



Matematica Discreta

Prova scritta del 08/09/2022

Nome :

Cognome :

Matricola :

Anno di Iscrizione :

Istruzioni

- Non è consentito l'utilizzo dei telefoni cellulari. Tenerli spenti durante tutta la durata della prova scritta
- Non è consentito l'utilizzo di appunti e dispense
- Non è consentito l'utilizzo della calcolatrice
- Giustificare le risposte date agli esercizi



Esercizio 1 (2 + 3 + 4 punti).

- a) Dire se la seguente proposizione logica è una contraddizione:

$$(P \vee (\neg Q \Rightarrow P)) \Rightarrow (Q \vee \neg P)$$

- b) Data la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ z &\mapsto 4z - 5 \end{aligned}$$

Determinare

- (i) se la funzione è iniettiva e/o suriettiva;
 - (ii) la controimmagine $f^{-1}(0)$ di $0 \in \mathbb{Z}$;
- c) Dimostrare per induzione su n che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 0$ vale

$$\sum_{k=1}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1.$$





Esercizio 2 (3 + 2 + 2 punti).

- a) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ dell'equazione modulare

$$3x \equiv 15 \pmod{7}$$

- b) Determinare quante e quali sono le soluzioni $[x] \in \mathbb{Z}_7$ dell'equazione

$$[3][x] = [15]$$

dove le classi $[3]$ e $[15]$ sono elementi di \mathbb{Z}_7

- c) Si consideri la seguente permutazione di S_8

$$\sigma = (1483)(57134)(628451).$$

Determinare la decomposizione in cicli disgiunti e l'ordine di σ , dove l'ordine di una permutazione σ è il più piccolo numero naturale k tale per cui $\sigma^k = \text{Id}$.





Esercizio 3 (3 + 5 punti).

a) Dati i vettori

$$v = (0, 2, -1), \quad w = (4, k, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

i) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui v e w sono ortogonali;

ii) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui $\|v \wedge w\|^2 = 89$.

b) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice V di ordine 3 e una matrice diagonale D di ordine 3 tali per cui $A = VDV^{-1}$.





Esercizio 4 (2 + 4 punti). Fissata una base ortonormale B dello spazio si considerino i due piani

$$\tau : 2x + y - z = -1, \quad \sigma : x + 3z = 2$$

- a) Determinare se i due piani si intersecano in una retta r e, nel caso esista, trovare l'equazione parametrica della retta r ;
- b) Data la retta

$$s : \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Determinare, se esiste, il piano che contiene s ed è parallelo al piano τ del punto (a).

