Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica

Calcolo differenziale

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23

IL CALCOLO DIFFERENZIALE È PROTAGONISTA DELLA RIVOLUZIONE SCIENTIFICA DEL SECOLO DICIASSETTESIMO: PERMISE

- LA MODELLIZZAZIONE MATEMATICA DI FENOMENI FISICI (P.ES. MOTO DEI CORPI)
- LA DETERMINAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AD UNA CURVA DATA
- LA DETERMINAZIONE DEI MASSIMI E DEI MINIMI

PIETRE MILIARI:

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS ITEMQUE TANGENTIBUS (LEIBNIZ, 1684)

PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA (NEWTON, 1687)

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM (EULERO)

ALLA BASE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE STA OGGI LA DEFINIZIONE DELLA DERIVATA (CAUCHY, RÉSUMÉ DES LEÇONS DONNÉES À L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, 1823)

ESEMPIO: IL FATTO CHE $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ SI TROVA NEI PRINCIPIA: « L'ULTIMO RAPPORTO FRA LA TANGENTE E L'ARCO È IL RAPPORTO DI UGUAGLIANZA »

MA 22 NOV 2022

DEFINIZIONE DELLA DERIVATA: SIA $f: S \to \mathbb{R}$ E $x_0 \in S \cap DS$. IN PRATICA $S = (a,b)$ E $x_0 \in (a,b)$. SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

CHE, POSTO $h = x - x_0$ DIVENTA

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

SI DICE CHE f È DERIVABILE NEL PUNTO x_0 ED IL VALORE DEL LIMITE SI CHIAMA DERIVATA DI f E SI PUÒ INDICARE CON LA NOTAZIONE $f'(x_0)$ DOVUTA A LAGRANGE. SE f È DERIVABILE IN OGNI PUNTO $x \in S$ LA DERIVATA f' È A SUA VOLTA UNA FUNZIONE DI x, LA FUNZIONE DERIVATA.

TROVIAMO LE DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x) = mx + q$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{mx + q - (mx_0 + q)}{x - x_0} = m \longrightarrow m \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO: DATA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E FISSATO $x_0 \in \mathbb{R}$, SUPPONIAMO CHE IL RAPPORTO INCREMENTALE SIA COSTANTE. TRACCIARE IL GRAFICO DI f.

CASI NOTEVOLI: 1) $m = 1$, $q = 0$, $f(x) = x$, $f'(x) = 1$; 2) $m = 0$, $f(x) = q$ COSTANTE, $f'(x) = 0$.

MA 22 NOV 2022

$$f(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left((x+h)^n - x^n\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n\right) =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k \geq 1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1 \geq 0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1 \geq 1} + \binom{n}{n-1} x^{n-1}$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} 0 + n x^{n-1} = n x^{n-1}.$$

NOTA: $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$

$\qquad \|$

$(h+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k} x^k$

$$f(x) = e^x, \quad S = \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} \longrightarrow e^{x_0}$$

OSSERVAZIONE (DERIVATE SUCCESSIVE):

VISTO CHE $f'(x) = e^x$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, SI CONSTATA CHE $f'(x)$ È DERIVABILE E SI HA CHE $\left(f'(x)\right)' = e^x$: DERIVATA SECONDA DI f

IN GENERALE SI HA $f^{(k)}(x) = e^x$ PER OGNI $k = 1, 2, 3, \dots$

OSSERVAZIONE: $f(x) = e^x$ SODDISFA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $f' = f$

LE CUI SOLUZIONI SONO LE $f(x) = Ce^x$, CON $C \in \mathbb{R}$ COSTITUISCONO LO SPAZIO VETTORIALE $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = Ce^x, \ C \in \mathbb{R} \}$ DI DIMENSIONE 1, DI CUI UNA BASE È $\{ e^x \}$.

$f(x) = \log|x|$, $S = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$x_0 \neq 0$, $\frac{x}{x_0} > 0$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\log|x| - \log|x_0|}{x-x_0} =$$

$$= \frac{1}{x-x_0} \log \frac{x-x_0+x_0}{x_0} = \frac{1}{x-x_0} \log\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)$$

POSTO $h = \frac{x-x_0}{x_0} \longrightarrow 0$ DIVENTA

$$= \frac{1}{x_0} \frac{\log(1+h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{x_0}$$

CASO PARTICOLARE: $x > 0$, $f(x) = \log x$ È DERIVABILE E $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 \in \mathbb{R} = S$

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0} = \frac{2}{x-x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} \operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}$$

$$= \cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \longrightarrow \cos x_0$$

ESSENDO $h = \frac{x-x_0}{2} \longrightarrow 0$

SIMILMENTE SI VERIFICA CHE SE $f(x) = \cos x$ ALLORA $f'(x) = -\operatorname{sen} x$:

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = \frac{-2}{x-x_0} \operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2} \operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}$$

$$= -\operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2} \frac{\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \longrightarrow -\operatorname{sen} x_0$$

OSSERVAZIONE: SODDISFANO $f'' = -f$

PONIAMO $f(x) = x^{-n}$ CON $n = 1, 2, 3, \dots$ E $x_0 \in S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. TROVIAMO $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$

$$= \frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}\right) = \frac{-1}{x^n x_0^n} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} \to \frac{-n x_0^{n-1}}{x_0^n x_0^n}$$

$$= \frac{-n}{x_0^{n+1}} = -n x_0^{-n-1}.$$

SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE CHE $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ PER $x \in (0, +\infty)$ QUALUNQUE SIA $\alpha \in \mathbb{R}$.

LA PRINCIPALE CONSEGUENZA DELLA DERIVABILITÀ: LA DIFFERENZIABILITÀ, OVVERO L'APPROSSIMABILITÀ CON UN POLINOMIO DI PRIMO GRADO

SUPPONIAMO CHE $f: S \to \mathbb{R}$ SIA DERIVABILE IN UN PUNTO $x_0 \in S \cap DS$, ALLORA IL RAPPORTO $R(x, x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ CONVERGE A $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ PER $x \to x_0$, QUINDI LA DIFFERENZA $g(x) = R(x, x_0) - f'(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. ESPLICITANDO $f(x)$ TROVIAMO

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + g(x)(x-x_0)}$$

CONSEGUENZE IMPORTANTI: 1) CONTINUITÀ.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

GI 24 NOV 2022

2) DIFFERENZIABILITÀ. PONIAMO $y(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ ED OSSERVIAMO CHE

$$\frac{f(x)-y(x)}{x-x_0} = g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0.$$

SI DICE CHE UNA $f: S \to \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE SE ESISTE UN POLINOMIO DI PRIMO GRADO $y(x) = mx + q$ TALE CHE $\frac{f(x)-y(x)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$:

DUNQUE LE FUNZIONI DERIVABILI SONO ANCHE DIFFERENZIABILI: BASTA PRENDERE $y(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ DUNQUE $m = f'(x_0)$ E $q = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$. IL GRAFICO DI $y(x)$ SI DICE RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO x_0.

