

Logica e Filosofia della Scienza

Docente: Prof. Giuseppe Sergioli (giuseppe.sergioli@gmail.com)

I quantificatori e la logica predicativa

Variabili e quantificatori

Nel linguaggio comune, si fa sovente uso di espressioni del tipo: “**tutti mangiano**”, “**qualcuno legge**”, “**non tutti cantano**”, “**nessuno parla**”, ecc.

In tali espressioni, quindi, ci si riferisce a individui **non in modo specifico** (come avviene con i nomi), **ma in modo generico**.

La parte dell'enunciato che si riferisce ad un individuo in modo generico è chiamata **variabile**.

Per formalizzare questo tipo di enunciati, dobbiamo ampliare il linguaggio logico mediante l'introduzione dei **quantificatori**.

Variabili e quantificatori

Le variabili si indicano con le lettere

$$u, v, x, y, z$$

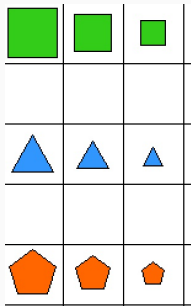
purché non confliggano con lettere già utilizzate nell'enunciato come costanti individuali.

A differenza delle costanti individuali, la funzione delle variabili **non** è quella di riferirsi ad oggetti in modo diretto (o indiretto mediante funtori).

Semanticamente, a una variabile x è associato il sistema dei suoi **possibili valori**, ossia degli enti ai quali x si riferisce **in modo generico**.


I quantificatori

Per esempio, consideriamo un un **universo (dominio) U** costituito dai seguenti individui:



In questo caso, quando si usa una variabile, questa si riferirà genericamente a una delle **tre figure geometriche**: quadrato, triangolo, pentagono.

Per esempio, sia S^1 il predicato unario “essere un quadrato”. Consideriamo l’espressione $P^1(x)$, dove x è una variabile.

 L’espressione $S^1(x)$ **non è un enunciato**, perché il predicato P^1 si riferisce **indeterminatamente** a un oggetto.

I quantificatori

Per esempio, sia S^1 il predicato unario “essere un quadrato”. Consideriamo l’espressione $P^1(x)$, dove x è una variabile.

⚠ L’espressione $S^1(x)$ **non è un enunciato**, perché il predicato P^1 si riferisce **indeterminatamente** a un oggetto.

Attraverso i **quantificatori** si **vincolano le variabili** in modo da trasformare espressioni del tipo $S^1(x)$ in enunciati.

I quantificatori

I quantificatori sono locuzioni mediante le quali **si esprime qualcosa sulla quantità degli oggetti** a cui si riferisce una variabile.

- Il **quantificatore universale** (\forall) si traduce nel linguaggio naturale con espressioni del tipo “per ogni” oppure “tutti” o ancora “ciascuno” ecc.

I quantificatori

I quantificatori sono locuzioni mediante le quali **si esprime qualcosa sulla quantità degli oggetti** a cui si riferisce una variabile.

- Il **quantificatore universale** (\forall) si traduce nel linguaggio naturale con espressioni del tipo “per ogni” oppure “tutti” o ancora “ciascuno” ecc.
- Il **quantificatore esistenziale** (\exists) si traduce nel linguaggio naturale con espressioni del tipo “qualche” oppure “esiste almeno un”.

Con l'introduzione dei quantificatori ci avviamo allo studio della **logica predicativa**.

Formalizzare gli enunciati con quantificatori

Una volta introdotti i quantificatori (\forall e \exists), possiamo formalizzare enunciati come *Tutti mangiano*, *Qualcuno legge*, *Non tutti cantano*, *Nessuno parla* in questo modo:

- $\forall x(M^1(x))$ (Per ogni x , x mangia - Tutti mangiano);

Formalizzare gli enunciati con quantificatori

Una volta introdotti i quantificatori (\forall e \exists), possiamo formalizzare enunciati come *Tutti mangiano*, *Qualcuno legge*, *Non tutti cantano*, *Nessuno parla* in questo modo:

- $\forall x(M^1(x))$ (Per ogni x , x mangia - Tutti mangiano);
- $\exists x(L^1(x))$ (Esiste almeno un x che legge - Qualcuno legge);

Formalizzare gli enunciati con quantificatori

Una volta introdotti i quantificatori (\forall e \exists), possiamo formalizzare enunciati come *Tutti mangiano*, *Qualcuno legge*, *Non tutti cantano*, *Nessuno parla* in questo modo:

