



Matematica Discreta

Prova scritta del 22/11/2022

Nome :

Cognome :

Matricola :

Anno di Iscrizione :

Istruzioni

- Non è consentito l'utilizzo dei telefoni cellulari. Tenerli spenti durante tutta la durata della prova scritta
- Non è consentito l'utilizzo di appunti e dispense
- Non è consentito l'utilizzo della calcolatrice
- Giustificare le risposte date agli esercizi



Esercizio 1.

- a) Dire se la seguente proposizione logica è una tautologia

$$P \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q.$$

- b) Data la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 3x - 3 \end{aligned}$$

Dire se f è iniettiva, suriettiva e/o bigettiva. Trovare l'eventuale inversa f^{-1} .
Determinare la controimmagine $f^{-1}(9)$ di $9 \in \mathbb{Z}$.

- c) Dimostrare per induzione su n che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$





Esercizio 2.

a) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ dell'equazione modulare

$$9x \equiv 6 \pmod{15}$$

b) Determinare quante e quali sono le soluzioni $[x] \in \mathbb{Z}_{15}$ dell'equazione

$$[9][x] = [6]$$

dove le classi $[9]$ e $[6]$ sono elementi di \mathbb{Z}_{15}

c) Si consideri la seguente permutazione di S_7

$$\sigma = (2415)(17546)(531)(16547).$$

Determinare la decomposizione in cicli disgiunti, la decomposizione in trasposizioni e l'inversa di σ .





Esercizio 3.

a) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si trovino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali per cui $\det(A) = 0$. Fissato $k = \frac{1}{2}$ si calcoli la matrice prodotto BA e $\det(AB)$.

b) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcolare gli autovalori e autovettori di A .





Esercizio 4. Fissata una base ortonormale B dello spazio si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 3y - 3z = -1 \end{cases}$$

- a) Determinare, se esistono, i punti di intersezione di r e s e, nel caso non esistano, dire se le due rette sono parallele o sghembe.
- b) Scrivere l'equazione parametrica della retta s .