ESEMPIO: CERCHIAMO L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x) = \frac{1}{\log x}$ NEL PUNTO $x_0 = e$. IL DOMINIO DI f È L'INSIEME

$$S = (0,+\infty)\setminus\{1\} = (0,1)\cup(1,+\infty) \ni e.$$

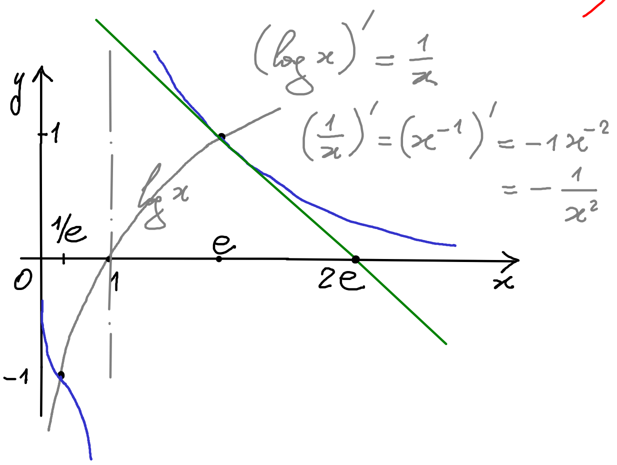
LA RETTA TANGENTE HA EQUAZIONE

$$y = f'(e)(x-e) + 1 = 2 - \frac{x}{e}$$

(VEDI APPRESSO)

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$



REGOLE DI DERIVAZIONE

SE $f, g: S \to \mathbb{R}$ SONO DERIVABILI IN UN PUNTO $x_0 \in S \cap DS$, ALLORA

1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$: LO SI VEDE DAL FATTO CHE

$$\frac{(f\pm g)(x) - (f\pm g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \pm \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

2) $(fg)'(x_0) \neq f'(x_0)\cdot g'(x_0)$, IN GENERALE: P.ES. SE $f(x) = g(x) = x$ ABBIAMO $f' = g' = 1$ MA $(fg)' = (x^2)' = 2x \neq 1$. PERÒ SI HA

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

E, PER INDUZIONE, SI DIMOSTRA CHE SE ESISTONO $f^{(n)}(x_0)$ E $g^{(n)}(x_0)$ ALLORA

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\cdot g^{(n-k)}(x_0).$$

DIMOSTRIAMO IL CASO $n = 1$:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

E LA TESI SEGUE PERCHÉ $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)$.

CASO PARTICOLARE: $f(x) = \alpha$ COSTANTE, $f'(x) = 0$,

$$(f(x)g(x))' = (\alpha g(x))' = f(x)g'(x) = \alpha g'(x)$$

CIÒ, INSIEME ALLA 1, IMPLICA LA LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE: $f \mapsto f'$

GI 24 NOV 2022

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA DI DUE FUNZIONI DERIVABILI $y = g(x)$ DERIVABILE NEL PUNTO $x = x_0$ E $z = f(y)$ NEL PUNTO $y = y_0 = g(x_0)$. LA FUNZIONE $f(g(x))$ È DERIVABILE NEL PUNTO $x = x_0$ E SI HA CHE

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(y_0)\cdot g'(x_0)$$

(REGOLA DELLA CATENA, CHAIN RULE) SI SCRIVE BENE DENOTANDO f' E g' CON $\frac{dz}{dy}$ E $\frac{dy}{dx}$ (NOTAZIONE DI LEIBNIZ) INFATTI DIVENTA

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}.$$

ESEMPIO: PONIAMO $g(x) = \log x$ E $f(y) = \frac{1}{y}$

COSICCHÉ $f(g(x)) = \frac{1}{\log x}$.

SAPENDO CHE $\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x}$ E $f'(y) = \frac{-1}{y^2}$

LA REGOLA PORGE $\frac{dz}{dx} = \big(f(g(x))\big)' =$

$$= \frac{-1}{y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-1}{\log^2 x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{-1}{x\log^2 x}.$$

CHE PER $x = e$ VALE $-\frac{1}{e}$.

GLI STUDENTI SONO INVITATI A SVOLGERE ESERCIZI

VE 25 NOV 2022

GENERALIZZAZIONE: SE $g(x)$ È DERIVABILE E $g(x) \neq 0$

ALLORA $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{g^2(x)}\,g'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

CONSEGUENZA: SE f, g SONO DERIVABILI E $g(x) \neq 0$

ALLORA $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' =$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

REGOLA DI DERIVAZIONE DEL RAPPORTO.

APPLICAZIONE: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' =$

$$\frac{\cos x\cdot\cos x + \operatorname{sen} x\,\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

TORNIAMO ALLA DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA E PONIAMO $f(y) = \log|y|$.

SE $g(x)$ È DERIVABILE E $g(x) \neq 0$ ALLORA

$$\big(\log|g(x)|\big)' = f'(y)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

(DERIVATA LOGARITMICA).

ORA PONIAMO $f(y) = e^y$ E $y = g(x) = \alpha\log x$

CON α COSTANTE FISSATA, $x \in (0, +\infty)$. SI HA:

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha\log x}\right)' = e^y\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

COME ANTICIPATO IERI.

VE 25 NOV 2022

DIMOSTRAZIONE DELLA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA:

$$\frac{f(g(x))-f(y_0)}{x-x_0}=\frac{f(g(x))-f(y_0)}{g(x)-y_0}\,\frac{g(x)-y_0}{x-x_0}$$

DOVE $g(x)\neq y_0=g(x_0)$. PER IPOTESI $\frac{g(x)-y_0}{x-x_0}\to g'(x_0)$

MENTRE $$\frac{f(g(x))-f(y_0)}{g(x)-y_0}=R(g(x),y_0)$$

ESSENDO $$R(y,y_0)=\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\xrightarrow[y\to y_0]{} f'(y_0)$$

IL CUI PROLUNGAMENTO PER CONTINUITÀ È

$$\tilde R(y,y_0)=\begin{cases}R(y,y_0), & y\neq y_0\\ f'(y_0) & y=y_0\end{cases}$$

ESSENDO ANCHE $g(x)$ CONTINUA (PERCHÉ È DERIVABILE)

$$\frac{f(g(x))-f(y_0)}{g(x)-y_0}=\tilde R(g(x),y_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}\tilde R(y_0,y_0)=$$
$$=f'(y_0)$$

E LA TESI SEGUE SE $g(x)\neq y_0=g(x_0)$. PER AFFRONTARE IL CASO GENERALE SI OSSERVA CHE

$$\tilde R(g(x),y_0)=\begin{cases}\dfrac{f(g(x))-f(y_0)}{g(x)-y_0}, & g(x)\neq y_0\\ f'(y_0) & g(x)=y_0\end{cases}$$

E SI HA $$\frac{f(g(x))-f(y_0)}{x-x_0}=\tilde R(g(x),y_0)\,\frac{g(x)-y_0}{x-x_0}$$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{}\tilde R(g(x_0),y_0)\,g'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

$$\boxed{\text{DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA } g(y) \text{ DI UNA } f: I\to\mathbb{R} \text{ STRETTAMENTE MONOTONA } (11/11/2022),\ I=\text{INTERVALLO}}$$

SE f È DERIVABILE IN $x_0\in I$ ALLORA g È DERIVABILE NEL PUNTO $y_0=f(x_0)$ E SI HA $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

A CONDIZIONE CHE $f'(x_0)\neq 0$.