- $\forall x(M^1(x))$ (Per ogni x , x mangia - Tutti mangiano);
- $\exists x(L^1(x))$ (Esiste almeno un x che legge - Qualcuno legge);
- $\neg\forall x(C^1(x))$ (Non per ogni x , x canta - Non tutti cantano);

Formalizzare gli enunciati con quantificatori

Una volta introdotti i quantificatori (\forall e \exists), possiamo formalizzare enunciati come *Tutti mangiano*, *Qualcuno legge*, *Non tutti cantano*, *Nessuno parla* in questo modo:

- $\forall x(M^1(x))$ (Per ogni x , x mangia - Tutti mangiano);
- $\exists x(L^1(x))$ (Esiste almeno un x che legge - Qualcuno legge);
- $\neg\forall x(C^1(x))$ (Non per ogni x , x canta - Non tutti cantano);
- $\neg\exists x(P^1(x))$ (Non esiste alcun x che parla - Nessuno parla).

P.S.: si noti che il quantificatore esistenziale, così come la disgiunzione, riceve in logica un'interpretazione **inclusiva**: l'enunciato *Qualcuno legge* ci dice che **almeno** una persona sta leggendo, ma non esclude che tutti leggano.

Formalizzare gli enunciati quantificati: con quantificatori: regole

Due regole fondamentali:

1. **Ogni quantificatore deve essere seguito da una variabile** (per es.: $\forall x(P^1(x))$ è una formula ben formata, mentre $\forall(P^1(x))$ non è una formula ben formata).
2. **Quando gli ambiti di due quantificatori si “sovrappongono” (cioè, i due quantificatori agiscono su oggetti coinvolti nello stesso predicato), per ciascuno di essi va scelta una variabile differente** (per es.: $\forall x\exists x(P^2(x, x))$ non è una formula ben formata, mentre $\forall x\exists y(P^2(x, y))$ è ben formata).

Formalizzazione di enunciati con quantificatori

Per esempio, torniamo al nostro modello geometrico con universo U e consideriamo i seguenti predicati:

- Predicati unari: $S^1 :=$ “essere un quadrato”; $T^1 :=$ “essere un triangolo”; $P^1 :=$ “essere un pentagono”; $L^1 :=$ “essere grande”; $M^1 :=$ “essere medio”; $I^1 :=$ “essere piccolo”
- Predicati binari: $L^2 :=$ “stare a sinistra di”; $R^2 :=$ “stare a destra di”; $C^2 :=$ “stare nella stessa colonna di”; $R^2 :=$ “stare nella stessa riga di”; $L^2 :=$ “essere più grande di”; $P^2 :=$ “essere più piccolo di”
- Predicati ternari: $B^3 :=$ “stare fra”.

Formalizzazione di enunciati con quantificatori

Proviamo a formalizzare qualche enunciato con quantificatori nel linguaggio visto prima.

Esempio 1.

Ci sono dei quadrati grandi:

$$\exists x(S^1(x) \wedge L^1(x))$$

Formalizzazione di enunciati con quantificatori

Proviamo a formalizzare qualche enunciato con quantificatori nel linguaggio visto prima.

Esempio 1.

Ci sono dei quadrati grandi:

$$\exists x(S^1(x) \wedge L^1(x))$$

Questo enunciato è **vero** nel modello seguente:

Formalizzazione di enunciati con quantificatori

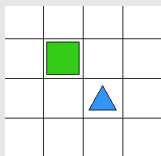
Proviamo a formalizzare qualche enunciato con quantificatori nel linguaggio visto prima.

Esempio 1.

Ci sono dei quadrati grandi:

$$\exists x(S^1(x) \wedge L^1(x))$$

Questo enunciato è **vero** nel modello seguente:



Esempio 2.

Tutti i quadrati stanno a sinistra di ogni pentagono:

$$\forall x \forall y (S^1(x) \wedge P^1(y) \rightarrow L^2(x, y))$$

Esempio 2.

Tutti i quadrati stanno a sinistra di ogni pentagono:

$$\forall x \forall y (S^1(x) \wedge P^1(y) \rightarrow L^2(x, y))$$

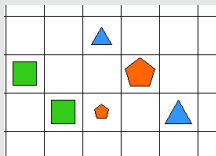
Questo enunciato è **vero** nel modello seguente:

Esempio 2.

Tutti i quadrati stanno a sinistra di ogni pentagono:

$$\forall x \forall y (S^1(x) \wedge P^1(y) \rightarrow L^2(x, y))$$

Questo enunciato è **vero** nel modello seguente:



Esempio 3.

