



Structural Stability and Limit Analysis of Structures (Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

> **Lezione 13**

Instability of a viscoelastic beam resting on an
viscous foundation
(La trave visco-elastica di Beck)

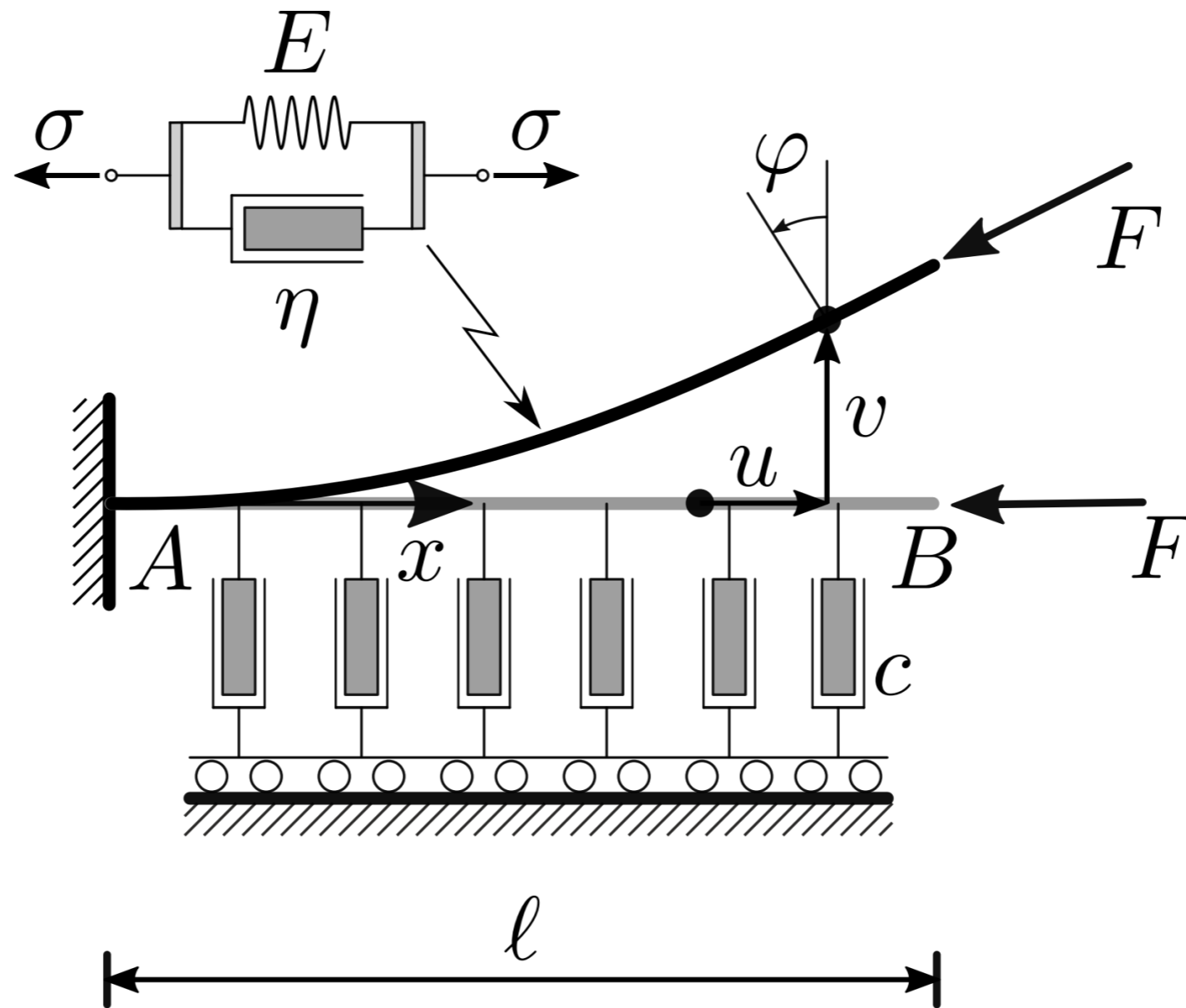
Victor Eremeev

victor.eremeev@unica.it

Il sistema è modellato come trave piana *estensibile e indeformabile a taglio*. La trave ha lunghezza l ; momento di inerzia della sezione I , densità lineare di massa m . È incastrata all'estremo A e caricata all'estremo libero B da una forza follower di intensità F , che comprime la trave nella configurazione rettilinea, e mantiene la sua direzione allineata con la tangente in B alla linea d'asse deformata. La trave è costituita di materiale visco-elastico, rispondente al legame costitutivo di Kelvin–Voigt, in cui E è il modulo elastico, η il coefficiente di viscosità (smorzamento interno); inoltre, è posta su suolo puramente viscoso di costante c (smorzamento esterno), atto a simulare l'interazione con il fluido circostante (ad esempio aria).