APPLICAZIONI. $y=f(x)=\operatorname{sen}x$, $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$f'(x)=\cos x>0$ PER $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$g(y)=\operatorname{arcsen}y$, $(\operatorname{arcsen}y)'=g'(y)=$

$$=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

PER $y=\operatorname{sen}x\in(-1,1)$.

SIMILMENTE SI TROVA $(\arccos y)'=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$

PER $y\in(-1,1)$: VERIFICA PER ESERCIZIO.

MA $\arccos y$ È DERIVABILE NEL PUNTO $y=1$?

$$\frac{\arccos y-\arccos 1}{y-1}=\frac{\arccos y}{y-1}=\frac{x}{\cos x-1}$$

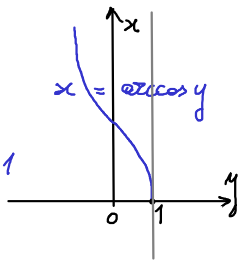
DOVE $0<x=\arccos y\xrightarrow[y\to1^-]{}0$. RESTA DA TROVARE IL $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$. SI HA CHE

$$\frac{\cos x-1}{x}=\frac{\cos^2x-1}{(\cos x+1)\,x}=-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x+1}\to 0$$

QUINDI $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\cos x-1}=-\infty$

POSSIAMO CONCLUDERE CHE

$\arccos y$ NON È DERIVABILE PER $y=1$



VE 25 NOV 2022

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}$

DIMOSTRAZIONE DELLA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA: DOBBIAMO STUDIARE

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{1}{f'(x_0)}$$

IL PUNTO È: SE $y \to y_0$, È VERO CHE $x \to x_0$?

SÌ PERCHÉ $x = g(y)$ E $g(y)$ È CONTINUA!

QUINDI $\lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

PRENDO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ED HO CHE SE $0<|x-x_0|<\delta$

$$\left| \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon.$$

ESSENDO g CONTINUA HO ANCHE

$$|g(y)-x_0| < \delta$$

SE $0<|y-y_0|<\tau$

LU 28 NOV 2022

IL DIFFERENZIALE E IL SIMBOLO DI LANDAU

1) IL DIFFERENZIALE. DATA $f: S \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN $x_0 \in S \cap DS$ SI CHIAMA DIFFERENZIALE DI f NEL PUNTO x_0 L'APPLICAZIONE LINEARE

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto f'(x_0)\,h$$

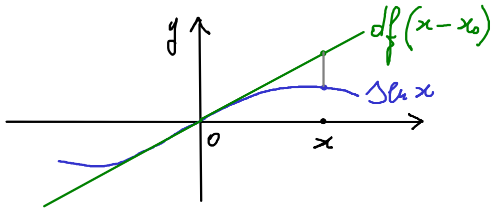
CHE SI È SOLITI INDICARE CON df. TRADIZIONALMENTE SI PENSA df COME LA VARIAZIONE INFINITESIMA DEI VALORI DI f: UN CONCETTO DISCUTIBILE SUL PIANO DEL RIGORE.

IN EFFETTI L'APPLICAZIONE LINEARE df APPLICATA AD $h = x-x_0$ HA UNA NOTEVOLE RELAZIONE CON $f(x)-f(x_0)$:

$$\frac{f(x)-f(x_0) - df(x-x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

ESEMPIO: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$, $f'(x_0) = \cos x_0 = 1$, $df: h \longmapsto h$



LU 28 NOV 2022

2) IL SIMBOLO DI LANDAU o (o PICCOLO)

DATE $f,g: S\to\mathbb{R}$ E PRESO $x_0\in DS$,

SI SCRIVE $f(x)=o(g(x))$ PER $x\to x_0$

SE $\dfrac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. ANALOGAMENTE, SE

S È ILLIMITATO SUPERIORMENTE, SI SCRIVE

$f(x)=o(g(x))$ PER $x\to+\infty$ SE

$$\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

ESEMPIO: $\operatorname{sen} x = o(x)$ PER $x\to+\infty$.

APPLICAZIONI: LO SVILUPPO

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+g(x)(x-x_0)$$

VALIDO PER UNA f DERIVABILE NEL PUNTO x_0, SI PUÒ SCRIVERE

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\quad \text{PER } x\to x_0}$$

IL FATTO CHE $\dfrac{f(x)-f(x_0)-df(x-x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

SI PUÒ ESPRIMERE SCRIVENDO CHE

$f(x)-f(x_0)-df(x-x_0)=o(x-x_0)$ PER $x\to x_0$.

OVVERO $\boxed{f(x)-f(x_0)=df(x-x_0)+o(x-x_0)}$

PER $x\to x_0$.

FUNZIONI CONTINUE NON DERIVABILI

CONSIDERIAMO UNA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN (a,b) ED UN PUNTO $x_0\in(a,b)$. SE I LIMITI

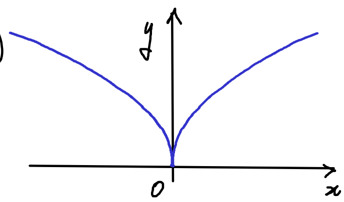
$\displaystyle\lim_{x\to x_0^\pm}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ESISTONO FINITI E SONO DIVERSI FRA LORO, SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO ANGOLOSO. ESEMPIO: $f(x)=|x|$, $x_0=0$,

$$\lim_{x\to x_0^\pm}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{|x|}{x}=\pm1$$

ESERCIZI: $f(x)=x^\pm$, $\quad x_0=0$.