Almeno un triangolo sta a sinistra di tutti i quadrati:

$$\exists x(T^1(x) \wedge \forall y(S^1(y) \rightarrow L^2(x, y)))$$

Esempio 3.

Almeno un triangolo sta a sinistra di tutti i quadrati:

$$\exists x(T^1(x) \wedge \forall y(S^1(y) \rightarrow L^2(x, y)))$$

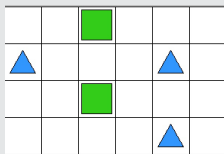
Questo enunciato è **vero** nel modello seguente?

Esempio 3.

Almeno un triangolo sta a sinistra di tutti i quadrati:

$$\exists x(T^1(x) \wedge \forall y(S^1(y) \rightarrow L^2(x, y)))$$

Questo enunciato è **vero** nel modello seguente?

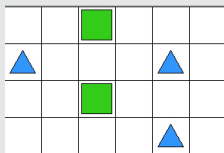


Esempio 3.

Almeno un triangolo sta a sinistra di tutti i quadrati:

$$\exists x(T^1(x) \wedge \forall y(S^1(y) \rightarrow L^2(x, y)))$$

Questo enunciato è **vero** nel modello seguente?



L'enunciato risulta **vero** nel modello.

Formalizzazione di enunciati con quantificatori

Altri esempi di formalizzazioni di enunciati con quantificatori.

Esempio 4.

Irene adora una principessa:

$i := \text{“Irene”}$; $A^2 = \text{adorare}$; $P^1 := \text{“essere una principessa”}$

$$\exists x(P^1(x) \wedge A^2(i, x))$$

(letteralmente: Esiste un x tale che x è una principessa e che Irene adora).

Esempio 5.

Irene adora tutte le principesse:

$$\forall x(P^1(x) \rightarrow A^2(i, x))$$

(letteralmente: Per ogni x , se x è una principessa, allora Irene la adora)

La struttura degli enunciati con quantificatori

Si noti che **i due esempi precedenti differiscono solamente nella quantificazione** delle principesse adorate da Irene.

Questo comporta che **nel primo esempio** si è reso necessario l'utilizzo del **quantificatore esistenziale e della congiunzione**, mentre **nel secondo esempio** si è fatto ricorso al **quantificatore universale e all'implicazione**.

Le strutture più frequenti che considereremo sono le seguenti:

La struttura degli enunciati con quantificatori

Si noti che **i due esempi precedenti differiscono solamente nella quantificazione** delle principesse adorate da Irene.

Questo comporta che **nel primo esempio** si è reso necessario l'utilizzo del **quantificatore esistenziale e della congiunzione**, mentre **nel secondo esempio** si è fatto ricorso al **quantificatore universale e all'implicazione**.

Le strutture più frequenti che considereremo sono le seguenti:

- $\forall x(P^1(x) \rightarrow Q^1(x))$

(Per ogni x , se x gode della proprietà P^1 , allora x gode della proprietà Q^1 ; equivalentemente, Tutti gli oggetti che godono di della proprietà P godono della proprietà Q);

La struttura degli enunciati con quantificatori

Si noti che **i due esempi precedenti differiscono solamente nella quantificazione** delle principesse adorate da Irene.

Questo comporta che **nel primo esempio** si è reso necessario l'utilizzo del **quantificatore esistenziale e della congiunzione**, mentre **nel secondo esempio** si è fatto ricorso al **quantificatore universale e all'implicazione**.

Le strutture più frequenti che considereremo sono le seguenti:

- $\forall x(P^1(x) \rightarrow Q^1(x))$

(Per ogni x , se x gode della proprietà P^1 , allora x gode della proprietà Q^1 ; equivalentemente, Tutti gli oggetti che godono di della proprietà P godono della proprietà Q);

- $\exists x(P^1(x) \wedge Q^1(x))$

(Esiste un x tale che x ha la proprietà P^1 e x ha la proprietà Q^1 ; equivalentemente, Alcuni oggetti che godono della proprietà P^1 godono della proprietà Q^1).

Formalizzazione di enunciati con quantificatori

Esempio 6.

Qualche esponente politico legge tutti i quotidiani:

P^1 = “essere un politico”; Q^1 := “essere un quotidiano”; L^2 := “legge”

$$\exists x(P^1(x) \wedge \forall y(Q^1(y) \rightarrow L^2(x, y)))$$

(letteralmente: Esiste un x tale che x è un esponente politico e, per ogni y , se y è un quotidiano, allora x legge y):

Esempio 7.