L'analisi è qui limitata al problema linearizzato.

Trave visco-elastica di Beck



Cinematica

Il campo di spostamento della trave è descritto dalle tre componenti scalari $u(x, t)$, $v(x, t)$, $\varphi(x, t)$, che rappresentano rispettivamente la traslazione longitudinale e trasversale, nonché la rotazione della sezione. La condizione di indeformabilità a taglio, tuttavia, riduce a due gli spostamenti indipendenti, ad esempio u , v , essendo $\varphi = v'$ in cinematica lineare. Ricordando le equazioni di congruenza si ha:

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}v'^2 + \dots$$
$$\kappa = v'' + \dots$$

dove ε è l'estensione unitaria e κ è la curvatura flessionale. Nell'estensione unitaria si riconosce una parte del primo ed una del secondo ordine: $\varepsilon_1 := u'$, $\varepsilon_2 := \frac{1}{2}v'^2$; della curvatura, nell'analisi linearizzata, è sufficiente la sola parte del primo ordine: $\kappa_1 := v''$.

Il legame costitutivo visco-elastico

Il comportamento visco-elastico della trave è espresso dal legame costitutivo di Kelvin-Voigt, che fa dipendere la sollecitazione dalla deformazione e dalle velocità di deformazione. Tenuto conto dello stato di presollecitazione assiale, e della sola parte lineare della deformazione, esso si scrive:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} EA\varepsilon_1 + \eta A\dot{\varepsilon}_1 \\ EI\kappa_1 + \eta I\dot{\kappa}_1 \end{pmatrix}$$

La forza interna viscosa che sollecita il letto di smorzatori è

$$f_{int}^v = c \dot{v}$$

Le equazioni del moto, corredate di condizioni geometriche e meccaniche, si scrivono:

$$m\ddot{u} - EAu'' - \eta A\dot{u}'' = 0$$

$$u_A = 0, \quad EAu'_B + \eta A\dot{u}'_B = 0$$

insieme a:

$$m\ddot{v} + EIv'''' + \eta I\dot{v}'''' + Fv'' + cv = 0$$

$$v_A = 0, \quad v'_A = 0$$

$$-EIv'''_B - \eta I\dot{v}'''_B = 0, \quad EIv''_B + \eta I\dot{v}''_B = 0$$

Le equazioni descrivono rispettivamente il moto longitudinale $u(x; t)$ e trasversale $v(x; t)$ della trave. I due problemi sono disaccoppiati, analogamente a quanto accade per la trave estensibile di Eulero. Inoltre, poiché il moto longitudinale *non* dipende dall'intensità della forza follower, esso decade nel tempo, a causa dello smorzamento interno. Pertanto, il problema della stabilità è governato dalle sole equazione, che governano il moto trasversale.

Forma adimensionale delle equazioni del moto

Le equazioni del moto si riscrivono allora nella più semplice forma:

$$\ddot{\tilde{v}} + \tilde{v}'''' + \tilde{\eta} \dot{\tilde{v}}'''' + \mu \tilde{v}'' + c \dot{\tilde{v}} = 0$$

$$\tilde{v}_A = 0, \quad \tilde{v}'_A = 0$$

$$- \tilde{v}'''_B - \tilde{\eta} \dot{\tilde{v}}'''_B = 0, \quad \tilde{v}''_B + \tilde{\eta} \dot{\tilde{v}}''_B = 0$$

Si considera ora il caso di smorzamento, interno ed esterno, diverso da zero, $\eta, c \neq 0$. Posto ancora $v(x, t) = \phi(x) \exp(\lambda t)$ nelle equazioni del moto si ottiene il problema differenziale agli autovalori:

$$(1 + \lambda \eta) \phi'''' + \mu \phi'' + (\lambda^2 + \lambda c) \phi = 0$$

$$\phi_A = 0, \quad \phi'_A = 0$$

$$- \phi'''_B = 0, \quad \phi''_B = 0$$

L'equazione di campo

$$(1 + \lambda \eta) \phi'''' + \mu \phi'' + (\lambda^2 + \lambda c) \phi = 0$$

ammette una soluzione formalmente analoga aquella della trave non smorzata,

$$v(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) + c_3 \cosh(\beta x) + c_4 \sinh(\beta x)$$

in cui però i numeri d'onda sono ridefiniti come segue:

$$\alpha^2 := \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda(c + \lambda)(1 + \lambda\eta)}}{2(1 + \lambda\eta)}, \quad \beta^2 := \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda(c + \lambda)(1 + \lambda\eta)}}{2(1 + \lambda\eta)}$$