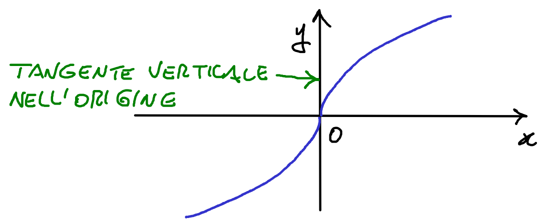
SE I LIMITI $\displaystyle\lim_{x\to x_0^\pm}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ SONO INFINITI E DISCORDI, SI DICE CHE IL GRAFICO DI f HA UNA CUSPIDE PER $x=x_0$. ESEMPIO:

$f(x)=\sqrt{|x|}$ FUNZIONE PARI CHE COINCIDE CON $\sqrt{x}$ PER $x\in[0,+\infty)$ PRESENTA UNA CUSPIDE NELL'ORIGINE.



SE, INFINE, I LIMITI $\displaystyle\lim_{x\to x_0^\pm}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ SONO INFINITI E CONCORDI NEL SEGNO, SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE.

ESEMPIO: $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=x_0$:



LU 28 NOV 2022

CARATTERIZZAZIONE DEI MASSIMI E DEI MINIMI

SE $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ASSUME IL MASSIMO O IL MINIMO IN $x_0\in(a,b)$ E SE ESISTE $f'(x_0)$ ALLORA

$$f'(x_0)=0.$$

IN ALTRI TERMINI: CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE AFFINCHÉ UNA FUNZIONE DERIVABILE ASSUMA IL MASSIMO O IL MINIMO IN UN PUNTO INTERNO x_0 È CHE x_0 SIA UN PUNTO CRITICO.

APPLICAZIONE: GLI EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO INTERNI DI UNA FUNZIONE DERIVABILE SI TROVANO FRA LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $f'(x)=0$.

ATTENZIONE: GLI EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO DI FRONTIERA POSSONO NON ESSERE PUNTI CRITICI! GLI EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO DI UNA FUNZIONE NON DERIVABILE NON POSSONO, OVVIAMENTE, ESSERE PUNTI CRITICI!

LA TOTALE IDENTIFICAZIONE FRA ESTREMI E PUNTI CRITICI È UN TIPICO ERRORE!

ESEMPI: $f(x)=|x|$ HA MINIMO NEL PUNTO INTERNO $x_0=0$, CHE NON È UN PUNTO CRITICO PERCHÉ $f'(0)$ NON ESISTE. $f(x)=\arccos x$ HA MINIMO NEL PUNTO DI FRONTIERA $x_0=1$ E $f'(1^-)=-\infty$ (25/11). ESERCIZIO: TROVARE GLI EVENTUALI PUNTI DI MINIMO ASSOLUTO DI

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}, & x\in[-1,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$$

E CALCOLARE $f'(1^-)$ (PONENDO $y=\arccos x$)

DIMOSTRAZIONE DELL'ASSERTO: AMMETTIAMO CHE $f(x)\geq f(x_0)$ PER OGNI $x\in(a,b)$. ALLORA IL RAPPORTO $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ HA IL SEGNO DI $x-x_0$.

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO SI HA $f'(x_0^+)\geq 0$ E $f'(x_0^-)\leq 0$. SICCOME f È DERIVABILE, SI DEVE AVERE

$f'(x_0)=f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=0$ COME AFFERMATO.

ESEMPIO: $f(x)=x-x^3=x(1-x^2)$

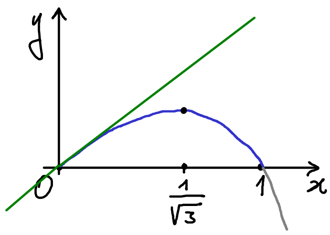
È CONTINUA PER $x\in[0,1]$ QUINDI PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS AMMETTE MASSIMO E MINIMO. PER LA REGOLA DEI SEGNI SI HA CHE

$f(x)>0=f(0)=f(1)$ PER $x\in(0,1)$,

QUINDI $\min\limits_{[0,1]} f=0=f(0)=f(1)$ E

$\max\limits_{[0,1]} f>0$ E TUTTI I PUNTI DI MASSIMO SONO PUNTI INTERNI. SICCOME f È DERIVABILE, I PUNTI DI MASSIMO SODDISFANO $f'(x)=0$.

ESSENDO $f'(x)=1-3x^2$ SI DEDUCE CHE IL PUNTO DI MASSIMO È UNICO ED È $x_M=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



DUNQUE $\max\limits_{[0,1]} f=$

$=f(x_M)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

OSSERVIAMO CHE $f(x)=x+o(x)$ PER $x\to 0$

E $f(x)=-x^3+o(x^3)$ PER $x\to+\infty$

MA 29 NOV 2022

CARATTERIZZAZIONE DELLA MONOTONIA

DATA $f: S \to \mathbb{R}$ CRESCENTE, E FISSATO $x_0 \in S \cap DS$, LA DIFFERENZA $f(x)-f(x_0)$ HA IL SEGNO DI $x-x_0$ QUINDI

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{PER OGNI } x \in S \setminus \{x_0\}:$$

SE f È DERIVABILE SI HA $f'(x_0) \geq 0$ PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO.

VICEVERSA: SE $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE E $f'(x) \geq 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$ ALLORA f È CRESCENTE IN SENSO LATO. SE $f'(x) > 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$ ALLORA f È CRESCENTE IN SENSO STRETTO. INFINE, SE $f'(x) = 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$ ALLORA f È COSTANTE.

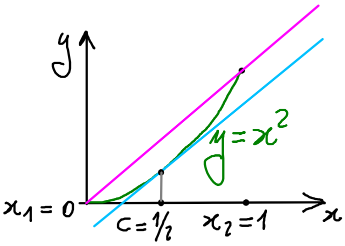
PER LA DIMOSTRAZIONE, USEREMO IL

TEOREMA DI LAGRANGE (THE MEAN VALUE THEOREM)

SE $f:[x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $[x_1, x_2]$ E DERIVABILE IN (x_1, x_2), ESISTE ALMENO UN PUNTO $c \in (x_1, x_2)$ TALE CHE $f'(c) =$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{OVVERO}$$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)$$



$f(x) = x^2$,

$f'(x) = 2x$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1$$

APPLICAZIONI: SE $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE E $f'(x) \geq 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$ ALLORA f È CRESCENTE IN SENSO LATO. INFATTI, PRESI ARBITRARIAMENTE $x_1, x_2 \in (a,b)$ CON $x_1 < x_2$, PER IL TEOREMA DI LAGRANGE ESISTE $c \in (x_1, x_2)$ TALE CHE $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$.

SE POI $f'(x) > 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$ SI HA $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. INFINE, SE $f'(x) = 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$ SI HA $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ QUINDI $f(x) = f(x_1)$ PER OGNI $x \in (a,b)$ DUNQUE f È COSTANTE.

IL CASO PARTICOLARE $f(x_1) = f(x_2)$.