C'è un quotidiano che viene letto da tutti gli esponenti politici.

$$\exists x(Q^1(x) \wedge \forall y(P^1(y) \rightarrow L^2(y, x)))$$

(letteralmente: Esiste un x tale che x è un quotidiano e, per ogni y , se y è un esponente politico, allora y legge x).

Formalizzazione di enunciati con quantificatori

Esempio 8.

Ogni persona è amata da almeno una persona:

$P^1 =$ “essere una persona”; $A^2 :=$ “amare”;

$$\forall x(P^1(x) \rightarrow \exists y(P^1(y) \wedge A^2(y, x)))$$

Esempio 9.

Nessuna pecora è di colore arancio:

$P^1 =$ “essere una pecora”; $A^1 :=$ “essere di colore arancio”.

$$\neg \exists x(P^1(x) \wedge A^1(x))$$

Formalizzazione di enunciati con quantificatori

Esempio 8.

Ogni persona è amata da almeno una persona:

$P^1 =$ “essere una persona”; $A^2 :=$ “amare”;

$$\forall x(P^1(x) \rightarrow \exists y(P^1(y) \wedge A^2(y, x)))$$

Esempio 9.

Nessuna pecora è di colore arancio:

$P^1 =$ “essere una pecora”; $A^1 :=$ “essere di colore arancio”.

$$\neg \exists x(P^1(x) \wedge A^1(x))$$

o, equivalentemente,

$$\forall x(P^1(x) \rightarrow \neg A^1(x)).$$

Due tipi di enunciati che fanno uso di quantificatori sono di fondamentale importanza:

- gli enunciati **universali**;
- gli enunciati **particolari**.

Le quattro forme principali di enunciati con quantificatori

- **Universali affermativi:** *Tutti i cagliaritani sono tifosi*

$$\forall x(C^1(x) \rightarrow T^1(x))$$

Le quattro forme principali di enunciati con quantificatori

- **Universali affermativi:** *Tutti i cagliaritani sono tifosi*

$$\forall x(C^1(x) \rightarrow T^1(x))$$

- **Universali negativi:** *Nessun cagliaritano è tifoso*

$$\forall x(C^1(x) \rightarrow \neg T^1(x))$$

Le quattro forme principali di enunciati con quantificatori

- **Universali affermativi:** *Tutti i cagliaritani sono tifosi*

$$\forall x(C^1(x) \rightarrow T^1(x))$$

- **Universali negativi:** *Nessun cagliaritano è tifoso*

$$\forall x(C^1(x) \rightarrow \neg T^1(x))$$

- **Particolari affermativi:** *Qualche cagliaritano è tifoso*

$$\exists x(C^1(x) \wedge T^1(x))$$

Le quattro forme principali di enunciati con quantificatori

- **Universali affermativi:** *Tutti i cagliaritani sono tifosi*

$$\forall x(C^1(x) \rightarrow T^1(x))$$

- **Universali negativi:** *Nessun cagliaritano è tifoso*

$$\forall x(C^1(x) \rightarrow \neg T^1(x))$$

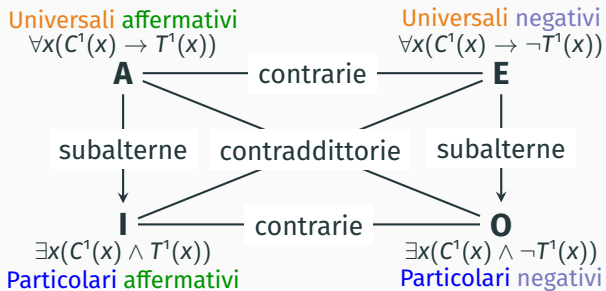
- **Particolari affermativi:** *Qualche cagliaritano è tifoso*

$$\exists x(C^1(x) \wedge T^1(x))$$

- **Particolari negativi:** *Qualche cagliaritano non è tifoso*

$$\exists x(C^1(x) \wedge \neg T^1(x))$$

Il quadrato aristotelico



Il quadrato aristotelico: equivalenze (1)

Da un'osservazione attenta del quadrato aristotelico si possono ricavare le seguenti interessanti proprietà:

1. la **negazione** di un **enunciato universale affermativo** è **equivalente** a un **enunciato particolare negativo**:

Il quadrato aristotelico: equivalenze (1)

Da un'osservazione attenta del quadrato aristotelico si possono ricavare le seguenti interessanti proprietà:

1. la **negazione** di un **enunciato universale affermativo** è **equivalente** a un **enunciato particolare negativo**:

$$\neg \forall x(C^1(x) \rightarrow T^1(x)) \leftrightarrow \exists x(C^1(x) \wedge \neg T^1(x))$$

Il quadrato aristotelico: equivalenze (1)

Da un'osservazione attenta del quadrato aristotelico si possono ricavare le seguenti interessanti proprietà:

1. la **negazione** di un **enunciato universale affermativo** è **equivalente** a un **enunciato particolare negativo**:

$$\neg \forall x(C^1(x) \rightarrow T^1(x)) \leftrightarrow \exists x(C^1(x) \wedge \neg T^1(x))$$

Dire *Non tutti i cagliaritani sono tifosi* equivale infatti a dire *Qualche cagliaritano non è tifoso*.

Il quadrato aristotelico: equivalenze (1)

Da un'osservazione attenta del quadrato aristotelico si possono ricavare le seguenti interessanti proprietà:

1. la **negazione** di un **enunciato universale affermativo** è **equivalente** a un **enunciato particolare negativo**:

$$\neg \forall x(C^1(x) \rightarrow T^1(x)) \leftrightarrow \exists x(C^1(x) \wedge \neg T^1(x))$$

Dire *Non tutti i cagliaritani sono tifosi* equivale infatti a dire *Qualche cagliaritano non è tifoso*.

Per la legge della doppia negazione, la **negazione** di un **enunciato particolare negativo** sarà **equivalente** a un **enunciato universale affermativo**

$$\neg \exists x(C^1(x) \wedge \neg T^1(x)) \leftrightarrow \forall x(C^1(x) \rightarrow T^1(x))$$

Dire *Non esiste un cagliaritano che non sia tifoso* equivale infatti a dire *Tutti i cagliaritani sono tifosi*.

Il quadrato aristotelico: equivalenze (2)

2. la **negazione** di un **enunciato universale negativo** è **equivalente** a un **enunciato particolare affermativo**:

Il quadrato aristotelico: equivalenze (2)

2. la **negazione** di un **enunciato universale negativo** è **equivalente** a un **enunciato particolare affermativo**:

$$\neg \forall x (C^1(x) \rightarrow \neg T^1(x)) \leftrightarrow \exists x (C^1(x) \wedge T^1(x))$$

Il quadrato aristotelico: equivalenze (2)

2. la **negazione** di un **enunciato universale negativo** è **equivalente** a un **enunciato particolare affermativo**:

$$\neg \forall x (C^1(x) \rightarrow \neg T^1(x)) \leftrightarrow \exists x (C^1(x) \wedge T^1(x))$$

Dire *Nessun cagliaritano è tifoso* equivale infatti a dire *Qualche cagliaritano è tifoso*.

Il quadrato aristotelico: equivalenze (2)

2. la **negazione** di un **enunciato universale negativo** è **equivalente** a un **enunciato particolare affermativo**:

$$\neg \forall x(C^1(x) \rightarrow \neg T^1(x)) \leftrightarrow \exists x(C^1(x) \wedge T^1(x))$$

Dire *Nessun cagliaritano è tifoso* equivale infatti a dire *Qualche cagliaritano è tifoso*.

Per la legge della doppia negazione, la **negazione** di un **enunciato particolare affermativo** sarà **equivalente** a un **enunciato universale negativo**

$$\neg \exists x(C^1(x) \wedge T^1(x)) \leftrightarrow \forall x(C^1(x) \rightarrow \neg T^1(x))$$

Dire *Non c'è nessuno che sia allo stesso tempo cagliaritano e tifoso* equivale infatti a dire *Nessun cagliaritano è tifoso*.

Due leggi della logica predicativa

Nella logica predicativa non è possibile utilizzare mezzi come le tavole di verità per accertare se, per ogni formula, questa sia o meno una verità logica. Due esempi di verità logiche nell'ambito della logica predicativa sono riportate di seguito.

- **Dictum de omni:** $\forall x(M^1(x) \rightarrow M^1(a))$
per esempio: *Se tutti mangiano, allora Antonio mangia.*
- **Dictum de nullo:** $M^1(a) \rightarrow \exists x(M^1(x))$
per esempio: *Se Antonio mangia, allora qualcuno mangia.*