Per ogni fissata terna $(\mu; c; \eta)$, posto $\lambda = \delta + i\omega$ nell'equazione caratteristica, e separate le parti reale ed immaginaria, si ottengono due equazioni nelle incognite $\delta; \omega$. La condizione di biforcazione corrisponde all'attraversamento dell'asse immaginario di una sola coppia di autovalori complessi coniugati (biforcazione di Hopf generica), per la quale $\lambda = i\omega_d, \mu = \mu_d$. Sostituendo nell'equazione caratteristica, e separando parte reale ed immaginaria, si ottiene:

$$\operatorname{Re} [\det (\mathbf{S} (\omega_d, \mu_d; c, \eta))] = 0$$

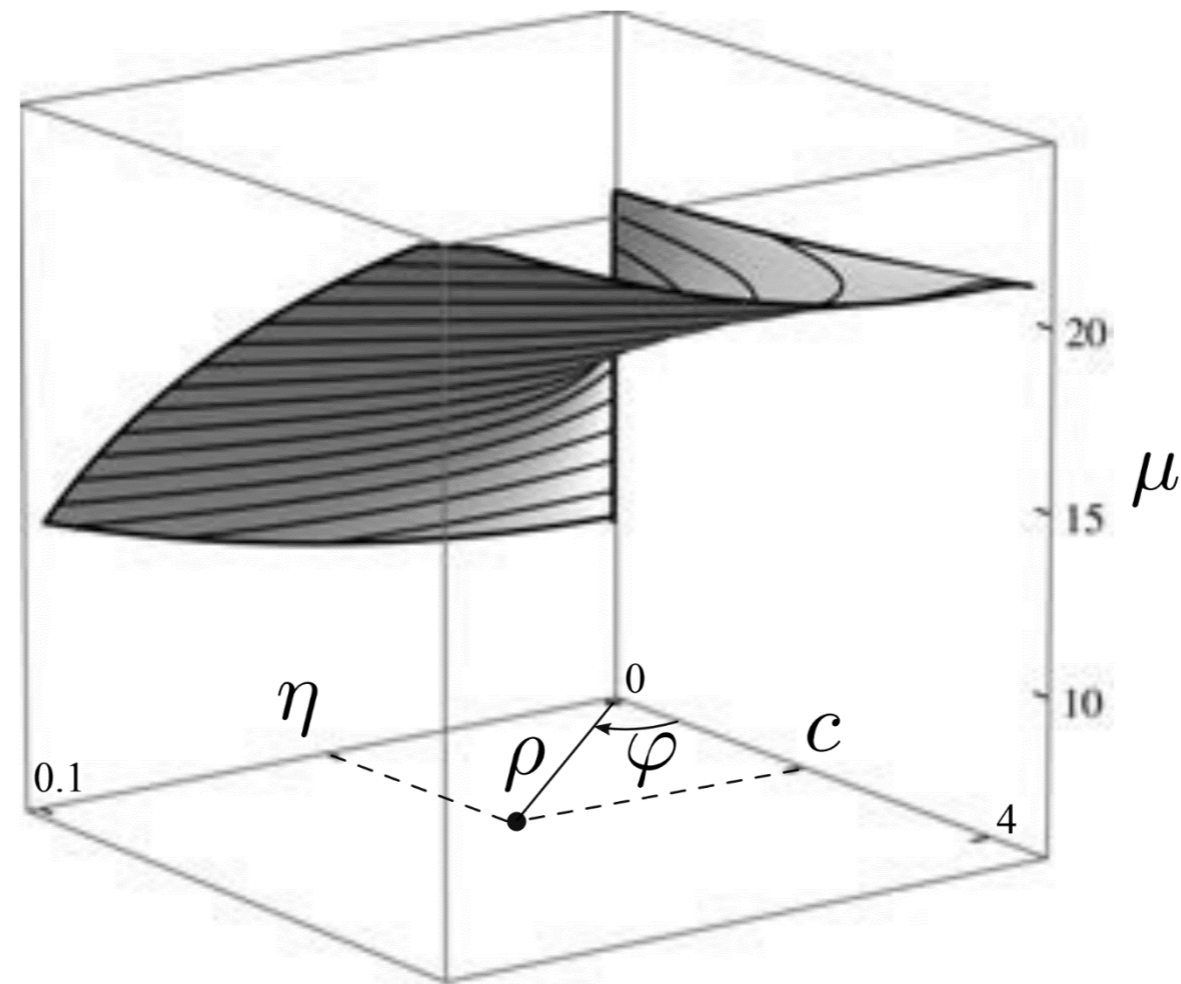
$$\operatorname{Im} [\det (\mathbf{S} (\omega_d, \mu_d; c, \eta))] = 0$$

che, per un dato smorzamento (c, η) , è un sistema di equazioni nelle incognite (ω_d, μ_d) ; tra le infinite coppie di radici, si è interessati a quella che ammette il più piccolo μ_d .