TEOREMA DI ROLLE: QUANDO $f(x_1) = f(x_2)$, SE $f:[x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $[x_1, x_2]$ E DERIVABILE IN (x_1, x_2), ESISTE ALMENO UN PUNTO $c \in (x_1, x_2)$ TALE CHE $f'(c) = 0$

DIMOSTRAZIONE: PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTONO $x_m, x_M \in [x_1, x_2]$ TALI CHE

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \text{PER OGNI } x \in [x_1, x_2].$$

SE $x_m \in (x_1, x_2)$ ALLORA $f'(x_m) = 0$.

SE $x_M \in (x_1, x_2)$ ALLORA $f'(x_M) = 0$.

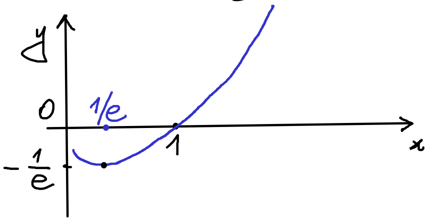
INFINE, SE $x_m, x_M \in \{x_1, x_2\}$ ALLORA, ESSENDO $f(x_1) = f(x_2)$ SI HA

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(x_m) \quad \text{QUINDI}$$

f È COSTANTE E $f'(x) = 0$ IN TUTTO (x_1, x_2).

MA 29 NOV 2022

ESEMPIO: STUDIAMO LA MONOTONIA DELLA FUNZIONE $f(x) = x \log x$ PER $x \in (0, +\infty)$



ESERCIZIO: SE f, g SONO POSITIVE E CRESCENTI, IL PRODOTTO $f(x)\,g(x)$ È CRESCENTE.

INOLTRE $f'(x) = 1 + \log x > 0$ PER $x > \frac{1}{e}$

MENTRE $f'(x) < 0$ PER $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$

NE SEGUE CHE $\min\limits_{(0,+\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ ED ESISTE FINITO IL LIMITE $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI LAGRANGE:

LA FUNZIONE $h(x) = f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\, x$

SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE PERCHÉ

$$h(x_2) - h(x_1) = f(x_2) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1)$$

$= 0$ QUINDI ESISTE $c \in (x_1, x_2)$

TALE CHE $h'(c) = f'(c) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

DA CUI LA TESI.

GI 01 DIC 2022

CARATTERIZZAZIONE DELLA CONVESSITÀ

UNA $f: I \to \mathbb{R}$ CONTINUA NELL'INTERVALLO I, DERIVABILE PER OGNI $x \in \mathring{I}$ (INTERNO DI I), È CONVESSA SE E SOLO SE f' È CRESCENTE.

CONVESSA VUOLE DIRE CHE SE $x_1, x_2, x_3 \in I$ SODDISFANO $x_1 < x_2 < x_3$ ALLORA

$$f(x_2) \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

OVVERO $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

DUNQUE $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ È CRESCENTE IN $x > x_1$.

PERTANTO SE f È CONVESSA ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'_+(x_1) \in [-\infty, +\infty).$$

ESEMPIO: $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ È CONVESSA IN $I = [0, +\infty)$ E $f'_+(0) = -\infty$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $x_2 > \inf I$ ALLORA $f'_+(x_2) > -\infty$. RISCRIVIAMO

$$f(x_2) \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

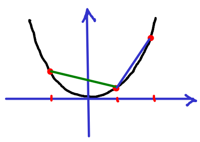
NELLA FORMA

$$\left(f(x_2) - f(x_1)\right)\left(x_3 - x_2 + \cancel{x_2 - x_1}\right) \le$$

$$\le \left(f(x_3) - f(x_2) + \cancel{f(x_2) - f(x_1)}\right)(x_2 - x_1)$$

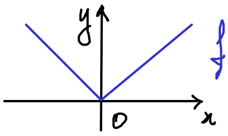
CIOÈ $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$, $x > x_2$

QUINDI $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'_+(x_2)$.



 GI 01 DIC 2022

QUINDI UNA f CONVESSA È CONTINUA DA DESTRA IN OGNI PUNTO $x_2 > \inf I$: $\lim_{x \to x_2^+} f(x) = f(x_2)$. UN DISCORSO ANALOGO VALE DA SINISTRA: SE $x_2 < \sup I$ ALLORA $\lim_{x \to x_2^-} f(x) = f(x_2)$. LE FUNZIONI CONVESSE SONO CONTINUE NEI PUNTI INTERNI ED HANNO DERIVATE DESTRE E SINISTRE FINITE IN TALI PUNTI.



$f(x) = |x|$.

INOLTRE LA RELAZIONE $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \le f'_+(x_2)$, VALIDA PER OGNI $x < x_2$, PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO IMPLICA $f'_-(x_2) \le f'_+(x_2)$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $f'(x_1) \le f'(x_3)$ AMMESSO CHE ESISTANO LE DUE DERIVATE, CIOÈ CHE f' È CRESCENTE. DIMOSTRIAMO CHE VALE ANCHE IL VICEVERSA. SIA $f: I \to \mathbb{R}$ CONTINUA NELL'INTERVALLO I E DERIVABILE IN $\mathring{I}$. SUPPONIAMO CHE $f'(c_1) \le f'(c_2)$ PER OGNI $c_1, c_2 \in \mathring{I}$ CON $c_1 < c_2$. PER IL TEOREMA DI LAGRANGE SI HA CHE

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) \le f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

CON $c_1 \in (x_1, x_2)$ E $c_2 \in (x_2, x_3)$ QUINDI $c_1 < c_2$

DALLA RELAZIONE $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$ SEGUE $f'(x_1) \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$ AMMESSO CHE $f'(x_1)$ ESISTA. MA LA CONVESSITÀ SI PUÒ ANCHE ESPRIMERE CON $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ DA CUI SEGUE CHE

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le f'(x_3)$$ SE QUESTA ESISTE.

NOTARE CHE DA $f'(x_1) \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$ SEGUE $f(x) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ PER $x > x_1$. INOLTRE DA $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le f'(x_3)$ SEGUE

$$f(x) \ge f(x_3) + f'(x_3)(x - x_3), \quad x < x_3.$$

PUNTI DI FLESSO: SE $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ SODDISFA $f''(x) \gtrless 0$ PER $x \in (a, x_0)$, $f''(x) \lessgtr 0$ PER $x \in (x_0, b)$, $f''(x_0) = 0$ IL PUNTO x_0 SI DICE PUNTO DI FLESSO. IN ALCUNI TESTI È SUFFICIENTE CHE ESISTA $f'(x_0)$ E IL GRAFICO DI f ATTRAVERSI LA RETTA $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

LO STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE NON PUÒ MIRARE A BATTERE I SOFTWARE IN CIRCOLAZIONE! QUELLO CHE CONTA È SAPER LEGGERE LE FUNZIONI!

