunque  $\infty$  valori di biforcazione, in corrispondenza di ciascuno dei quali la piastra assume una specifica deformata. Poiché si è interessati al più piccolo di questi carichi, occorre minimizzare  $p_{xc}(n, m)$  rispetto alle due variabili. Si osserva immediatamente che poiché  $p_{xc}(n, m)$  cresce monotonamente con  $m$ , per minimizzarlo occorre prendere  $m = 1$ , per cui *la piastra si inflette con una sola semionda nella direzione trasversale*. Il valore di  $n$  a cui è associato il minimo carico  $p_{xc}$ , non è invece desumibile a priori, in quanto dipende dal *rapporto di forma della piastra*  $\alpha := \frac{\ell}{b}$ . Convien dunque porre il carico critico nella forma:

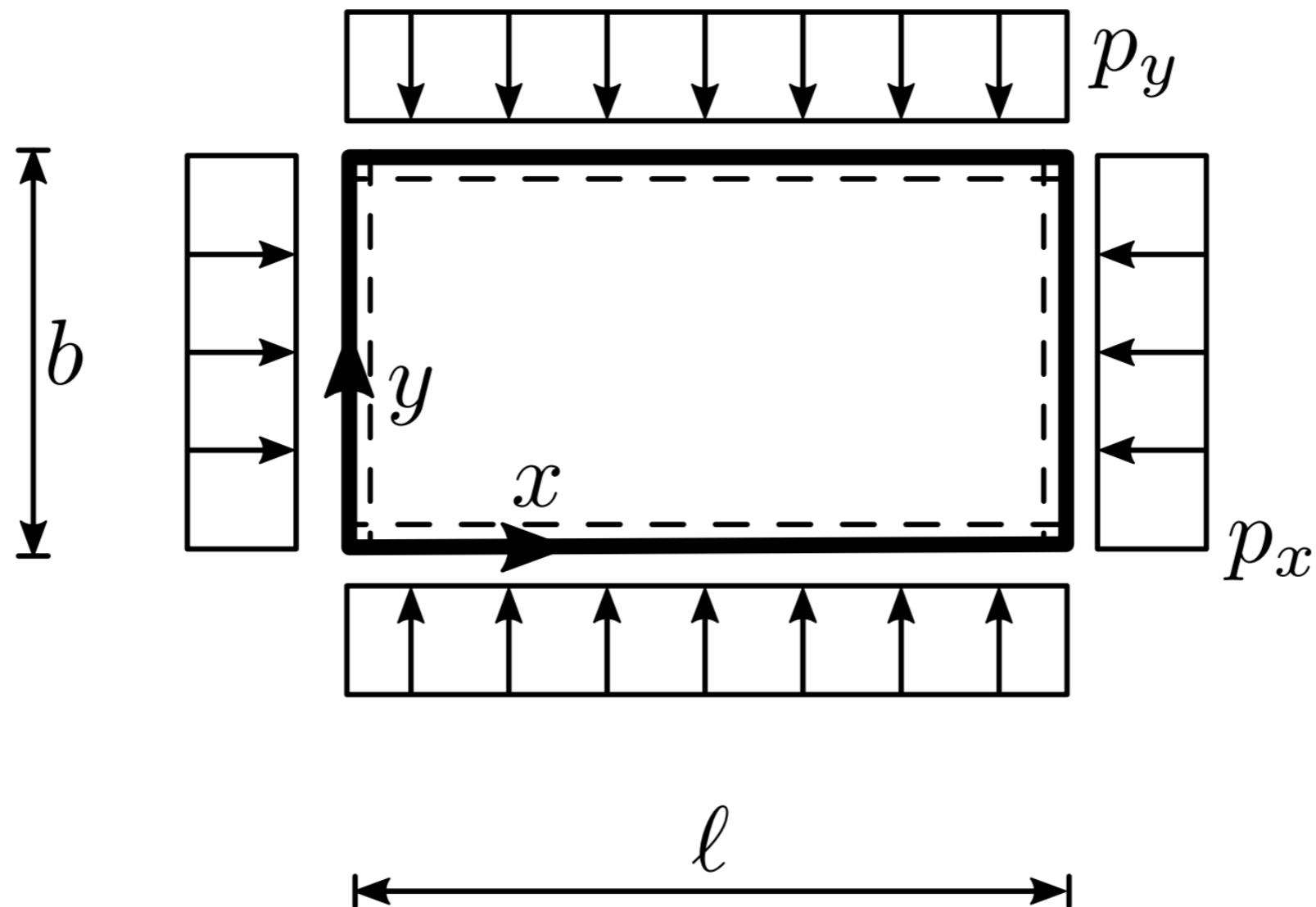
$$p_{xc} := \mu_c \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad \left| \quad \mu_c := \left( \frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha}{n} \right)^2 \right.$$

$$\alpha := \frac{\ell}{b}$$



**Figura** Carico critico adimensionale  $\mu_c = \frac{p_{xc} b^2}{\pi^2 D}$  della piastra appoggiata, compressa in una direzione, al variare del rapporto di forma  $\alpha := \frac{\ell}{h}$ .

# Piastra appoggiata su quattro lati e soggetta a stato di tensione biassiale



$$N_x^0 = -p_x, \quad N_y^0 = -p_y, \quad N_{xy}^0 = 0$$

$$D (w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) + p_x w_{,xx} + p_y w_{,yy} = 0$$

$$w = 0, \quad w_{,xx} = 0, \quad x = 0, \ell$$

$$w = 0, \quad w_{,yy} = 0, \quad y = 0, b$$

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right)$$



$$p_x \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 + p_y \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 = D \left[ \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2$$

$$p_{xc} := \mu_c \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad \mu_c := \frac{\left[ \left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 + m^2 \right]^2}{\left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 + \rho m^2}$$

e in cui  $\alpha := \frac{\ell}{b}$  è il rapporto di forma e  $\rho := \frac{p_y}{p_x}$

$\rho$	$n$	$m$	$\mu_c$
0	1	1	4
1	1	1	2
-1	2	1	8.33

Carico critico adimensionale  $\mu_c = \frac{p_{xc} b^2}{\pi^2 D}$  della piastra quadrata ( $\alpha = 1$ )

## Il dominio di stabilità

Se i carichi  $p_x$ ,  $p_y$  sono considerati quali indipendenti, e si vuole determinare il luogo geometrico delle loro combinazioni critiche, è più conveniente costruire un *dominio di stabilità*.

$$\left(\frac{p_x}{\bar{p}_{xc}}\right) n^2 + \left(\frac{p_y}{\bar{p}_{yc}}\right) m^2 = \frac{1}{4} (n^2 + m^2)^2$$

Dominio di stabilità della piastra quadrata ( $\alpha = 1$ ) appoggiata