Queste equazioni possono essere risolte solo numericamente. Si ricostruisce, così, per punti (cioè per ogni assegnata coppia di smorzamenti), una superficie nello spazio $(c; \eta; \mu)$, illustrata in Figura. Questa costituisce *l'ombrello di Whitney* per la trave visco-elastica di Beck.

Valgono dunque per la trave di Beck le stesse considerazioni fatte per la colonna di Ziegler, cioè:

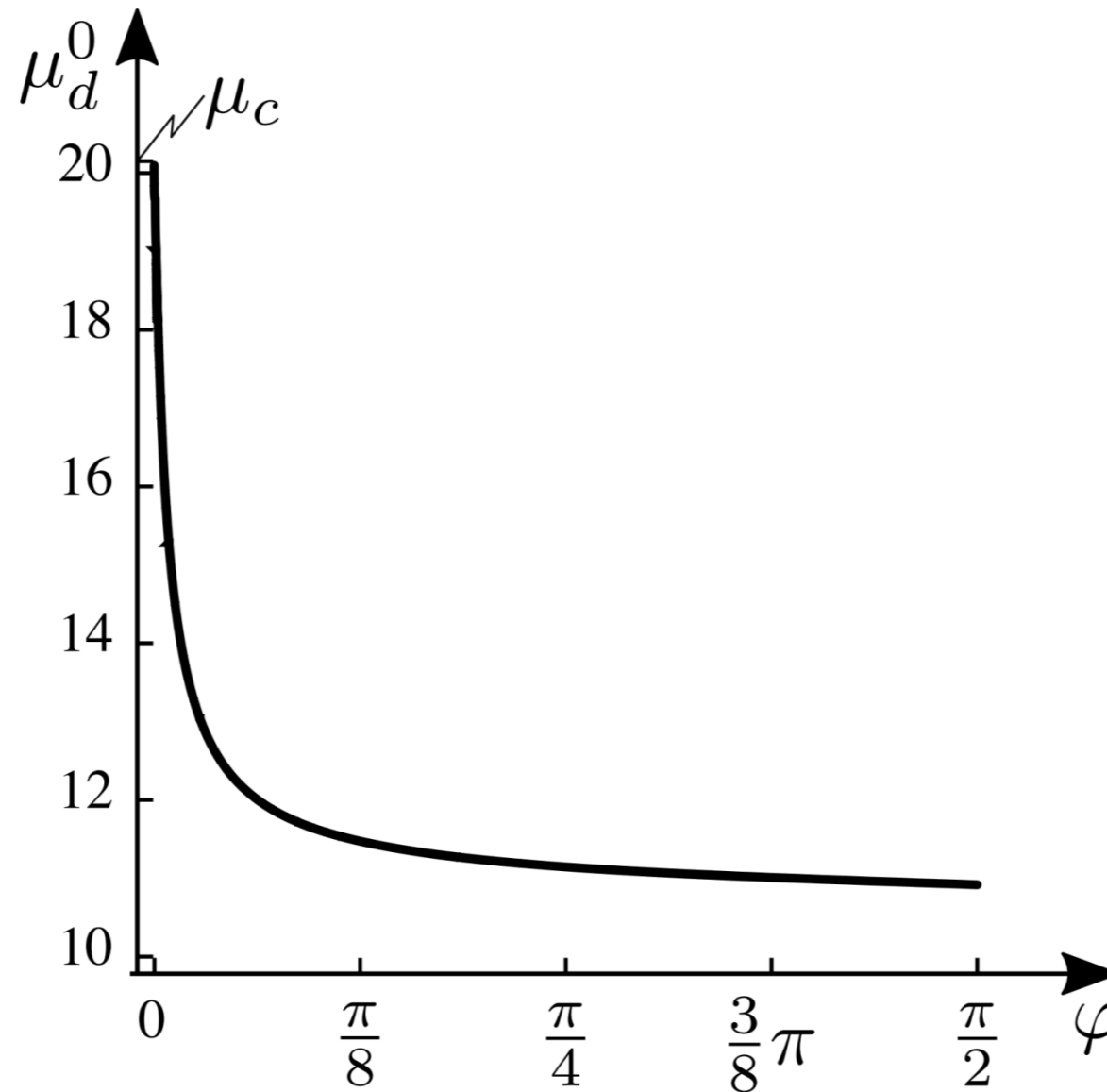
- (a) lo smorzamento produce generalmente un *effetto instabilizzante* sul sistema non smorzato;
- (b) il sistema smorzato non è in continuità con quello non smorzato.



Biforcazione di Hopf generica della trave visco-elastica di Beck
luogo degli stati critici nello spazio dei parametri (μ, c, η)

Posto $c = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$

facendo tendere a zero ρ , si ottiene il grafico



valore critico μ_d^0 della forza
follower per smorzamento evanescente, al variare di $\varphi := \arctan\left(\frac{\eta}{c}\right)$.