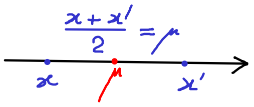
 GI 01 DIC 2022

A TITOLO DI SEMPLICE ESEMPIO, TRACCIAMO IL GRAFICO DI $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$

DOVE $\sigma\in(0,+\infty)$ E $\mu\in\mathbb{R}$, SEGUENDO LO SCHEMA A PAG. 264 DEL TESTO.

1. IL DOMINIO È $\mathbb{R}$.

2. POSTO $x'=2\mu-x$



$x'-\mu=\mu-x$

SI TROVA $f(x')=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\mu-x)^2}=f(x)$

SIMMETRIA RISPETTO A $x=\mu$. POSTO $z=x-\mu$

DIVENTA $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$ PARI.

INOLTRE $f(x)>0$ PER OGNI $x\in\mathbb{R}$.

3. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}=0$

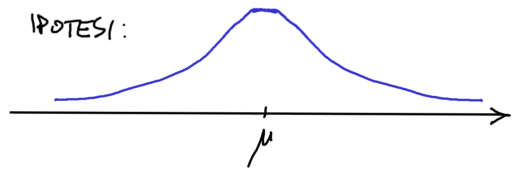
4. $f(x)$ È DERIVABILE PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ E SI TROVA

CHE $f'(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}\cdot\frac{d}{dx}\frac{-1}{2}(x-\mu)^2$

$=-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$

5. $f'(x)$ È DISCORDE DA $x-\mu$, QUINDI $x_M=\mu$ È L'UNICO PUNTO DI MASSIMO IN QUANTO $f(x)$ È CRESCENTE IN $(-\infty,\mu)$ E DECRESCENTE IN $(\mu,+\infty)$.

6. IPOTESI:



7. DERIVANDO $-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$

TROVIAMO

$$f''(x)=-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(1-(x-\mu)^2\right)e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$$

$f''>0 \Rightarrow f'$ CRESCENTE $\Rightarrow f$ CONVESSA

ABBIAMO $f''(x)<0$ SE $(x-\mu)^2<1$ CIOÈ PER $-1<x-\mu<1$ DUNQUE $x\in(\mu-1,\mu+1)$

I PUNTI $\mu-1$, $\mu+1$ SONO I DUE PUNTI DI FLESSO.

ESERCIZIO: STUDIARE LA FUNZIONE GAUSSIANA

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

VE 02 DIC 2022

ESERCIZIO:

TROVARE GLI EVENTUALI PUNTI DI MINIMO ASSOLUTO DI $f(x) = \begin{cases} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}, & x \in [-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

E CALCOLARE $f'(1^-)$ (PONENDO $y = \arccos x$)

1. $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} > 0 = f(1)$ PER OGNI $x \in [-1, 1)$ QUINDI $f(1) = 0 = \min_{[-1,1]} f$ ED IL PUNTO $x_m = 1$ È L'UNICO PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO.

2. $f'(1^-) = f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{x-1}$. PONENDO

$0 \le y = \arccos x \xrightarrow[x\to 1^-]{} \arccos 1 = 0$

POSSIAMO SCRIVERE $\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{x-1} =$

$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sqrt{1-\cos y}} \cdot \frac{1}{(\cos y) - 1}$.

PROCEDIAMO COME NELLA LEZIONE DEL 25/11:

$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos^2 x - 1}{(\cos x + 1) x^2} = -\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{\cos x + 1}$

QUINDI $\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sqrt{1-\cos y}} \cdot \frac{1}{(\cos y) - 1} =$

$= \lim_{y\to 0^+} \sqrt{\frac{y^2}{1-\cos y}} \cdot \frac{1}{(\cos y)-1} = -\infty$

PERCHÉ $\sqrt{\frac{y^2}{1-\cos y}} \xrightarrow[y\to 0^+]{} \sqrt{2}$.

MA LA FUNZIONE $f(x)$ È ALMENO CONTINUA?

$f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sqrt{2} \neq 0 = f(1)$

$\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \frac{y}{\sqrt{1-\cos y}} = \sqrt{\frac{y^2}{1-\cos y}} \xrightarrow[y\to 0^+]{} \sqrt{2}$

MA ALLORA CONSIDERIAMO $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-1, 1) \\ \sqrt{2}, & x = 1 \end{cases}$

CHE È CONTINUA, E STUDIAMO $\tilde{f}'_-(1) =$

$= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{2}\right) \frac{1}{x-1} =$

$= \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{y}{\sqrt{1-\cos y}} - \sqrt{2}\right) \frac{1}{(\cos y) - 1}$

$= \lim_{y\to 0^+} \left(\sqrt{\frac{y^2}{1-\cos y}} - \sqrt{2}\right) \frac{1}{(\cos y) - 1}$

$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{y^2}{1-\cos y} - 2}{\sqrt{\frac{y^2}{1-\cos y}} + \sqrt{2}} \frac{1}{(\cos y) - 1}$

CI CONCENTRIAMO SU $\lim_{y\to 0^+} \left(\frac{y^2}{1-\cos y} - 2\right) \frac{1}{(\cos y) - 1}$

$= -2 \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - \left(1 - \frac{1}{2} y^2\right)}{(1-\cos y)^2} =$

$= -2 \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - \left(1 - \frac{1}{2} y^2\right)}{y^4} \cdot \left(\frac{y^2}{1-\cos y}\right)^2$

RESTA DA DETERMINARE IL $\lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - \left(1 - \frac{1}{2} y^2\right)}{y^4}$

IL CHE È IMMEDIATO SE SI USA LA FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO:

$\cos y = 1 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{24} y^4 + o(y^4)$

QUINDI $\lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - \left(1 - \frac{1}{2} y^2\right)}{y^4} = \frac{1}{24}$

VE 02 DIC 2022

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO

DATA UNA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILE $n-1$ VOLTE IN (a,b), CON $n\geq 1$ E DOTATA DELLA DERIVATA $f^{(n)}(x_0)$ IN UN PUNTO $x_0\in(a,b)$, E POSTO

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

NOTARE CHE $P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

SI HA $f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$ PER $x\to x_0$.

SI PUÒ DIMOSTRARE PER INDUZIONE. BASE DELL'INDUZIONE È IL CASO $n=1$: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ VISTO IL 28/11.

PASSO INDUTTIVO, SERVE IL TEOREMA DI CAUCHY (THE GENERALIZED MEAN VALUE THEOREM):

DATE f,g CONTINUE IN $[x_1,x_2]$ E DERIVABILI IN (x_1,x_2), CON $g'(x)\neq 0$ IN (x_1,x_2), ESISTE ALMENO UN PUNTO $c\in(x_1,x_2)$ TALE CHE

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

NOTE: SE $g(x)=x$ HO $g'=1$ E DIVENTA IL TEOREMA DI LAGRANGE. $g(x_2)-g(x_1)\neq 0$ PER IL TEOREMA DI ROLLE.

DIMOSTRAZIONE: LA FUNZIONE $h(x)=f(x)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}g(x)$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE: $h(x_2)-h(x_1)=$

$$=f(x_2)-f(x_1)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}\left(g(x_2)-g(x_1)\right)$$

$=0$ QUINDI ESISTE $c\in(x_1,x_2)$ TALE CHE

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}g'(c)$$

DA CUI LA TESI.

PER DIMOSTRARE LA FORMULA DI TAYLOR DOBBIAMO VERIFICARE CHE $\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$

NOTARE CHE LE FUNZIONI $\varphi(x)=f(x)-P_n(x)$ E $\psi(x)=(x-x_0)^n$ SI ANNULLANO IN x_0 QUINDI

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=$$

$$=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}=\frac{f'(c)-P_n'(c)}{n(c-x_0)^{n-1}}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

PER L'IPOTESI INDUTTIVA APPLICATA ALLA FUNZIONE $g(x)=f'(x)$: IL RAPPORTO

$$\frac{f'(x)-P_n'(x)}{(x-x_0)^{n-1}}=\frac{g(x)-P_n'(x)}{(x-x_0)^{n-1}}$$ TENDE A ZERO

PERCHÉ $P_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j+1)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

$=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$ È IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE $n-1$ ASSOCIATO ALLA FUNZIONE $g(x)$.

REGOLA DI DE L'HÔPITAL (TEOREMA DI DE L'HÔPITAL)

PUÒ SERVIRE PER CALCOLARE IL LIMITE DEL RAPPORTO $\frac{f(x)}{g(x)}$ NEL CASO IN CUI $f, g \longrightarrow 0$ OPPURE $f, g \longrightarrow \pm\infty$.

ENUNCIATO: DATE $f, g: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, DERIVABILI IN (a,b) E CON $g'(x) \neq 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$. SE

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$$

OPPURE

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \pm\infty$$

E SE $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (FINITO O INFINITO)

ALLORA $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

APPLICAZIONE: VOGLIAMO CALCOLARE IL

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - \left(1 - \frac{1}{2}y^2\right)}{y^4}$$

OSSERVAZIONE: IL TEOREMA SI ADATTA ANCHE AL LIMITE $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ CON OVVIE MODIFICHE.

IL TEOREMA VALE ANCHE SE $a = -\infty$ OPPURE $b = +\infty$.

VERIFICHIAMO CHE LE FUNZIONI $f(y) = \cos y - \left(1 - \frac{1}{2}y^2\right)$ E $g(y) = y^4$ SONO INFINITESIME PER $y \to 0^+$: CERTO PERCHÉ SONO CONTINUE. INOLTRE $g'(y) = 4y^3 \neq 0$ PER OGNI $y \in (0, +\infty)$ ED ESISTE $f'(y)$. RESTA DA VERIFICARE CHE IL $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} y + y}{4y^3}$ ESISTA (FINITO O INFINITO).

PER TROVARE IL $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} y + y}{4y^3}$ USIAMO IL TEOREMA DI DE L'HÔPITAL: LA $\varphi(y) = -\operatorname{sen} y + y$ È DERIVABILE E TENDE A ZERO PER $y \to 0$. IDEM $\psi(y) = 4y^3$, INOLTRE $\psi'(y) = 12y^2 \neq 0$ PER $y \in (0, +\infty)$.

POICHÉ SAPPIAMO CHE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\varphi'(y)}{\psi'(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-\cos y + 1}{12y^2} = \frac{1}{24}$$

POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI DE L'HÔPITAL ED AFFERMARE CHE

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} y + y}{4y^3} = \frac{1}{24}.$$

A QUESTO PUNTO POSSIAMO SCRIVERE

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - \left(1 - \frac{1}{2}y^2\right)}{y^4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} y + y}{4y^3} = \frac{1}{24}.$$

LU 05 DIC 2022

ALCUNE NOTEVOLI APPLICAZIONI:

① $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$. SICCOME $x, e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

E $x' = 1 \neq 0$, RESTA DA VEDERE SE ESISTE IL

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$ MA

ALLORA $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, CON $\alpha \in (0, +\infty)$. BASTA

SCRIVERE $\frac{e^x}{x^\alpha} = \left(\frac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha$ QUINDI CERCARE

IL $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/\alpha}}{x}$. A TAL FINE, POICHÉ $e^{x/\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

IN QUANTO $\alpha \in (0, +\infty)$ BASTA PORRE $y = \frac{x}{\alpha} \to +\infty$

VEDIAMO SE ESISTE IL $\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{x/\alpha})'}{x'} =$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{x/\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = +\infty$ VA BENE, QUINDI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha = +\infty.$$

OSSERVAZIONE: SE $\alpha \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

SI HA CHE $\frac{(e^x)^{(\alpha)}}{(x^\alpha)^{(\alpha)}} = \frac{e^x}{\alpha!} \longrightarrow +\infty$ E SI

GIUNGE ALLA STESSA CONCLUSIONE. NE SEGUE

CHE $\frac{e^x}{x^\alpha} \geq \frac{e^x}{x^{[\alpha]+1}} \longrightarrow +\infty$ PER OGNI

$\alpha \in (0, +\infty)$.

③ APPLICAZIONE PEDESTRE: VOGLIAMO TROVARE

IL $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. SAPPIAMO CHE $(\operatorname{sen} x)' =$

$= \cos x$ E $x' = 1 \neq 0$. SICCOME RISULTA

$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{x'} = 1$ POSSIAMO CONCLUDERE CHE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{x'} = 1.$$

MA COME SO CHE $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$? LO SO

PERCHÉ HO VISTO CHE $\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} =$

$= \cos x_0$, DUNQUE, CON $x_0 = 0$, HO GIÀ VISTO

CHE $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos 0 = 1$.

④ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

⑤ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}$, $\alpha \in (0, +\infty)$. ESSENDO

$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$ SI

CONCLUDE CHE $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$

⑥ $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^\beta}{x}$, $\beta \in (0, +\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^\beta}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x^{1/\beta}}\right)^\beta = 0.$$

⑦ $\lim_{y\to-\infty} y e^{y} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^{x}} = 0.$

ESERCIZIO: $\lim_{y\to-\infty} (-y)^{\alpha} e^{y}$, $\alpha\in(0,+\infty)$

⑧ $\lim_{x\to0^+} x^{\alpha}\log x = \lim_{h\to+\infty} \frac{\log\frac{1}{h}}{h^{\alpha}} =$

$= \lim_{h\to+\infty} \frac{-\log h}{h^{\alpha}} = 0$ PER IL PUNTO ⑤,

CON $\alpha\in(0,+\infty)$.

DIMOSTRAZIONE DELLA REGOLA DI DE L'HÔPITAL.

Ⓐ CASO $b\in\mathbb{R}$, $f,g\to0$, $\frac{f'}{g'}\to\ell\in\mathbb{R}$.

DEFINIAMO $\tilde f(x) = \begin{cases} f(x), & x\in(a,b) \\ 0, & x=b \end{cases}$ E ANALOGAMENTE $\tilde g(x) = \begin{cases} g(x), & x\in(a,b) \\ 0, & x=b \end{cases}$.

PER OGNI $x\in(a,b)$ APPLICHIAMO IL TEOREMA DI CAUCHY SULL'INTERVALLO $[x,b]$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde f(x)-\tilde f(b)}{\tilde g(x)-\tilde g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ PER UN PUNTO $c\in(x,b)$. SICCOME PER OGNI $\varepsilon\in(0,+\infty)$ ESISTE $\delta>0$ TALE CHE PER OGNI $c\in(b-\delta,\ b)$ RISULTA $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-\ell\right|<\varepsilon$, NE SEGUE CHE PER OGNI $x\in(b-\delta,\ b)$ VALE LA DISUGUAGLIANZA $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|<\varepsilon$ IN QUANTO $c\in(x,b)\subset(b-\delta,\ b)$.

Ⓑ CASO $b\in\mathbb{R}$, $f,g\to0$, $\frac{f'}{g'}\to\pm\infty$:

ESERCIZIO.

Ⓒ CASO $b\in\mathbb{R}$, $f,g\to\pm\infty$, $\frac{f'}{g'}\to\ell\in\mathbb{R}$.

PRENDO $\varepsilon\in(0,1)$ ED ESISTE $\tau>0$ TALE CHE

$$\ell-\varepsilon<\frac{f'(c)}{g'(c)}<\ell+\varepsilon$$

PER OGNI $c\in(b-\tau,\ b)$. PRENDO $x, x_0\in(b-\tau,\ b)$ E SCRIVO $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ CON UN $c\in(b-\tau,\ b)$. OSSERVO CHE

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}$$

PER x VICINO A b HO CHE

$$\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}>0$$ QUINDI

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}.$$ SICCOME

$$R(x) = \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} \xrightarrow[x\to b^-]{} 1$$ ESISTE $\delta\in(0,\tau)$ TALE CHE PER OGNI $x\in(b-\delta,\ b)$ RISULTA

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| = \left|R(x)\frac{f'(c)}{g'(c)}-\ell\right| \le$$

$$\le \left|R(x)\frac{f'(c)}{g'(c)}-\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-\ell\right| =$$

$$= \underbrace{\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|}_{\le M=|\ell|+\varepsilon}\cdot\underbrace{|R(x)-1|}_{<\frac{\varepsilon}{|\ell|+\varepsilon}} + \underbrace{\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-\ell\right|}_{<\varepsilon} \le 2\varepsilon$$

E LA TESI SEGUE.

LU 05 DIC 2022

 MA 06 DIC 2022

(D) CASO $b\in\mathbb{R}$, $f,g\to\pm\infty$, $\dfrac{f'}{g'}\to\pm\infty$:

ESERCIZIO.

(E) CASO $b=+\infty$. VOGLIAMO TROVARE IL $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{h\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{h}\right)}{g\left(\frac{1}{h}\right)}$ OTTENUTO CON LA SOSTITUZIONE $h=\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

SI HA CHE $\dfrac{d}{dh}f\left(\frac{1}{h}\right)=-\dfrac{1}{h^2}f'\left(\frac{1}{h}\right)$ E $\dfrac{d}{dh}g\left(\frac{1}{h}\right)=-\dfrac{1}{h^2}g'\left(\frac{1}{h}\right)\neq 0$. IL LIMITE

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{d}{dh}f\left(\frac{1}{h}\right)}{\frac{d}{dh}g\left(\frac{1}{h}\right)}=\lim_{h\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{h}\right)}{g'\left(\frac{1}{h}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$ ESISTE PER IPOTESI,

QUINDI $$L=\lim_{h\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{h}\right)}{g\left(\frac{1}{h}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

OSSERVAZIONE: SE IL $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ NON ESISTE, IL $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ PUÒ BENISSIMO ESISTERE! ESEMPIO: SE $f(x)=x+\sin x\geq x-1$ E $g(x)=x$ SI HA $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$ MENTRE

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=1+\cos x$$ NON HA LIMITE.

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE

SIA $f:[x_0,x]\longrightarrow\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[x_0,x]$, CON DERIVATE $f',\dots,f^{(n)}$ CONTINUE IN $[x_0,x]$ ED AVENTE $f^{(n+1)}$ IN (x_0,x), $n\in\{0,1,2,\dots\}$.

ESISTE ALMENO UN $c\in(x_0,x)$ TALE CHE

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

SI PUÒ DIMOSTRARE PER INDUZIONE. BASE DELL'INDUZIONE È IL CASO $n=0$:

$$f(x)=P_0(x)+f'(c)(x-x_0)$$
$$=f(x_0)+f'(c)(x-x_0)\quad (29/11).$$

PASSO INDUTTIVO: STUDIO IL RAPPORTO

$\dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$. SICCOME $\varphi(x)=f(x)-P_n(x)$

E $\psi(x)=(x-x_0)^{n+1}$ SI ANNULLANO PER $x=x_0$,

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=$$

$$=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\quad \xi\in(x_0,x)$$ PER IL TEOREMA DI CAUCHY. DUNQUE

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f'(\xi)-P_n'(\xi)}{(n+1)(\xi-x_0)^n}=$$ POSTO $g=f'$

$$=\frac{g(\xi)-P_n'(\xi)}{(\xi-x_0)^n}\cdot\frac{1}{n+1}\overset{\text{IPOTESI INDUTTIVA}}{=}\frac{g^{(n)}(c)}{n!}\cdot\frac{1}{n+1},$$

$c\in(x_0,\xi)\subset(x_0,x)$, QUINDI $=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

MA 06 DIC 2022

APPLICAZIONE: LE SERIE DEL 17/10 CONVERGONO ALLE RISPETTIVE FUNZIONI GENERATRICI.

VERIFICHIAMO, AD ESEMPIO, CHE

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$ IL CHE EQUIVALE

A DIRE CHE IL $P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

SODDISFA $\lim_{n \to +\infty} P_{2n+1}(x) = \operatorname{sen} x$, E CIOÈ

$$\left|\operatorname{sen} x - P_{2n+1}(x)\right| = \left| \frac{(\operatorname{sen} x)^{(2n+2)}\Big|_{x=c}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right|$$

$$\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad (25/11).$$